

한국지형에서의 랜덤 프랙탈과 멀티프랙탈구조의 연구

김경식* · 공영세**

Studies on Random Fractal and Multifractal Structures in Korean Topography

Kyungsik Kim* and Young Sae Kong**

ABSTRACT : In Korean topography the behaviors of random fractals and multifractality are analytically and numerically studied on the mountain heights shown between 128~129°E and 37~38°N. The phase transitions on the fractal structure are approximately found at the critical length $N_c=2000$ m from the values of standard deviations that it varies with both the longitudinal and latitudinal lengths. In the multifractal structure we assume that the mountain heights divided by the intervals of 20 m are located on the horizontal plane in two dimensional square lattice, and estimate the values of the generalized dimension and the scaling exponents by using the the box counting method for the three cases of square area ($1 \times 1 \text{ km}^2$, $2 \times 2 \text{ km}^2$, $4 \times 4 \text{ km}^2$).

서 론

프랙탈은 Mandelbrot(1983)에 의해서 도입된 이후에 자체 회피 랜덤워크, 퍼콜레이션 클러스터, 확산 한계 움직임, 와류현상, 케오스운동 등과 같은 많은 분야에 광범위하게 적용되어서 프랙탈(fractals)과 멀티프랙탈(multifractals)구조의 거동에 관한 연구가 진행되어왔다(Halsey *et al.*, 1986; Paladin *et al.*, 1987; Lee, 1988; Amitrano, 1986; Tel, 1988). 프랙탈은 크게 결정적 프랙탈(deterministic fractals)과 랜덤 프랙탈(random fractals 혹은 self-affine fractals)로 분류된다. 전자는 Koch곡선, Cantor set 등과 같이 자체 유사 구조를 갖는 프랙탈이며, 후자는 프랙탈 구조가 복잡한 퍼콜레이션 클러스터, 구름의 이동현상, 해안선 및 산악지형 등과 같은 랜덤 구조를 갖는 프랙탈이다(Vicsek, 1988).

1차원의 프랙탈 격자상에서 입자들의 평균한 평균거리 \bar{x} 가 $\bar{x} \sim N^v$ 으로 주어진다하면 이때 랜덤 워크의 프랙탈 차원 D_w 와 지수 v 의 관계는 $v = \frac{1}{D_w}$ 이다. 그리고, 가장 간

단한 고전적인 1차원 랜덤 워크 모델에서 같은 시간에 일정한 걸음을 하는 수행자가 N 걸음 후에 도달하는 평균거리 L 에 대한 축척지수는 $v = \frac{1}{2}$ 으로 주어진다. 프랙탈 차원

D_f 와 holder차원 D_h , 그리고 스펙트럼 차원 D_s 와 랜덤워크 차원 D_w 와의 관계는 각각 $D_f = 1 - D_h$, $D_w = 2D_f/D_s$ 으로 표현된다(Alexander *et al.*, 1982; Rammell *et al.*, 1983). 기하학적 차원 $D \geq 2$ 인 경우에는 랜덤 프랙탈 구조를 상자 계산방법(box counting method)을 사용한 멀티 프랙탈 구조로 확대시킬 수 있다. 특히 2차원의 네모격자인 경우에는 전체면적을 면적이 $\epsilon \times \epsilon$ 인 상자로 나누어서 각각의 상자가 갖는 랜덤한 확률을 도입하면 무한히 많은 특이값을 갖는 확률의 모우먼트들에 대해서 멀티 프랙탈 구조의 일반화 차원 D_q 와 축척지수 α_q, f_q 들이 계산될 수 있다(Halsey, 1986; Vicsek, 1992). 그리고 모우먼트 축척지수들이 특이점의 축척 확률분포에 관계되는 멀티 프랙탈 구조의 개념은 Paladi, Vulpiani (1987)에 의하여 도입되었으며, Halsey(1986), Benzi(1984), Tel(1988) 등에 의해서 케오스운동에서의 서클본뜨기, 프랙탈모형 등에 적용시켜서 논의되어왔다.

본 논문에서는 한국의 산악지형의 경도 128~129°, 위도 37~38°에서 랜덤 프랙탈과 멀티 프랙탈구조의 거동을 수치해석적으로 연구하였다. 제2절에서는 경도를 x 축, 위

* 부경대학교 물리학과 (Dept. of Physics, Pukyong Nat'l Univ., Pusan 608-737, Korea)

** 부경대학교 해양공학부 (School of Ocean Engineering, Pukyong Nat'l Univ., Pusan 608-737, Korea)

도를 y축으로 하여 100 m 간격으로 나눈 1200×1200의 네모 격자상에서 x축, y축과 산악지형의 고도들을 각각 (x, z_x) , (y, z_y) 점들로 나눈 후에 두 경우에 각각의 표준편차가 $x \sim N^{\nu_x}$, $z_x \sim N^{\nu_{z_x}}$ 와 $y \sim N^{\nu_y}$, $z_y \sim N^{\nu_{z_y}}$ 으로 주어질 때 프랙탈차원의 지수 $\nu_x, \nu_{z_x}, \nu_y, \nu_{z_y}$ 을 구하여 상전이가 일어나는 임계길이를 비교하여 고찰한다. 그리고 멀티 프랙탈 차원은 가장 분포가 많은 높이의 영역을 선택하여 상자 계산방법을 택하여 일반화차원 $D_0, D_{x,q}$ 와 축척지수 $\alpha_{x,q}, f_q$ 등의 관계를 제3절에서 논의한다. 마지막으로 제4절에서는 한국 산악지형의 프랙탈차원 구조와 멀티 프랙탈차원의 결과를 고찰한다.

한국 산악지형의 프랙탈차원구조

이절에서는 경도 128~129°, 위도 37~38°의 한국 산악지형에서 랜덤 프랙탈 구조의 거동을 수치해석적으로 논의한다. Fig. 1과 같은 영역에서 경도를 x축, 위도를 y축으로 간주하여 각 x, y축에 대해서 단위길이 $l=100$ m 간격으로 나눈 $N_x \times N_y$ 의 네모 격자를 도입한다. x축과 y축에 대한 각각의 측정위치를 x_i, y_i 라 하고 산악지형의 고도를 $z_{\alpha i}, z_{\beta i}$ 라 하면 두 종류의 측정위치의 셋트는 $\{(x_i, z_{\alpha i})\}, \{(y_i, z_{\beta i})\}$ 으로 주어진다. Fig. 2와 같이 x와 z_x 의 좌표계와 y와 z_y 좌표계에서 단위길이 $l=1$ 으로 축척하여 측정위치를 측정한다. 실제로 x축, y축 그리고 고도에 대한 표준편차 X, Y, Z_x 및 Z_y 는 다음과 같은 관계식으로 된다.

$$X = \left[\frac{1}{N_x} \sum_{i=1}^{N_x} (x_i - \bar{x})^2 \right]^{\frac{1}{2}} \sim N_x^{\nu_x} \tag{1}$$

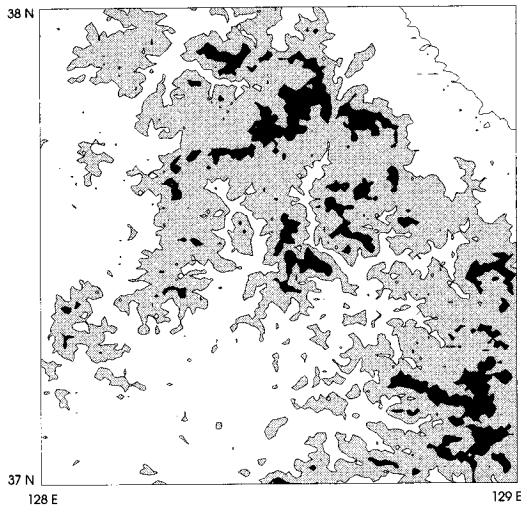


Fig. 1. The map of Korean topography shown between the longitude 128~129° and the latitude 37~38°.

$$Y = \left[\frac{1}{N_y} \sum_{j=1}^{N_y} (y_j - \bar{y})^2 \right]^{\frac{1}{2}} \sim N_y^{\nu_y} \tag{2}$$

$$Z_\alpha = \left[\frac{1}{N_x} \sum_{i=1}^{N_x} (Z_{\alpha i} - \bar{Z}_\alpha)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \sim N_x^{\nu_{z_\alpha}} \tag{3}$$

$$Z_\beta = \left[\frac{1}{N_y} \sum_{j=1}^{N_y} (Z_{\beta j} - \bar{Z}_\beta)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \sim N_y^{\nu_{z_\beta}} \tag{4}$$

여기서, $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}_\alpha$ 및 \bar{z}_β 는 각각 x, y, z_α 및 z_β 의 측정위치들의 평균값이며, $\nu_x, \nu_y, \nu_{z_\alpha}$ 및 ν_{z_β} 는 서로 다른 랜덤지수들이다. 만일 일반적으로 다른 자체상사구조를 갖는 프랙탈에 적용되는 경우에 프랙탈차원 D_f 와 D_f' 에 대해서는 $\nu_x = \nu_{z_\alpha} = \frac{1}{D_f}, \nu_y = \nu_{z_\beta} = \frac{1}{D_f'}$ 으로 주어짐을 알 수 있다. 경도 X와 고도 Z_x 와의 관계는 Fig. 2에서 보인 바와 같이 (1)식과 (3)의 식을 사용하여 $N < N_c$ 의 영역에서는 $\nu_x = 1.0, \nu_{z_\alpha} \approx 0.7758$ 이 되며, $N \geq N_c$ 영역에서는 $\nu_x = 1.0, \nu_{z_\alpha} \approx 0.3572$ 로 주어진다. 또한 Fig. 3에서 위도 y와 고도 Z_y 와의 관계는 (2)식과 (4)식을 사용하여 $N < N_c$ 의 영역에서는 $\nu_y = 1.0, \nu_{z_\beta} \approx 0.7289$ 가 되며, $N \geq N_c$ 영역에서는 $\nu_y = 1.0, \nu_{z_\beta} \approx 0.3164$ 로 나타나며, 이러한 랜덤 지수들은 최소자승법에 의해서 구한 값들이다. 따라서 상전이가 일어나는 임계길이 N_c 의 값들은 Fig. 2와 Fig. 3에서 근사적으로

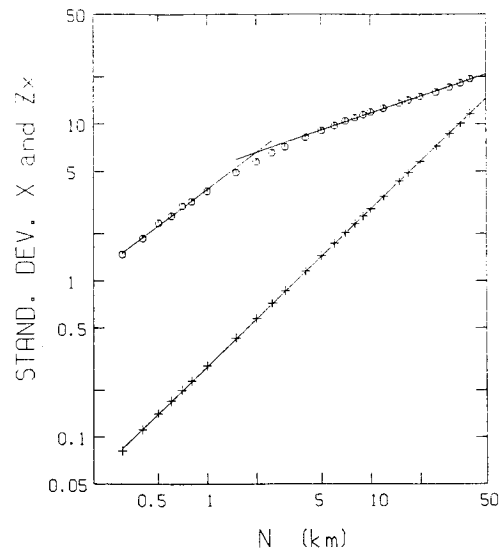


Fig. 2. Plot of the standard deviations of both x and z_x as a function of the longitudinal length N. The phase transition of z_x is approximately given by $N_c = 2000$ m. The slopes of the standard deviations yield the random exponents with $\nu_{z_\alpha} \approx 0.7758, \nu_x = 1.0$ ($N < N_c$), and $\nu_{z_\alpha} \approx 0.3572, \nu_x = 1.0$ ($N \geq N_c$).

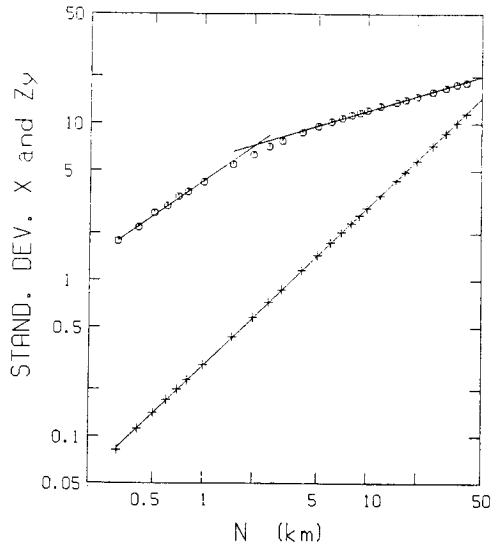


Fig. 3. Plot of the standard deviations of both y and z , as a function of the longitudinal length N . The phase transition of z_y is approximately given by $N_c=2000$ m. The slopes of the standard deviations yield the random exponents with $\nu_{z\beta} \cong 0.7289$, $\nu_y=1.0$ ($N < N_c$), and $\nu_{z\beta} \cong 0.3164$, $\nu_z=1.0$ ($N \geq N_c$)

로 거의 같은 값인 2000 m로 주어진다. 우리가 구한 값들은 Matsushita and Ouchi(1989) 들이 구한 랜덤구조의 거동에 대한 지수들과 상전이기가 일어나는 값들과 같은 값을 보임을 알 수 있다.

2차원의 멀티 프랙탈의 구조

한국 산악지형에서 2차원의 멀티 프랙탈 구조에 대한 일반화 프랙탈차원 D_q 와 축척지수 α_q, f_q 들을 논의하자. $N_x \times N_y$ 의 네모 격자에서 상자 계산방법에 의한 면적 $\epsilon \times \epsilon$ 상자들에 대한 확률은 랜덤한 값이므로 무한히 많은 특이한 값을 갖는 프랙탈 분포에 대한 멀티 프랙탈의 일반화 차원으로 표현된다. 따라서 멀티 프랙탈 구조는 일반화 차원 D_q 와 축척지수 α_q, f_q 가 다음과 같이 표현된다.

$$D_q = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{q-1} \frac{\ln \sum_i n_i p_i^q}{\ln \epsilon} \quad (5)$$

$$\alpha_q = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\ln \epsilon} \frac{\sum_i p_i^q \ln p_i}{\sum_i n_i p_i^q} \quad (6)$$

$$f_q = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\ln \epsilon} \left[\frac{\sum_i p_i^q \ln p_i^q}{\sum_i n_i p_i^q} - \ln \sum_i n_i p_i^q \right] \quad (7)$$

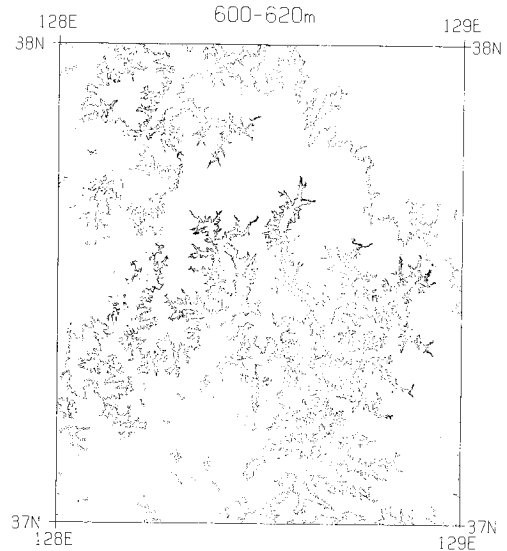


Fig. 4. Plot of the lattice points of the mountain heights between 600 m and 620 m on xy plane divided by the intervals of 100 m in two dimensional lattice.

여기서 확률 p_i 는 면적 $\epsilon \times \epsilon$ 인 i 번째 상자에 들어갈 고도 샘플의 확률이고, n_i 는 확률 p_i 를 갖는 상자수이다.

우리의 모형인 위도 37~38°, 경도 128~129°에서 고도의 간격이 작고 고도의 샘플들이 가장 많은 일정한 수를 유지하는 영역을 대상으로 고려하여 일정한 간격의 고도에 대한 샘플들이 제2장에서 논의한 $N_x \times N_y$ 의 네모격자 위에 투영된다고 가정한다. 조사된 고도의 영역은 고도 600~700 m 사이이며, 고도의 간격은 20 m이다. Fig. 4는 고도가 600~620 m 사이의 고도 샘플인 Table 1에서 보는 바와 같이 33941개를 100 m간격의 네모격자 위에 투영한 그림이며, Table 1은 고도가 600~700 m에서 20 m의 고도의 간격으로 나눈 고도 샘플들의 수이다. Table 1에서 주어지는 5가지의 샘플들에 대해서 상자 계산방법들을 사용한다(Vicsek, 1988). 상자들을 $1 \times 1 \text{ km}^2$, $2 \times 2 \text{ km}^2$, $4 \times 4 \text{ km}^2$ 의 세종류로 도입하면 식(5)~식(7)에서 ϵ 의 값은 각각 1/120, 1/60, 1/30이 된다. Table 1에 나타난 5가지의 샘플들 중에서 고도 660~680 m에서 정사각형면적 $2 \times 2 \text{ Km}^2$ 에 대해서 일반화 차원 D_q 와 축척지수 α_q, f_q 값들은 식(5)~(7)을 사용하여 Table 2에 주어진다. 그리고 세종류의 상자계산방법의 경우에는 Fig. 5의 (a), (b), (c)에서 보인 바와 같이 D_q 의 최대값인 프랙탈 차원은 각각 $D_0 = 1.7339932, 1.7508557, 1.7484097$ 으로 주어지며, Fig. 6의 경우에는 f_q 와 q, α_q 와 q 의 관계를 나타낸 그림이다.

결과 및 고찰

Table 1. The mountain height (H) vs a number of mountain (M) on Korean topography between 128°~129°E and 37°~38°N.

H	M
601 m~620 m	33941
621 m~640 m	34475
641 m~660 m	34729
661 m~680 m	34912
681 m~700 m	38242

Table 2. Value of α_q , f_q and D_q calculated by using the box counting method for the case of the square area shown as $2 \times 2 \text{ Km}^2$ in the mountain heights between 660 m and 680 m.

q	α_q	f_q	D_q
$-\infty$	1.9238271	1.0466054	1.9238270
:	:	:	:
-13	1.9357279	1.2120536	1.8840368
-12	1.9338937	1.2349516	1.8801290
-11	1.9316692	1.2604969	1.8757382
-10	1.9289361	1.2891456	1.8707734
-9	1.9255283	1.3214552	1.8651210
-8	1.9212083	1.3580873	1.8511512
-7	1.9156335	1.3997756	1.8511512
-6	1.9083097	1.4472087	1.8424381
-5	1.8985324	1.5007436	1.8322342
-4	1.8853297	1.5598219	1.8202281
-3	1.8674429	1.6219761	1.8060762
-2	1.8434065	1.6814918	1.7894349
-1	1.8117832	1.7282418	1.7700125
0	1.7715119	1.7476292	1.7476292
1	1.7222903	1.7222903	1.7222903
2	1.6653531	1.6363631	1.6943432
3	1.6051202	1.4857997	1.6647804
4	1.5494455	1.2916696	1.6353708
5	1.5052802	1.0940439	1.6080893
6	1.4743125	0.9247538	1.5842242
7	1.4540361	0.7936996	1.5640922
8	1.4409985	0.6963919	1.5473709
9	1.4324866	0.6243318	1.5335060
10	1.4267435	0.5699506	1.5219427
11	1.4227111	0.5277217	1.5122100
12	1.4197637	0.4938981	1.5039332
13	1.4175282	0.4660036	1.4968220
:	:	:	:
∞	1.3798871	0.0000000	1.3798871

우리가 논의한 경도 128~129°와 위도 37~38° 사이에 있는 한국지형에서 랜덤 프랙탈구조의 거동을 살펴보면, 경도와 위도를 100m로 나눈 2차원의 네모격자위에서 고도에 대한 표준편차는 Fig. 2와 Fig. 3으로 나타난다. 따라서 상전이가 일어나는 임계길이는 $N_c=2000 \text{ m}$ 으로 근사되며, 일본 산악지형에서 Matsushita와 Ouchi(1989)들

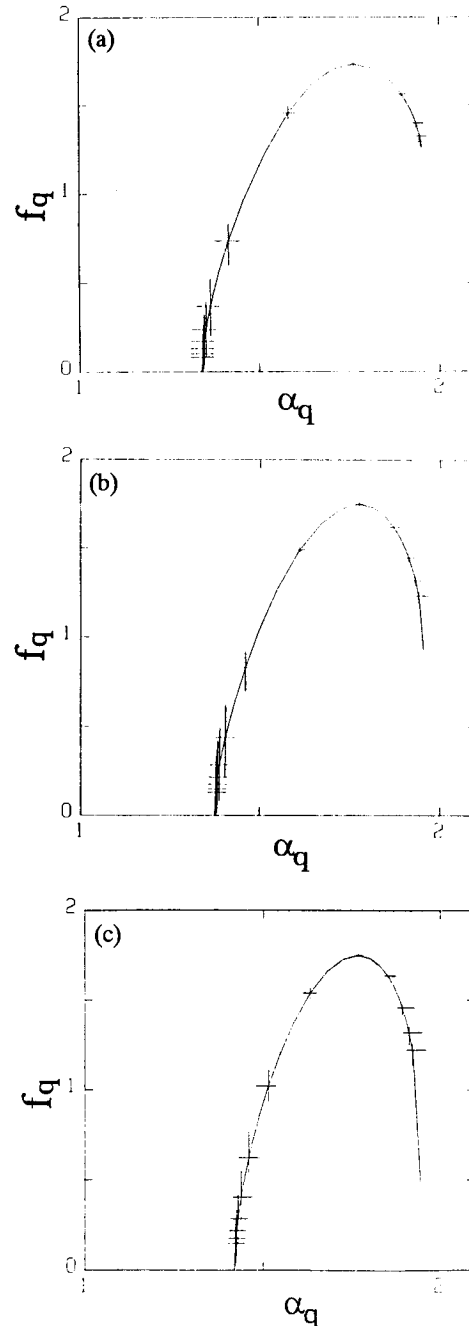


Fig. 5. f_q vs α_q by using the box counting method for three cases of the square area shown as (a) $1 \times 1 \text{ Km}^2$, (b) $2 \times 2 \text{ Km}^2$, and (c) $4 \times 4 \text{ Km}^2$.

이 구한 임계길이는와는 같은 값을 보이고 있다. 멀티프랙탈의 거동은 고도 600~700 m에서 20 m 간격으로 2차원의 네모 격자위에 투영된다고 가정하여 상자계산방법을

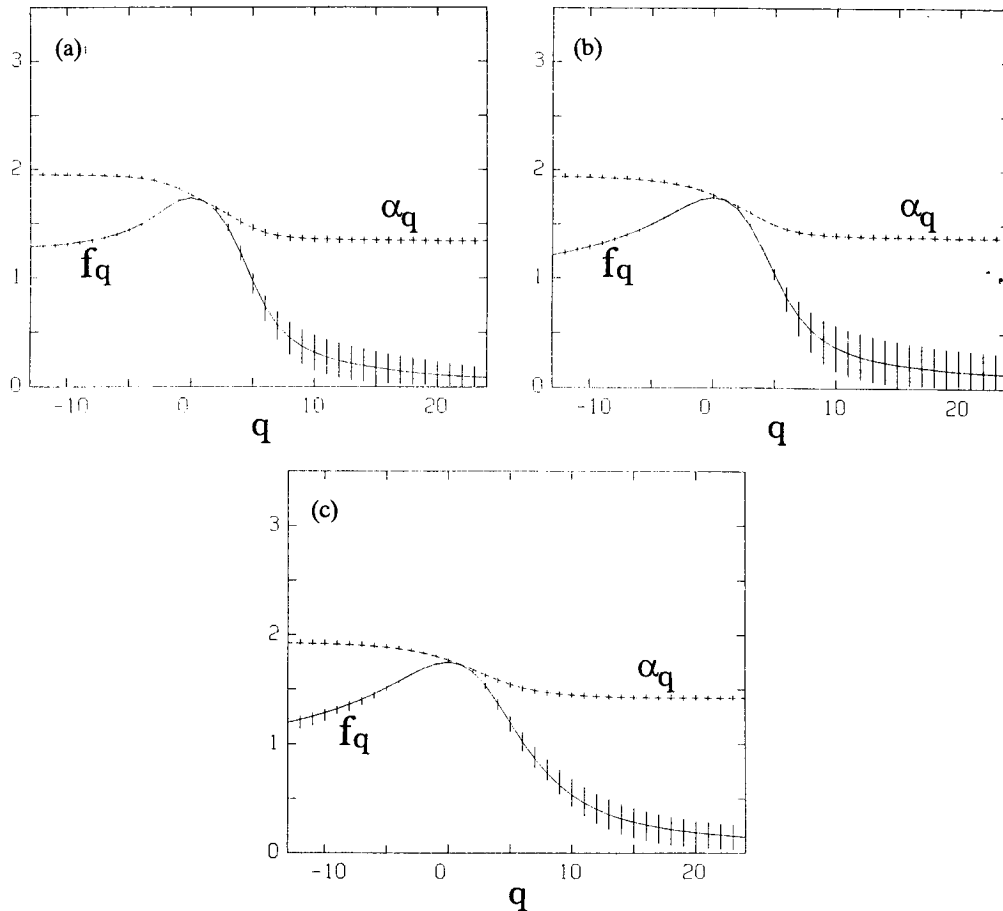


Fig. 6. Plots of α_q vs q and f_q vs q calculated by the mountain heights between 600 m and 700 m in Korean topography.

사용하여 일반화 차원과 축척지수들을 논의하여 왔다. Table 1에서 주어진 한국지형의 고도에 대해서 $1 \times 1 \text{ Km}^2$, $2 \times 2 \text{ Km}^2$, $4 \times 4 \text{ Km}^2$ 인 세 종류의 정사각형 면적의 경우에 축척지수 f_q 와 α_q 의 관계는 컴퓨터 시뮬레이션에 의해서 Fig. 5으로 주어짐을 알 수 있다. 세 종류의 정사각형에 대해서 평균한 축척지수는 $\alpha_{-\infty}=1.9202311$, $\alpha_{+\infty}=1.3482649$ 으로 주어진다.

근래의 멀티프랙탈 연구는 프랙탈 모형(Barnsley, 1988)에 대해 많은 연구가 진행되어 왔으나 앞으로는 랜덤 워크 모형, 무질서계의 거동, 광물의 성분분석 및 해양의 수심구조(Kruhl, 1994)등에도 응용될 것으로 기대 된다.

참고문헌

Alexander, S. and Orbach, R. (1982) Density of states on fractals. J. Physique, v. 43, p. L625-L631.

Amitrano, C. and Coniglio, A. (1986) Growth probability in kinetic aggregation processes. Phys. Rev. Lett., v. 57, p. 1016-1019.
 Barnsley, M. (1988) Fractals everywhere. Academic Press, Inc.
 Benzi, R. Parisi, G. and Vulpiani, A. (1985) Characterisation of intermittency in chaotic system. J. Phys. A, v. 17, p. 2157-2165.
 Halsey, T.C., Jensen, M.H., Kadanoff, L.P., Procaccia, I. and Shraiman, B.I. (1986) Fractal measures and their singularities. Phys. Rev. A, v. 33, p. 1141-1151.
 Kruhl, J.H. (1994) Fractals and dynamic systems in geoscience. Spriger-Verlag, Berlin.
 Lee, J. and Stanley, H.E. (1988) The phase transition in multifractal spectrum of diffusion-limited aggregation. Phys. Rev. Lett., v. 61, p. 2945-2948.
 Mandelbrot, B.B. (1983) The fractal geometry of nature. Freeman, San Francisco.
 Matsushita, M. and Ouchi, S. (1989) On the self-affinity of various curve. Physica D, v. 38, p. 246-251.
 Paladin, G. and Vulpiani, A. (1987) Anomalous scaling laws in multifractal objects. Phys. Rep., v. 156, p. 147-

225.
Rammal, R. and Toulouse, G. (1983) Random walks on fractal structures and percolation clusters. *J. Physique Lett.*, v. 44, p. L13-L22.
- Tel, T. (1988) *Fractals, multifractals, and thermodynamics.* Z. Naturforsch, v. 43a, p. 1154-1174.
- Vicsek, T. (1992) *Fractal growth phenomena.* World Scientific, Singapore.
-

1996년 5월 19일 원고접수