

주파수영역에서 49점 가중평균을 이용한 scalar 파동방정식의 유한차분식 정확도 향상을 위한 연구

장성형* · 신창수** · 양동우* · 양승진*

An Accuracy Improvement in Solving Scalar Wave Equation by Finite Difference Method in Frequency Domain Using 49 Points Weighted Average Method

Seong Hyung Jang*, Chang Soo Shin**, Dong Woo Yang* and Sung Jin Yang*

ABSTRACT : Much computing time and large computer memory are needed to solve the wave equation in a large complex subsurface layer using finite difference method. The time and memory can be reduced by decreasing the number of grid per minimum wave length. However, decrease of grid may cause numerical dispersion and poor accuracy. In this study, we present 49 points weighted average method which save the computing time and memory and improve the accuracy. This method applies a new weighted average to the coordinate determined by transforming the coordinate of conventional 5 points finite difference stars to 0° and 45° , 25 points finite difference stars to 0° , 26.56° , 45° , 63.44° and 49 finite difference stars to 0° , 18.43° , 33.69° , 45° , 56.30° , 71.56° . By this method, the grid points per minimum wave length can be reduced to 2.5, the computing time to $(2.5/13)^3$, and the required core memory to $(2.5/13)^4$ computing with the conventional method.

서 론

복잡한 지하구조에서의 파동 방정식에 대한 해를 해석학적으로 구하기는 어렵기 때문에 유한차분법 및 유한요소법을 이용하여 근사해를 구한다. 이 방법은 반무한 연속체인 지하구조를 유한 크기의 불연속 격자로 근사화하여 해를 구하기 때문에 해의 정확도에 오차가 발생할 수 있다. 차분법의 정확도는 지하구조 규명을 위한 모델링에 있어 중요한 문제이며 그 오차분석의 한 방법으로서 격자 분산 해석을 주로 이용한다.

Alford *et al.* (1974)은 음향 파동방정식에 대한 해석학적 해와 유한차분법에 의한 수치해석적 해를 비교해 보았으며, 격자분산에 의한 정확도 분석에 대한 연구는 2차 및

4차 근사식을 이용한 것과 (Alford *et al.*, 1974; Kelly *et al.*, 1974), 고차 근사식을 이용한 것 (Dablain, 1974), 그리고 Spectral 방법을 이용한 것 등이 있다 (Kosloff, Baysal, 1982). 또한 Bamberger 등 (1980)은 2차 근사에 의한 유한차분법과 유한요소법의 정확도를 정량적으로 비교해 보았고, Belytschko, Mullen (1978)은 1차원 파동방정식에 대한 유한요소법 해석을 연구하였으며, Marfurt (1980)은 이것을 2차원 탄성 파동방정식에 적용하였다.

파동방정식에 대한 유한차분식 전개에 많이 이용되는 양함수법 (explicit method)은 많은 계산비용과 엄청난 량의 컴퓨터 기억용량이 필요하다. 계산시간과 기억용량을 줄이기 위한 방법으로서 공간미분과 시간미분에 고차 근사식을 적용하여 차분식을 전개하는 방법과 Jo *et al.* (1996)에 의해 연구된 가중평균법을 이용하여 차분식을 전개하는 방법이 있다. 부분 미분방정식 (PDE)의 해를 유한차분법으로 구하는 일반적인 방법은 인접하는 5점을 이용하여 차분식을 전개한다. 그러나 Jo *et al.* (1996)은

* 한양대학교 자원공학과(Dept. of Mineral & Petroleum Eng., HanYang Univ., Seongdong-ku, Seoul, Korea.)

** 한국자원연구소(Korea Institute of Geology, Mining and Materials, Kajeongdong, YuSeong-gu, Daejeon, Korea)

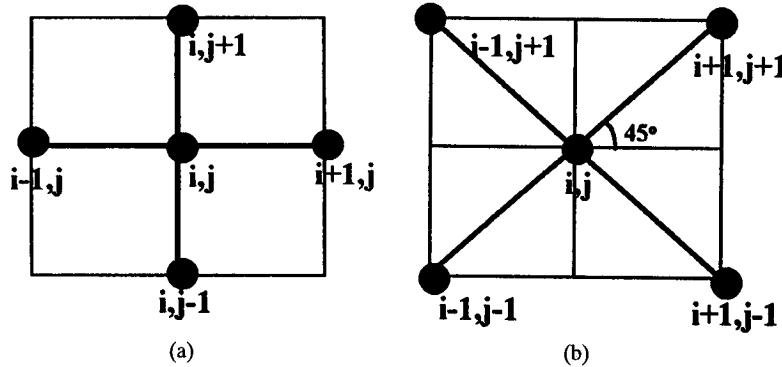


Fig. 1. Finite-difference stars of the Laplacian operator in 9 point weighted average method. (a) conventional five stars with grid distance Δ , (b) five point stars with grid distance of $\sqrt{2}\Delta$ in the 45° rotated coordinate system.

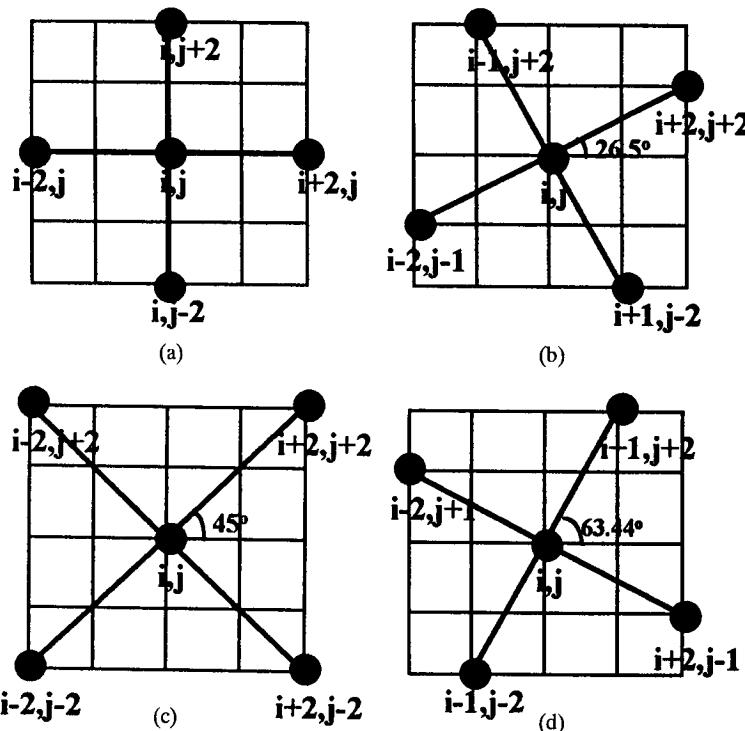


Fig. 2. Finite-difference stars of the Laplacian operator in 25 point weighted average method, (a) five point stars with grid distance of 2Δ , (b) five point stars with grid distance of $\sqrt{5}\Delta$ in the 26.56° rotated coordinate system, (c) five point stars with grid distance $\sqrt{5}\Delta$ in the 63.44° rotated coordinate system.

기존 5점을 가지고 전개한 차분식에 45° 회전한 좌표계를 이용하여 전개한 차분식을 가중평균한 9점 가중평균법을 이용함으로서 최소 파장당 격자수를 기존 13개에서 9개로 줄일 수 있다. 또한 손희정 (1996)은 기존 좌표계를 0° , 22.5° , 45° , 62.5° 회전시킨 25점 가중평균법에 의해 파동 방정식을 차분식으로 전개하였고 이들의 가중평균값

을 이용하여 최소 파장당 격자수를 3개 까지 줄일 수 있음을 보여 주었다.

본 연구에서는 기존 좌표계를 0° , 11.25° , 22.5° , 33.75° , 45° , 67.5° , 78.25° 회전한 49점 가중평균값으로 차분식을 전개하여 최소 파장당 격자수를 더욱 줄이는 방법에 관하여 연구한다.

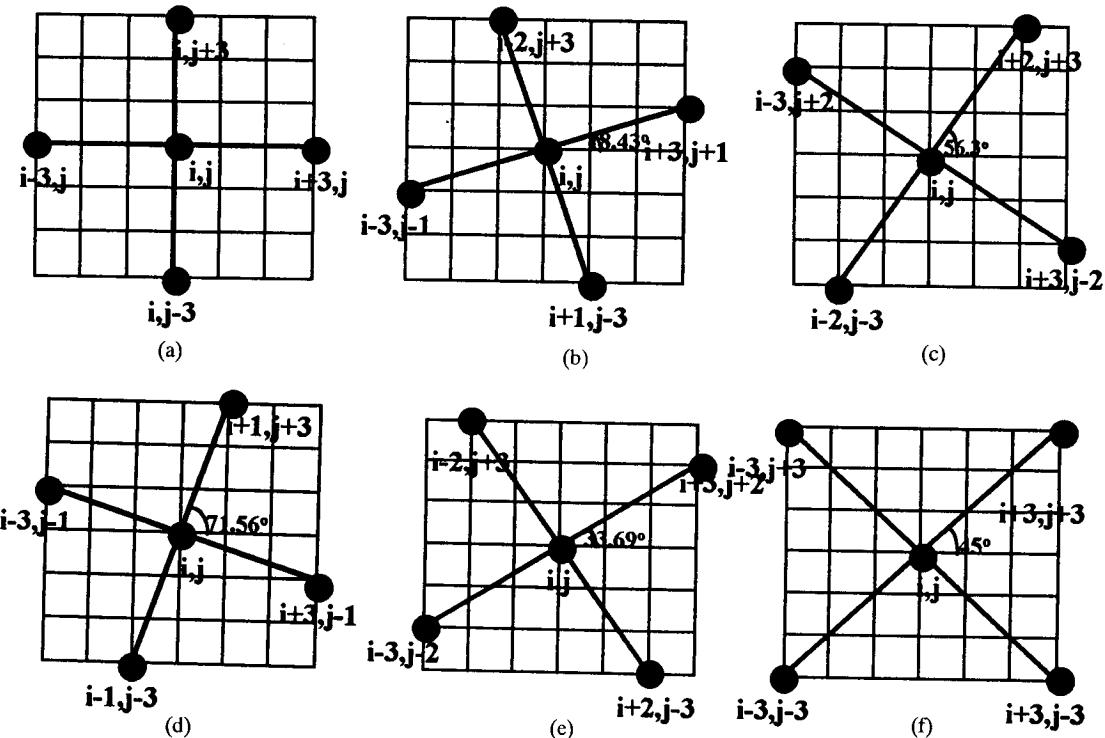


Fig. 3. Finite-difference stars of the Laplacian operator in 49 point weighted average method. (a) five point stars with grid distance of 3Δ , (b) five point stars with grid distance of $\sqrt{10}\Delta$ in the 18.43° rotated coordinate system, (c) five point stars with grid distance of $\sqrt{13}\Delta$ in the 33.69° rotated coordinate system, (d) five point stars with grid distance of $\sqrt{18}\Delta$ in the 45° rotated coordinate system, (e) five point stars with grid distance of $\sqrt{13}\Delta$ in the 56.30° rotated coordinate system, (f) five point stars with grid distance of 10Δ in the 71.56° rotated coordinate system.

이론적 배경

1. 가중평균법을 이용한 유한 차분식 전개

음원이 없는 경우 주파수 영역에서의 음향 파동방정식은

$$\frac{\omega^2}{v^2} u + \nabla^2 u = 0 \quad (1)$$

이다. 여기서 u 는 입력 파동장이며 ω 는 각속도이고 v 는 매질의 속도이다. (x, z) 영역의 2차원 파동방정식은 임의의 점 (i, j) 에 인접한 $(i-1, j)$, $(i, j+1)$, (i, j) , $(i, j-1)$, $(i+1, j)$ 의 5점 (Fig. 1 (a))을 이용하여 2차근사 차분식으로 나타내면

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta z^2} + \frac{\omega^2}{v^2} u_{i,j} = 0 \quad (2)$$

이다. 여기서 Δx 및 Δz 는 격자 간격이고 $u_{i,j}$ 는 $x_i = x_0 +$

$(i-1)\Delta x$ 와 $z_j = z_0 + (j-1)\Delta z$ 에서 압력장이다. 식 (2)로 구한 파동장에서는 최소 파장당 격자수가 13개 이상이 되어야만 정확한 파동장을 구할 수 있다 (Alfort *et al.*, 1974). 이와 같이 많은 격자수 때문에 크고 복잡한 지층 모델에 대한 파동장 계산에는 많은 수치 계산량과 컴퓨터 기억용량이 필요하게 된다. 따라서 더 적은 격자수를 사용하여 수치분산을 줄이면서 정확도를 유지하기 위한 방법으로서 Fig. 1과 같이 기존 5점 좌표계를 0° 및 45° 회전한 9점 가중평균법 (Jo *et al.*, 1996) 과 Fig. 2와 같이 0° , 22.5° , 45° , 62.5° 회전한 25점 가중평균법 (손희정, 1996)이 있다. 본 연구에서는 위 두가지 가중평균법과 더불어 Fig. 3과 같이 좌표계를 0° , 11.25° , 22.5° , 33.75° , 45° , 56.25° , 67.5° , 78.25° 회전한 49점 가중평균법에 대해 고찰한다.

식 (1)의 둘째항 즉 Laplacian 항에 대해 위 회전 좌표계를 이용하여 구한 차분식은

$$\nabla^2 U = r_1 \nabla_{(0^\circ, 9)}^2 + r_2 \nabla_{(45^\circ, 9)}^2 U \quad (3)$$

$$\begin{aligned}
& +r_3 \nabla_{(0^\circ, 25)}^2 u + r_4 \nabla_{(25.56^\circ, 25)}^2 u + r_5 \nabla_{(45^\circ, 25)}^2 u + r_6 \nabla_{(63.44^\circ, 25)}^2 u \\
& + r_7 \nabla_{(0^\circ, 49)}^2 u + r_8 \nabla_{(18.43^\circ, 49)}^2 u + r_9 \nabla_{(33.49^\circ, 49)}^2 u + r_{10} \nabla_{(45^\circ, 49)}^2 u \\
& + r_{11} \nabla_{(56.30^\circ, 49)}^2 u + r_{12} \nabla_{(71.56^\circ, 49)}^2 u
\end{aligned}$$

이다. 여기서 $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, r_9, r_{10}, r_{11}, r_{12}$ 는 49점 가중평균법에 의해 차분식을 전개하였을 때 Laplacian 항의 가중평균계수이다. 그리고 위식에 있어서의 각 ∇^2 항은

$$\begin{aligned}
\nabla_{(0^\circ, 9)}^2 u|_{(x, z)} &= \frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - 4u_{ij+1} + u_{ij-1} + u_{ij-1}}{\Delta^2} \\
\nabla_{(45^\circ, 9)}^2 u|_{(x, z)} &= \frac{u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j-1} - 4u_{ij} + u_{ij+1} + u_{ij-1}}{(\sqrt{2}\Delta)^2} \\
\nabla_{(0^\circ, 25)}^2 u|_{(x, z)} &= \frac{u_{ij+2} + u_{ij-2} - 4u_{ij} + u_{ij+1} + u_{ij-1}}{(2\Delta)^2} \\
\nabla_{(45^\circ, 25)}^2 u|_{(x, z)} &= \frac{u_{i-1,j+2} + u_{i+1,j-2} - 4u_{ij} + u_{ij+2} + u_{ij-2}}{(18\Delta)} \\
\nabla_{(45^\circ, 25)}^2 u|_{(x, z)} &= \frac{u_{i-1,j+2} + u_{i-1,j-2} - 4u_{ij} + u_{ij+1} + u_{ij-1}}{(\sqrt{5}\Delta)^2} \\
\nabla_{(63.44^\circ, 25)}^2 u|_{(x, z)} &= \frac{u_{j-2,j+1} + u_{i+2,j-1} - 4u_{ij} + u_{ij+1} + u_{ij-1}}{(\sqrt{5}\Delta)^2} \\
\nabla_{(0^\circ, 49)}^2 u|_{(x, y)} &= \frac{u_{ij+3} + u_{ij-3} - 4u_{ij} + u_{ij+1} + u_{ij-1}}{(3\Delta)^2} \\
\nabla_{(45^\circ, 49)}^2 u|_{(x, y)} &= \frac{u_{i-3,j+3} + u_{i+3,j-3} - 4u_{ij} + u_{ij+1} + u_{ij-1}}{(\sqrt{18}\Delta)^2} \\
\nabla_{(33.49^\circ, 49)}^2 u|_{(x, y)} &= \frac{u_{i-2,j+3} + u_{i+2,j-3} - 4u_{ij} + u_{ij+1} + u_{ij-1}}{(\sqrt{3}\Delta)^2} \\
\nabla_{(56.30^\circ, 49)}^2 u|_{(x, y)} &= \frac{u_{i+2,j+3} + u_{i-2,j-3} - 4u_{ij} + u_{ij+1} + u_{ij-1}}{(\sqrt{13}\Delta)^2} \\
\nabla_{(18.43^\circ, 49)}^2 u|_{(x, z)} &= \frac{u_{i-1,j+3} + u_{j+1,j-3} - 4u_{ij} + u_{ij+1} + u_{ij-1}}{(\sqrt{10}\Delta)^2} \\
\nabla_{(71.56^\circ, 49)}^2 u|_{(x, z)} &= \frac{u_{i+1,j+3} + u_{i-1,j-3} - 4u_{ij} + u_{ij+1} + u_{ij-1}}{(\sqrt{10}\Delta)^2}
\end{aligned}$$

이며, $\Delta = \Delta_x = \Delta_z$ 이다.

그리고 식 (1)의 첫째항 즉 질량 가속도항은 이에 가중 평균값을 적용하기 위해 질량행렬 (u)을 집중 질량행렬 (lumped mass matrix)과 일치행렬 (consistent mass matrix)의 선형결합 (Marfurt, 1984)으로 표현하면 $u = ru^* + (1-\gamma)[u]$ 이며 이식을 식 (1)에 대입하면

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \gamma \frac{\omega^2}{v^2} u^* + (1-r) \frac{\omega^2}{v^2} [u] = 0 \quad (4)$$

이다. 여기서 u^* 은 점배치항이며 $[u]$ 는 평균항이고 γ 는 점배치항과 평균항에 의해 질량 가속도항을 결정 해주는 인자이다. 점배치항에 49점 가중평균치를 적용하면

$$\begin{aligned}
[u^*]_{ij} &= \gamma u^*_{ij} + (1-\gamma)[u_{ij}] \\
&= au_{ij} + b(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{ij-1}) \\
&\quad + c(u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j-1} + u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j-1}) \\
&\quad + d(u_{ij+2} + u_{ij-2} + u_{i+2,j} + u_{i-2,j}) \\
&\quad + e(u_{i-2,j+2} + u_{i+2,j-2} + u_{i+2,j+2} + u_{i-2,j-2}) \\
&\quad + f(u_{i-1,j+2} + u_{i+1,j-2} + u_{i+2,j+1} + u_{i-2,j-1}) \\
&\quad + g(u_{i-2,j+1} + u_{i+2,j-1} + u_{i+1,j+2} + u_{i-1,j-2}) \\
&\quad + h(u_{ij+3} + u_{ij-3} + u_{i+3,j} + u_{i-3,j}) \\
&\quad + i(u_{i-2,j+3} + u_{i+2,j-3} + u_{i+3,j+2} + u_{i-3,j-2}) \\
&\quad + j(u_{i-3,j+3} + u_{i+3,j-3} + u_{i+3,j+2} + u_{i-3,j-2}) \\
&\quad + k(u_{i+2,j+3} + u_{i-2,j-3} + u_{i+3,j-2} + u_{i-3,j+2}) \\
&\quad + l(u_{i-1,j+3} + u_{i+1,j-3} + u_{i+3,j+1} + u_{i-3,j-1}) \\
&\quad + m(u_{i+1,j+3} + u_{i-1,j-3} + u_{i-3,j+1} + u_{i+3,j-1})
\end{aligned} \quad (5)$$

이다. 여기서 a, b, \dots, l, m 은 49점 가중평균법에 의한 질량 가속도항의 가중평균 계수이다. 가중평균된 Laplacian 항식 (3) 와 질량 가속도항 식 (5)를 식 (1)에 대입한 가중 평균된 새로운 차분식은

$$\begin{aligned}
& r_1 \frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - 4u_{ij} + u_{ij+1} + u_{ij-1}}{\Delta^2} \\
& + r_2 \frac{u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j-1} - 4u_{ij} + u_{ij+1} + u_{ij-1}}{(\sqrt{2}\Delta)^2} \\
& + r_3 \frac{u_{ij+2} + u_{ij-2} - 4u_{ij} + u_{ij+1} + u_{ij-1}}{(\sqrt{4}\Delta)^2} \\
& + r_4 \frac{u_{i-2,j+2} + u_{i+2,j-2} - 4u_{ij} + u_{ij+1} + u_{ij-1}}{(\sqrt{8}\Delta)^2} \\
& + r_5 \frac{u_{i-1,j+2} + u_{i+1,j-2} - 4u_{ij} + u_{ij+1} + u_{ij-1}}{(\sqrt{5}\Delta)^2} \\
& + r_6 \frac{u_{i-2,j+1} + u_{i+2,j-1} - 4u_{ij} + u_{ij+1} + u_{ij-1}}{(\sqrt{5}\Delta)^2} \\
& + r_7 \frac{u_{ij+3} + u_{ij-3} - 4u_{ij} + u_{ij+1} + u_{ij-1}}{(\sqrt{4}\Delta)^2}
\end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{u_{i-3,j+3} + u_{i+3,j-3} - 4u_{ij} + u_{i+30,j+3} + u_{i-3,j-3}}{(\sqrt{18}\Delta)^2} \\
& + \frac{u_{i-2,j+3} + u_{i+2,j-3} - 4u_{ij} + u_{i+3,j+2} + u_{i-3,j-2}}{(\sqrt{13}\Delta)^2} \\
& + \frac{u_{i+2,j+3} + u_{i-2,j-3} - 4u_{ij} + u_{i+3,j-2} + u_{i-3,j+2}}{(\sqrt{13}\Delta)^2} \\
& + \frac{u_{i-1,j+3} + u_{i+1,j-3} - 4u_{ij} + u_{i+3,j+1} + u_{i-3,j-1}}{(\sqrt{10}\Delta)^2} \\
& + \frac{u_{i+1,j+3} = u_{i-1,j-3} - 4u_{ij} + u_{i-3,j+1} + u_{i+3,j-1}}{(\sqrt{10}\Delta)^2} \\
& = + \frac{\omega^2}{v^2} [au_{ij}] \\
& + b(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1,j+1} + u_{i-1,j-1}) \\
& + c(u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j-1} + u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j-1}) \\
& + d(u_{i,j+2} + u_{i,j-2} + u_{i+2,j} + u_{i-2,j}) \\
& + e(u_{i-2,j+2} + u_{i+2,j-2} + u_{i+2,j+2} + u_{i-2,j-2}) \\
& + f(u_{i-1,j+2} + u_{i+1,j-2} + u_{i+2,j+1} + u_{i-2,j-1}) \\
& + g(u_{i-2,j+1} + u_{i+2,j-1} + u_{i+1,j+2} + u_{i-1,j-2}) \\
& + h(u_{i,j+3} + u_{i,j-3} + u_{i+3,j} + u_{i-3,j}) \\
& + i(u_{i-3,j+3} + u_{i+3,j-3} + u_{i+3,j+3} + u_{i-3,j-3}) \\
& + j(u_{i-2,j+3} + u_{i+2,j-3} + u_{i+3,j+2} + u_{i-3,j-2}) \\
& + k(u_{i+2,j+3} + u_{i-2,j-3} + u_{i+3,j-2} + u_{i-3,j+2}) \\
& + l(u_{i-1,j+3} + u_{i+1,j-3} + u_{i+3,j+1} + u_{i-3,j-1}) \\
& m(u_{i+1,j+3} + u_{i+1,j-3} + u_{i-3,j+1} + u_{i+3,i-1})
\end{aligned}$$

이다. 식 (6)의 u 대신 단순조화파 즉 $u = e^{-i(k_x x + k_z z)}$ 를 대입하고 $k_x = k \sin \theta$ 및 $k_z = k \cos \theta$ 을 대입하면 다음과 같은 새로운 파동방정식을 구할 수 있다.

$$\frac{\gamma^2}{v^2} = \frac{-B}{A^2 \Delta} \quad (7)$$

여기서

$$\begin{aligned}
A = & a + 2bcos(2\pi G sin \theta) + 2bcos(2\pi G cos \theta) \\
& + 4ccos(2\pi G sin \theta) cos(2\pi G cos \theta) \\
& + 2dcos(4\pi G sin \theta) + 2dcos(4\pi G cos \theta) \\
& + 4ecos(4\pi G sin \theta) cos(4\pi G cos \theta) \\
& + 2fcos(2\pi G sin \theta - 4\pi G cos \theta) + 2f(4\pi G sin \theta + 2\pi G cos \theta) \\
& + 2gcos(4\pi G sin \theta - 2\pi G cos \theta) + 2g(2\pi G sin \theta + 4\pi G cos \theta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2hcos(4\pi G sin \theta - 2\pi G cos \theta) + 2hcos(6\pi G cos \theta) \\
& + 4icos(6\pi G sin \theta) cos(6\pi G cos \theta) \\
& + 2jcos(4\pi G sin \theta - 6\pi G cos \theta) + 2jcos(6\pi G sin \theta + 4\pi G cos \theta) \\
& + 2kcos(4\pi G sin \theta + 6\pi G cos \theta) + 2kcos(6\pi G sin \theta + 4\pi G cos \theta) \\
& + 2lcos(2\pi G sin \theta - 6\pi G cos \theta) + 2lcos(6\pi G sin \theta + 2\pi G cos \theta) \\
& + 2mcos(2\pi G sin \theta + 6\pi G cos \theta) + 2mcos(6\pi G sin \theta - 2\pi G cos \theta)
\end{aligned}$$

이며

$$\begin{aligned}
B = & \gamma_1(2cos(2\pi G sin \theta) + 2cos(2\pi G cos \theta - 4)) \\
& + 2\gamma_2cos(2\pi G sin \theta)cos(2\pi G cos \theta) - 2\gamma_2 \\
& + 1/4\gamma_3(2cos(4\pi G sin \theta) + 2cos(4\pi G cos \theta) - 4) \\
& + \gamma_4/2cos(4\pi G sin \theta)cos(4\pi G cos \theta) - \gamma_4/2 \\
& + \gamma_5/5(2cos(4\pi G sin \theta - 2\pi G cos \theta) + 2cos(2\pi G sin \theta + 4\pi G cos \theta) - 4) \\
& + \gamma_6/5(2cos(2\pi G sin \theta - 4\pi G cos \theta) + 2cos(4\pi G sin \theta + 2\pi G cos \theta) - 4) \\
& + \gamma_7/9(2cos(6\pi G sin \theta) + 2cos(6\pi G sin \theta) + 2cos(6\pi G sin \theta - 4) \\
& + \gamma_8/18(4cos(6\pi G sin \theta)cos(6\pi G cos \theta) - 4) \\
& + \gamma_9/13(2cos(4\pi G sin \theta - 6\pi G cos \theta) + 2cos(6\pi G sin \theta + 4\pi G cos \theta) - 4) \\
& + \gamma_{10}/13(2cos(4\pi G sin \theta + 6\pi G cos \theta) + 2cos(6\pi G sin \theta - 4\pi G cos \theta) - 4) \\
& + \gamma_{11}/10(2cos(2\pi G sin \theta - 6\pi G cos \theta) + 2cos(6\pi G sin \theta + 2\pi G cos \theta) - 4) \\
& + \gamma_{12}/10(2cos(2\pi G sin \theta + 6\pi G cos \theta) + 2cos(6\pi G sin \theta - 2\pi G cos \theta) - 4)
\end{aligned}$$

이고 $G (= \Delta / \lambda)$ 는 최소파장당 격자수이다. 식 (7)의 $a \sim m$ 과 $\gamma_1 \sim \gamma_{12}$ 는 다음과 같이 결정한다.

위상속도 (phase velocity) ($V_{ph} = \frac{\gamma}{k}$)와 군속도 (group velocity) $V_g (= \frac{\partial \omega}{\partial k})$ 의 정규화된 값은

$$\frac{V_{ph}}{v_0} = \frac{1}{2\pi G} \sqrt{-\frac{B}{A}} \quad (8)$$

$$\frac{V_g}{v_0} = \frac{1}{4\pi G} \frac{V_0}{V_{ph}} \frac{AB' - BA'}{A^2} \quad (9)$$

이다. 여기서 A' 와 B' 는 각각 파수 (wave number)에 대한 A 와 B 의 미분치이며 v_0 는 매질의 속도이다. 식(8)의 우변 즉 정규화된 위상속도를 1로 놓고 25개의 가중 평균

Table 1. The coefficients for 9, 25 and 49 points weighted average method determined by steepest descent method.

| 5 points | | 9 points | |
|--|-----------|---|-------------------------|
| Laplacian term | Mass term | Laplacian term | Mass term |
| $rl=1$ | $a=1$ | $rl=0.64956, r2=0.35035$ | $a=0.69505, b=0.06175,$ |
| 25 points | | | |
| Laplacian term | | Mass term | |
| $rl=0.15593, r2=0.17976, r3=0.25895,$ $r4=0.04021, r5=0.18257, r6=0.18258,$ | | $a=0.37674, b=0.10199, c=0.04578, d=0.00351,$ $e=0.00034, f=0.00211, g=0.00211$ | |
| 49 points | | | |
| $rl=0.014802, r2=0.031149, r3=0.119221, r4=0.079367,$ $r5=0.090665, r6=0.089226, r7=0.165810, r8=0.039740,$ $r9=0.051063, r10=0.07767, r11=0.115405, r12=0.128538$ | | $a=0.196810, b=0.097910, c=0.063107, d=0.019470,$ $e=0.006955, f=0.013933, g=0.016162, h=0.002189,$ $i=0.000381, j=0.0011370, k=0.000542, l=0.0016680,$ $m=0.000583$ | |

계수를

$$(6\pi G \sin \theta - 2\pi G \cos \theta))$$

$$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 + r_6 + r_7 + r_8 + r_9 + r_{10} + r_{11} + r_{12} = 1, \\ a + 4b + 4c + 4d + 4e + 4f + 4g + 4h + 4i + 4j + 4k + 4l + 4m = 1 \quad (10)$$

이라 정의하면 식 (8)은

$$4\pi^2 G^2 A + B = 0 \quad (11)$$

이다. 식 (10)을 (11)에 대입하면

$$4\pi^2 G^2 A + BB = 4 \quad (12)$$

이다. 여기서

$$\begin{aligned} BB &= r_1(2\cos(2\pi G \sin \theta) + 2\cos(2\pi G \cos \theta)) \\ &+ r_2\cos(2+2\pi G \sin \theta)\cos(2\pi G \cos \theta) \\ &+ r_3(3+0.5\cos(4\pi G \sin \theta) + 0.5\cos(4\pi G \cos \theta)) \\ &+ r_4(3.5+0.5\cos(4\pi G \sin \theta)\cos(4\pi G \cos \theta)) \\ &+ r_5(16/5+2/5\cos(4\pi G \sin \theta-2\pi G \cos \theta) + 2/5\cos(2\pi G \sin \theta+4\pi G \cos \theta)) \\ &+ r_6(16/5+2/5\cos(2\pi G \sin \theta-4\pi G \cos \theta) + 2/5\cos(4\pi G \sin \theta+2\pi G \cos \theta)) \\ &+ r_7(32/9+2/9\cos(6\pi G \sin \theta+2/9\cos(6\pi G \sin \theta)+2\cos(6\pi G \sin \theta)) \\ &+ r_8(68/18+4/18\cos(6\pi G \sin \theta)\cos(6\pi G \cos \theta)) \\ &+ r_9(48/13+2/13\cos(4\pi G \sin \theta-6\pi G \cos \theta)+2/13\cos(6\pi G \sin \theta+4\pi G \cos \theta)) \\ &+ r_{10}(48/13+2/13\cos(4\pi G \sin \theta+6\pi G \cos \theta)+2/13\cos(6\pi G \sin \theta-4\pi G \cos \theta)) \\ &+ r_{11}(36/10+2/10\cos(2\pi G \sin \theta-6\pi G \cos \theta+2/10\cos(6\pi G \sin \theta+2\pi G \cos \theta)) \\ &+ r_{12}(36/10+2/10\cos(2\pi G \sin \theta+6\pi G \cos \theta)+2/10\cos(6\pi G \sin \theta-4\pi G \cos \theta)) \end{aligned}$$

이다.

A와 BB는 과장당 격자수의 함수이므로 식 (12)을 행렬로 표시하면

$$\left[\begin{array}{ccccccccc|c} a_1 & \dots & m_1 & rl_1 & \dots & rl2_1 & & & 4 \\ a_2 & \dots & m_2 & rl_2 & \dots & rl2_2 & & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ a_{n-1} & \dots & m_{n-1} & rl_{n-1} & \dots & rl2_{n-1} & & & \vdots \\ a_n & \dots & m_n & rl_n & \dots & rl2_n & & & \vdots \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} a \\ \vdots \\ m \\ rl \\ \vdots \\ rl2 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 4 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right] \quad (13)$$

이다. 위식에 의해 식 (7)의 각 요소를 결정한다. 식 (7)의 각 요소들은 격자수와 전파각에 따라 결정되며 격자간격을 $10m$ 씩, 전파각을 2도씩 증가할 때 (2000×25) 의 크기를 갖는 over determined 행렬이 된다. 식 (13)에 대한 해를 SVD (singular value decomposition)를 이용하여 구한 결과는 Table 1과 같다.

주파수영역에서 격자분산 고찰

격자분산 분석은 차분식에 의해 구해진 과동방정식의 해의 타당성을 확인하는데 매우 중요하다. 격자 분산의 정도는 음원의 과장당 격자수에 의해 결정된다. 식 (1)에서 u 를 평면 조화파로 가정할 때 식 (1)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \left(= \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta^2} \right) = -\frac{4}{\Delta^2} \sin^2 \frac{k_x \Delta}{2} e^{-ik_x(x+\Delta)} e^{-ik_x z} \quad (14)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z^2} \left(= \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta^2} \right) = -\frac{4}{\Delta^2} \sin^2 \frac{k_z \Delta}{2} e^{-ik_z(x+\Delta)} e^{-ik_z z} \quad (15)$$

이된다. 식 (14)와 (15)를 식 (1)에 대입하면

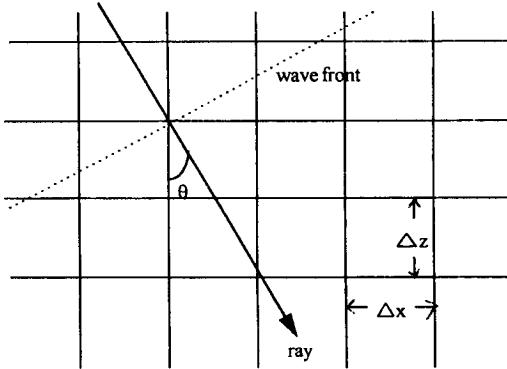
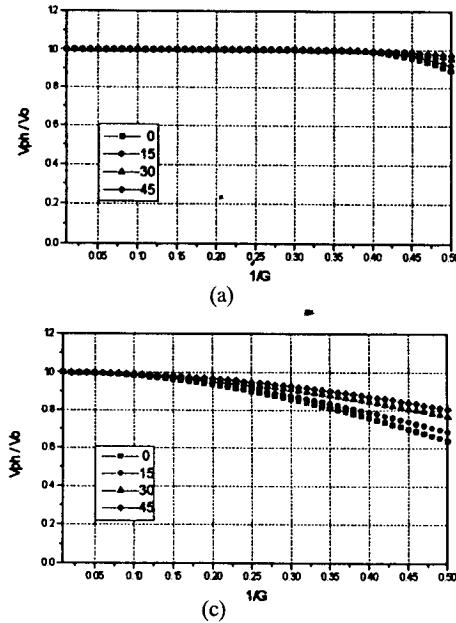
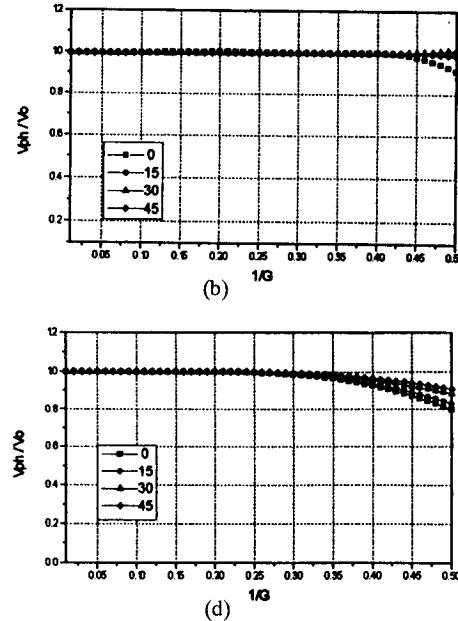
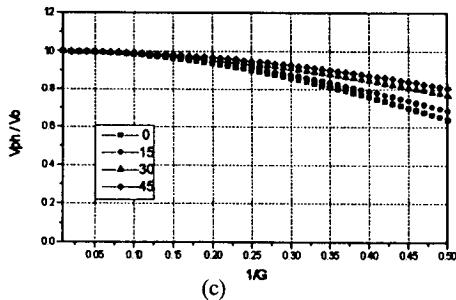


Fig. 4. Plane wave propagating at angle θ to the Z axis of a numerical mesh (after Mafurt, 1984).



(a)

(b)
(d)

(c)

Fig. 5. Normalized phase velocity curves for finite-difference solution of 2D scalar wave equation in frequency domain using (a) conventional 5 points finite difference stars, (b) 9 points weighted average method, (c) 25 points weighted average method and (d) using 49 points weighted average method.

$$\frac{\omega^2}{v^2} e^{-i(k_x x + k_z z)} = -\frac{4}{\Delta^2} \sin^2 \frac{k_x \Delta}{2} e^{-ik_x(x+\Delta)} e^{-ik_z z} - \frac{4}{\Delta^2} \sin^2 \frac{k_z \Delta}{2} e^{-ik_x(x+\Delta)} e^{-ik_z z} \quad (16)$$

이다. 여기서 k_x 는 x방향에 대한 파수 즉 $k_x = k \sin \theta$ 이고 k_z 는 z방향에 대한 파수 즉 $k_z = k \cos \theta$ 이며, k 는 파수 즉 $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ 이다. 그리고 파장당 격자수 G 를 $\frac{\Delta}{\lambda}$ 로 할때 식 (16)에서 정규화된 위상속도를 구하면

$$\frac{V_{ph}}{v} = \frac{1}{\pi/G} [\sin^2(\pi G \sin \theta) + \sin^2(\pi G \cos \theta)]^{\frac{1}{2}} \quad (17)$$

이다. θ 는 z축과 파의 진행방향과 이루는 각도 (Fig. 4 참조)이다. 그리고 정규화된 군속도는 식 (16)에 k 에 대한 편미분을 취하고 정리하면

$$\frac{V_g}{v} = \frac{\sin \theta \sin \theta (2\pi G \sin \theta) + \cos \theta \sin (2\pi G \cos \theta)}{2[\sin^2(\pi G \sin \theta) + \sin^2(\pi G \cos \theta)]^{\frac{1}{2}}} \quad (18)$$

이다.

식 (17)와 식 (18)에 의한 주파수-공간영역에서의 스칼라 파동방정식의 유한차분법에 대한 분산곡선을 Fig. 5 (a)와 Fig. 6 (a) 나타내었다. 본도는 기존 5점을 이용

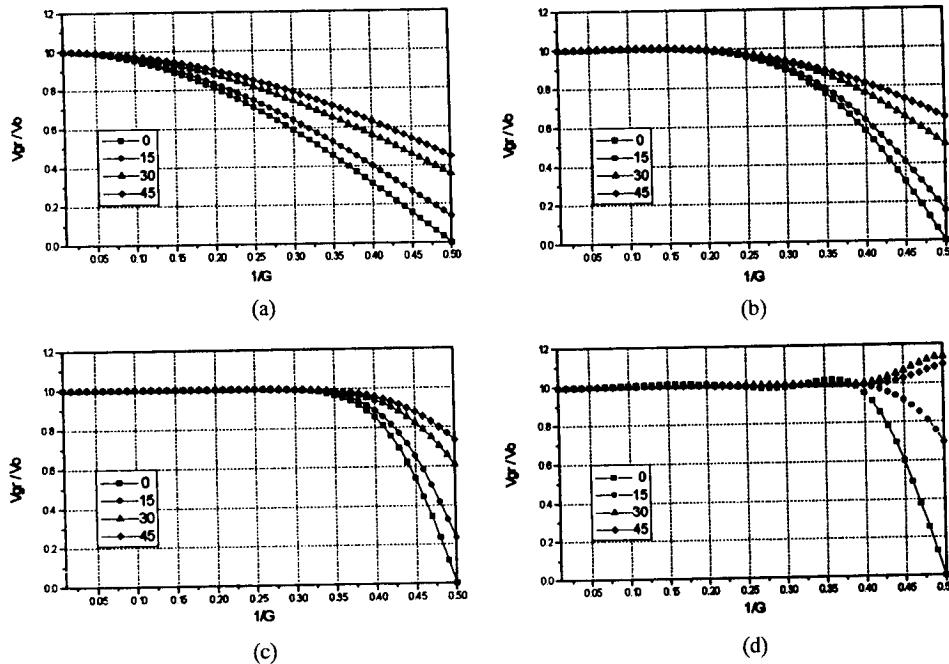


Fig. 6. Normalized group velocity curves for finite-difference solution of 2D scalar wave equation in frequency domain, using (a) conventional 5 points finite difference stars (b) using 9 points weighted average method, (b) 25 points weighted average method and (d) 49 points weighted average method.

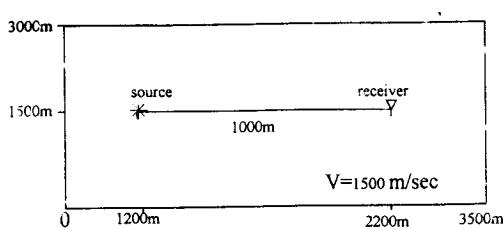


Fig. 7. Layer model.

한 차분식의 경우 정규화된 위상속도와 군속도의 오차가 1% 이하를 유지하려면 최소파장당 격자수를 최소한 13개 이상으로 해야함을 보여준다. Fig. 5 (b)- (d)와 Fig. 6 (b)- (d)는 가중평균법을 이용하여 차분식을 전개했을시의 정규화된 위상속도와 군속도 곡선을 나타낸 것이다. Fig. 5 (b) 와 Fig. 6 (b)는 9점 가중평균법에 의한 것으로서 최소파장당 격자수가 5개이상 필요함을 보여주고, Fig. 5 (c)와 Fig. 6 (c)는 25점 가중평균법에 의한 것으로 격자수가 3개이상 필요함을 보여준다. Fig. 5 (d) 와 Fig. 6 (d)는 49점 가중평균법에 의한 것으로서 격자수가 2.5개정도 필요함을 나타낸다. 이는 지금까지 연구된 것 중 주파수 영역에서 가장 적은 격자수를 이용할 수 있음을 보여 준다.

전산모형 실험

49점 가중평균법에 대한 정확성과 이에 대한 신뢰성을 검증하기 위해 전산모형 실험을 실시하였다. 본 실험에서 사용한 모형지층은 Fig. 7과 같이 속도가 1500 m/s인 균질·동방 모델이다. 실제 지하 지층은 반무한 매질이나 전산모형 실험에서는 유한 단면을 갖는 모델을 설정하기 때문에 단면에서 인위적인 반사파가 생긴다. 본 실험에서는 이러한 모델 경계면에서 발생하는 인위적인 반사파의 영향을 받지 않는 상태에서 최소 파장당 격자수에 따른 파동장의 변화를 관찰하기 위해 송신기와 수신기를 매질의 중앙에 위치시키고 직접파만을 측정하였다. Fig. 5에서 보는 바와 같이 오차 1%이하의 파동장을 구하기 위해 요구되는 격자수, 컴퓨터 기억용량 및 계산시간을 기준 5점 유한차분법을 "1"로 기준으로 한 상대적인 비교는 Table 2와 같다.

오차 1% 이하의 파동장을 구하기 위해서는 Table 2에서 같이 기준 5점의 경우 격자수가 13개, 9점 가중평균법의 경우 5개, 25점 가중평균법의 경우 3개 그리고 49점 가중평균법의 경우 2.5개가 필요함을 알 수 있다. 이것은 유한차분법을 이용하여 파동장을 구할 때 격자수에 따라 그 계산량이 결정되므로 파장당 격자수가 2.5개일때 x방

Table 2. Comparison between weighted average methods and conventional difference method.

| | Grid points per wave length | Computer core memory | Computing time |
|----------------------------|-----------------------------|----------------------|----------------|
| 5 points | 13 | $(13/13)^3$ | $(13/13)^4$ |
| 9 points weighted average | 5 | $(5/13)^3$ | $(5/13)^4$ |
| 25 points weighted average | 3 | $(3/13)^3$ | $(3/13)^4$ |
| 49 points weighted average | 2.5 | $(2.5/13)^3$ | $(2.5/13)^4$ |

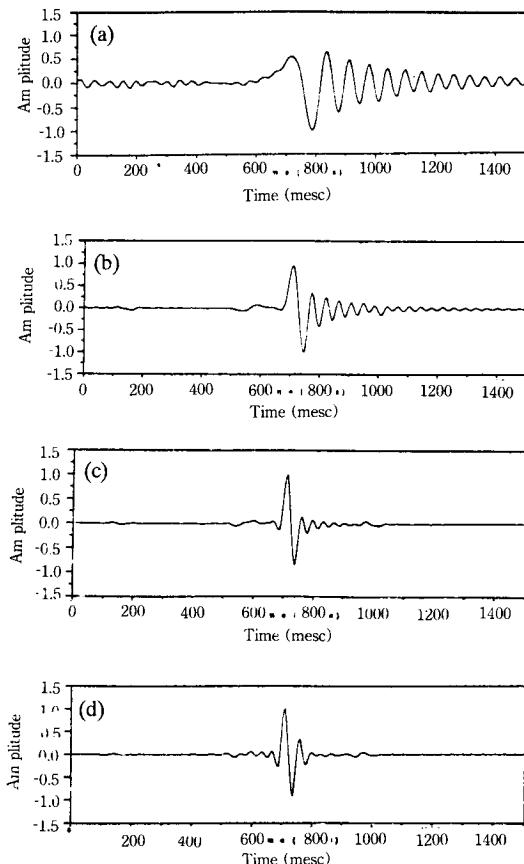


Fig. 8. Synthetic seismograms generated by the finite difference method using (a) the conventional five points difference stars, (b) 9 points finite difference stars of Jo *et al.* (1996), (c) 25 points finite difference stars of Sohn *et al.* (1996) and (d) 49 points finite difference stars of this study.

향 격자수와 z방향 격자수의 제곱으로 결정되는 복소임피던스 행렬 (complex impedance matrix)의 크기는 기존의 5점 유한차분법보다 $(2.5/13)^2$ 만큼 작아짐으로 계산량은 $(2.5/13)^4$ 으로 줄일 수 있음을 의미한다 (Pratt, Worthington, 1990). Fig. 8은 최소 파장당 격자수를 2.5개로 하여 각각의 경우 파동장을 구해 그에 따른 파동장의 분산정도를 살펴본 결과이다. Fig. 8(a)는 기존의

5점격자를 이용하여 구한 파동장이고 Fig. 8(b)는 9점 가중평균법에 의한 가중계수와 격자수를 2.5개로 하여 구한 파동장이며 Fig. 8(c)는 25점 가중평균법에 의한 가중평균계수와 격자수를 2.5개로 하여 구한 파동장이며 Fig. 8(d)는 본 연구에서 구한 가중평균계수와 격자수를 2.5개로 하여 구한 파동장이다. 본도에서 보듯이 가중평균법을 적용하지 않은 상태에서 격자수를 줄이게 되면 파동장의 분산이 커짐을 알 수 있고 가중평균에 이용되는 격자점을 증가시킬수록 파형의 분산이 작아짐을 알 수 있다.

결 론

본 연구에서는 주파수 영역에서 음향 파동방정식의 파동장을 구하는데 있어서 새로운 49점 가중평균법을 연구하였으며 전산 모형 실험 결과 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

1. 49점 가중평균법에 의하면 기존의 5점 차분식을 이용하는것에 비해 계산시간이 $(2.5/13)^3$ 으로, 컴퓨터 기억 용량이 $(2.5/13)^4$ 으로 감소한다.

2. 최소 파장당 격자수는 기존 5점의 경우 13개, 9점 가중평균법의 경우 5개 그리고 25점 가중평균법의 경우 3개였지만 본 연구에서는 2.5개로 줄일 수 있었다. 이는 지금 까지 연구된것 중 가장 적은 격자수이다.

3. 이와 같이 적은 격자수를 사용해도 더 많은 격자수를 이용할 때와 거의 같은 정확성을 확보할 수 있었다.

사 사

본 연구를 수행하는데 있어서 조언과 컴퓨터 사용을 허락해 준 한국자원연구소의 신 창수 박사와 유익한 지적을 해주신 심사위원께 감사를 드립니다.

참고문현

- 손희정 (1996) 주파수 영역에서 25점 유한차분격자를 이용한 스칼라 파동 방정식 모델링, 석사학위 논문, 한양대학교.
Alford, R. M., Kelly, K. R., and Boor, D. M. (1974) Ac-

- curacy of finite-difference modeling of the acoustic wave equation: *Geophysics*, v. 39, p. 834-842.
- Bamberger, A., Chavent, G., and Lailly, P. (1980) Etude de schemas numeriques pour les equations de l'elastodynamique lineaire: *Rapports de recherche* 41, INRIA.
- Belytschko, T., and Mullen, R. (1978) On dispersive properties of finite element solutions; in Miklowitz and Achenbach, Eds., *Modern problems in elastic wave propagation*: New York, John Wiley and Sons.
- Dablain, M. A. (1986) The application of high-order differenceing to the scalar wave equation: *Geophysics*, v. 51, p. 54-66.
- Jo, C. H., Shin, C. S., and Suh, J. H. (1996) An optimal 9 point finite difference frequency-space 2D acoustic wave extrapolator: *Geophysics*, v. 61, p. 529-537.
- Kelly K. R., Ward, R. W., Treitel Sven, and Alfore, R. M. (1974) Synthetic seismograms: A finite-difference approach, *Geophysics*, v. 41, p. 2-27.
- Kosloff, D. D. and Baysal, E. (1982) Forward modeling by a fourier method: *Geophysics*, v. 47, p. 1402-1412.
- Marfurt, K. J. (1984) Accuracy of finite difference and finite element modeling of the scalar and elastic wave equations: *Geophysics*, v. 49, p. 533-549.
- Pratt, R. G. and Worthington, M. H. (1990) Inverse theory applied to multi-source cross-hole toography Part I: Acoustic-equation method: *Geophy. Prosp.*, v. 38, p. 287-310.

1996년 2월 28일 원고접수