Navier-Stokes 점성유동의 전속도 영역 해석을 위한 새로운 압력기반 PISO-유한요소법

심 은보[*1], 장 근식[*2]

A New Pressure-Based PISO-Finite Element Method for Navier-Stokes Equations in All Speed Range

E. B. Shim and K. S. Chang

A finite element scheme using the concept of PISO method has been developed to solve the Navier-Stokes viscous flows in all speed range. This scheme includes development of new pressure equation that retains both the hyperbolic term related with the density variation and the elliptic term reflecting the incompressibility constraint. The present method is applied to the incompressible two-dimensional driven cavity flow problems(Re=100, 400 and 1,000). For compressible flows, the Carter plate problem(M=3 and Re=1,000) is computed. Finally, we have simulated the shock-boundary layer interaction(M=2 and Re=2.96×10^5), a more difficult problem, and compared its results with the experiment to demonstrate the shock capturing capability of the present solution algorithm.

Key Words: 점성유동(Viscous Flow), 압력 기반 유한요소법(Pressure-Based Finite Element Method), 압력방정식(Pressure Equation), 충격파-경계층상호작용(Shock Wave-Boundary Layer Interation)

1. 서 론

유체유동의 해석에 유한요소법이 사용되기 시작한 이래로 Navier-Stokes방정식을 풀기위하여 많은 유한요소 알고리즘이 제시되어 왔다. 그러나 대부분의 알고리즘들은 비압축성 유동만을 해석하기 위한 것이거나, 아니면 압축성 유동만을 풀기 위한 방법의 둘중 하나이다. 그 이유는 압력 전파 속도들의 광범위한 차이에 의하여 한 유동 범위에서 효율적인 방법은 다른 유동 범위에서는 지극히 비효율적이거나 계산 불능이 되기 때문이다. 압축성 유동을 풀기 위한 알고리즘은 밀도를 주된 변수로 사용하며, 지배방정식을 연립된 형태로 푸는 것이 일반적인 방법이다. Löhner[1]에 의한 Taylor-Galerkin 방법과 Huges등[2]에 의한 SUPG(Streamline Upwind Petrov Galerkin)방법이 그 대표적인 예들이다. 이러한 압축성 유동 알고리즘은 보존 변수들(Conservative

*1 정회원, 금오공과대학교 기계공학과
*2 정회원, 한국과학기술원 항공우주공학과

variables)을 사용하며, 특성값(Chacteristic value)에 기초한 인공점성항 및 경계조건을 이용하기 때문에 파동의 전달을 비교적 정확하게 예측할 수 있다는 장점이 있다. 그러나 이 방법들은 저아음속(Low subsonic) 유동이나 혹은 국부적으로 속도가 매우 작은 박리영역(Seperated region)에서는 극히 큰 Acoustic wave의 전파속도로 인하여 수치적으로 매우 불안정하게 되는 단점을 지니게 된다.

비압축성 유동을 위한 알고리즘에서는 압력을 주된 변수로 취급하며, 압력항을 처리하는 방법에 따라 Mixed interpolation method[3], Penalty function method[4], Segregation method로 나뉘어진다. Mixed interpolation method와 Penalty function method는 고체역학(Solid mechanics)에서 유래된 방법으로서 많은 격자점을 가진 2차원 문제 혹은 3차원 문제의 해석에는 적합치 않기 때문에 근래에는 거의 사용되지 않는다. Segregation method는 주로 유한차분법의 방법들을 원용한 것으로서 연속방정식과 운동량 방정식을 결합하여 압력에 관한 지배 방정식을 도출한다는 것이 특징이다. 이로 인해서 속도와 압력에 관한 변수가 분리될 수 있으며, 따라서 각 방정식을 순차적으로 하나씩 해석하는 것이 가능하다. 그 대표적인 것으로는 Gresho등[5]에 의한 Velocity Projection method, Benim과 Zinser[6]의 SIMPLE Type의 유한요소법, Kawahara등[7]의 Velocity Correction method, Shaw[8]의 Equal Order SIMPLE Type의 유한요소 방법, 그리고 본 저자들[9]에 의해 개발된 PISO(Pressure Implicit with Splitting of Operators) Type의 유한요소법등이 있다.

비압축성의 알고리즘을 압축성 영역으로 확장하거나 그 반대로 압축성 알고리즘을 비압축성 유동에 적용할 수 있도록 일반화하려는 노력은 유한차분법에서 많이 시도되었다. Karki와 Patankar[10]는 SIMPLE방법을 확장하여 압축성 유동의 해석에 적용한 바 있으며, Chen과 Pletcher[11]는 PT Formulation에 의해 비압축성 및 초음속 압축성 유동을 동시에 해석한 바 있다. 그리고 Kwak등[12]은 비압축성 유동에 압축성 유동 알고리즘을 사용하는 Pseudo Compressibility Method를 개발하였으며, Issa 등[13]은 비압축성 및 압축성 유동을 비반복적인(Non-iterative)방법으로 풀 수 있는 PISO알고리즘을 제시하였다. 그러나 유한요소법의 경우에는 비압축성 알고리즘의 압축성 유동으로의 확장은 거의 시도되지 않았다. 단지 Benim[14]이 SIMPLE Type 유한요소법을 연소문제에서 발생하는 밀도변화를 고려할 수 있도록 수정하였으나 초음속과 같은 압축성 유동을 다룰 수 있는 알고리즘으로 확장하지는 못하였다.

본 연구의 목적은 하나의 알고리즘으로서 모든 속도영역의 유동문제에 적용가능한 유한요소방법을 제시하는 것이다. 이는 별도의 컴퓨터 코우드가 없이 단 하나의 컴퓨터 코우드로 전속도 영역을 탐색하여 볼 수 있으므로 산업용 컴퓨터 코우드의 작성에 필수적인 요구 조건이 되고 있다. 이를 위하여 본 논문에서는 이미 본 저자들에 의해 개발된 비압축성 유동을 위한 PISO Type의 유한요소법을 확장하여 압축성 유동을 다룰 수 있도록 압력방정식에 비압축성 조건을 반영하는 Elliptic형태의 Operator 뿐만 아니라 밀도변화를 반영하는 Hyperbolic형태의 Operator도 포함시키는 방법을 제안하였다. 본 연구에서 사용된 유한요소 알고리즘의 타당성을 검증하기 위하여 비압축성 유동에서 초음속 압축성 유동에 이르는 몇가지 응용문제를 해석하고, 이를 기존의 알려진 연구 결과와 비교하였다.

2. 지배방정식과 유한요소이산화

2.1 지배방정식

지배방정식은비보존적(Non-conservative)형태의 Navier-Stokes방정식이다.

연속방정식

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \tilde{u}) = 0 \tag{1}$$

운동량방정식

$$\rho\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \tilde{u} \cdot \nabla \tilde{u}\right) = -\nabla p + \mu\left[\nabla^2 \tilde{u} + \frac{1}{3} \nabla(\nabla \cdot \tilde{u})\right] \tag{2}$$

에너지방정식

$$\rho\left(\frac{\partial e}{\partial t} + \tilde{u} \cdot \nabla e\right) = -p \nabla \cdot \tilde{u} + \alpha \nabla^2 e + \Phi \tag{3}$$

여기에서 ρ는 밀도, $\tilde{u}=(u, v)$는 속도벡터, p는 Pressure, μ는 점성계수(Viscosity)이다. 에

너지방정식에서 나타나는 α는 유체의 전도도(Conductivity)이고, e는 내부에너지(Internal Energy), Φ는 소산(Dissipation)항이다. 밀도, 온도, 압력은 기체의 상태방정식 $p=\rho RT$에 의해서 서로 연관되어 있다. 위의 식에서 T는 온도이며 R은 기체상수(Gas Constant)이다. 온도와 내부에너지와의 관계는 $e=c_vT$이며, c_v는 정적비열이다. 위의 방정식들은 비압축성 및 압축성 유동문제 모두에 유효한 식들이다. 비압축성의 경우에는 단지 위의 식들에서 밀도의 시간, 공간에 관련된 미분항들을 소거하기만 하면 된다.

2.2 유한요소 이산화

지배방정식에 대해서 Galerkin Method를 적용하면 아래와 같은 이산화된 식들이 도출된다.

$$\int_\Omega H_i[\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\vec{u})]d\Omega=0 \tag{4}$$

$$\int_\Omega W_i[\rho(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial t}+\tilde{u}\cdot\nabla\tilde{u})]d\Omega=\int_\Omega W_i[-\nabla p+\mu(\nabla^2\tilde{u}+\frac{1}{3}\nabla(\nabla\cdot\tilde{u}))]d\Omega \tag{5}$$

$$\int_\Omega W_i[\rho(\frac{\partial e}{\partial t}+\tilde{u}\cdot\nabla e)]d\Omega=\int_\Omega W_i(-p\nabla\cdot\tilde{u}+\alpha\nabla^2e+\Phi)d\Omega \tag{6}$$

여기에서 H_i, W_i는 가중함수이다. 그리고 각 요소내에서 속도, 압력 및 내부에너지등의 유동변수들을 다음과 같은 공간적인 함수형태로 근사한다.

$$\tilde{u}=W_i\tilde{u_i},\ p=H_ip_i,\ e=W_ie_i \tag{7}$$

여기에서 $\tilde{u_i}, p_i, e_i$등은 변수의 절점 값이며, H_i, W_i는 내삽함수이며 요소내에서 변수들을 기하학적인 좌표값에 의해 내삽시켜 주는 역할을 한다. Mixed Order요소를 사용한 경우에, 요소내에서 압력은 Piecewise Constant Function으로서, 그리고 속도 및 그 밖의 변수는 선형함수로서 내삽된다. 이러한 함수의 사용은 유한차분법에서 Staggered Grid를 사용하는 것과 유사하다. Equal Order요소를 사용하는 경우에는 압력을 포함하는 모든 유동변수들이 선형함수로서 내삽된다. 이 경우에는 연속방정식에 대한 가중함수 H_i가 W_i와 동일하다.

3. 유한요소 알고리즘

본 알고리즘은 각 시간간격마다 한번의 내연적인(Implicit) 예측단계와 두번의 외연적인(Explicit) 보정단계를 거친다.

3.1 예측단계

이전 단계에서의 압력을 기반으로 하며 내연적인(Implicit)방법으로 속도의 예측 값인 u^*, v^*를 아래의 두 식으로부터 구한다.

$$(\frac{M}{\Delta t}+K_u)u^*=\frac{Mu^n}{\Delta t}-C_xp^n+F_u \tag{8}$$

$$(\frac{M}{\Delta t}+K_v)v^*=\frac{Mv^n}{\Delta t}-C_yp^n+F_v \tag{9}$$

위의 식들에서 K_u와 K_v는 (Convection + Diffusion) Matrix이며, M은 Mass Matrix, C_x와 C_y는 Gradient Matrix, F_u와 F_v는 Force Vector이다.

3.2 첫번째 보정단계

이 단계에서는 u^*, v^*를 보정하기 위해 연속방정식을 만족하는 새로운 u^{**}, v^{**}와 p^*를 구한다. 우선 다음과 같은 조건을 만족하는 u^{**}, v^{**}를 구한다.

$$(\frac{M}{\Delta t}+K_u^d)u^{**}=\frac{Mu^n}{\Delta t}-K_u'u^*-C_xp^*+F_u \tag{10}$$

$$(\frac{M}{\Delta t}+K_v^d)v^{**}=\frac{Mv^n}{\Delta t}-K_v'v^*-C_yp^*+F_v \tag{11}$$

위의 식에서 행렬 K_u는 Diagonal Element만을 가지는 행렬 K_u^d와 Off-Diagonal Element만을 가진 행렬 K_u'로 분리되어 표시되어 있다. 즉, $K_u=K_u^d+K_u'$이다. 이때 K_u'는 Diagonal Element에 대한 영향인자(Influence Coefficient)로서 한 절점에 대한 주위의 연관된 절점들이 미치는 영향을 나타낸다. 위의 식들에서 알 수 있듯이 Diagonal Element에 대해서 우선 내연적으로 취급하며 그 주위의 연관된 절점에 의한 영향은 u^*를 곱한 값으로서 외연적으로 처리된다. 식(10)과 (11)로부터 식(8)과 (9)를 빼면 다음과 같은 속도 보정관계식이 도출된다.

$$(\frac{M}{\Delta t}+K_u^d)(u^{**}-u^*)=-C_x(p^*-p^n) \tag{12}$$

$$(\frac{M}{\Delta t}+K_v^d)(v^{**}-v^*)=-C_y(p^*-p^n) \quad (13)$$

여기서 Mass Matrix M은 Gresho등의 Projection Method[5]에서와 같이 Lumped Matrix M_L로서 처리한다. 따라서 위의 식 좌변의 계수 행렬은 Diagonal Matrix가 되며 식 (12), (13)은 아래와 같이 간략히 표현된다.

$$u^{**}=\hat{u}-\overline{K_u}^{-1}C_x p^* \quad (14)$$

$$v^{**}=\hat{v}-\overline{K_v}^{-1}C_y p^* \quad (15)$$

위의 식들에서 나타난 $\hat{u}$, $\hat{v}$, $\overline{K_u}$, $\overline{K_v}$ 에 대한 정의는 다음과 같다.

$$\hat{u}=u^*+\overline{K_u}^{-1}C_x p^n \quad (16)$$

$$\hat{v}=v^*+\overline{K_v}^{-1}C_y p^n \quad (17)$$

$$\overline{K_u}=\frac{M_L}{\Delta t}+K_u^d \quad (18)$$

$$\overline{K_v}=\frac{M_L}{\Delta t}+K_v^d \quad (19)$$

ρ^*, u^{**}, v^{**}등이 연속방정식 (4)를 만족해야 하기 때문에 다음과 같은 식이 나온다.

$$\int_\Omega H_i[\frac{\rho^*-\rho^n}{\Delta t}+\frac{\partial(\rho^* u^{**})}{\partial x}+\frac{\partial(\rho^* v^{**})}{\partial y}]d\Omega=0 \quad (20)$$

그러나 위식의 두번째와 세번째의 피적분항은 비선형(Non-Linear)형태이므로 아래와 같이 선형화한다.

$$\frac{\partial(\rho^* u^{**})}{\partial x}=\frac{\partial(\rho^n u^{**})}{\partial x}+\frac{\partial(\rho^* u^n)}{\partial x}-\frac{\partial(\rho^n u^n)}{\partial x} \quad (21)$$

$$\frac{\partial(\rho^* v^{**})}{\partial y}=\frac{\partial(\rho^n v^{**})}{\partial y}+\frac{\partial(\rho^* v^n)}{\partial y}-\frac{\partial(\rho^n v^n)}{\partial y} \quad (22)$$

위에 상첨자 n은 이전 시간대에서의 값을 의미한다. 식 (21), (22)를 식 (20)에 대입한 이후, 상태방정식을 이용하여 ρ^*를 p^*로, u^{**}, v^{**}를 식(14)과 (15)로서 치환하고 정리하면 최종적으로 다음과 같은 압력방정식이 나온다.

$$\int_\Omega H_i[\frac{p^*-p^n}{\Delta t(RT^n)}]d\Omega+\int_\Omega \rho^n[\frac{\partial H_i}{\partial x}W_j(\overline{K_u}^{-1}C_x)+\frac{\partial H_i}{\partial y}W_j(\overline{K_v}^{-1}C_y)]p^* d\Omega$$

$$+\int_\Omega H_i[\frac{\partial}{\partial x}(\frac{p^*}{RT^n}u^n)+\frac{\partial}{\partial y}(\frac{p^*}{RT^n}v^n)]d\Omega$$

$$=-\int_\Omega H_i[\frac{\partial}{\partial x}(\rho^n\hat{u})+\frac{\partial}{\partial y}(\rho^n\hat{v})]d\Omega+\int_\Omega H_i[\frac{\partial}{\partial x}(\rho^n u^n)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho^n v^n)]d\Omega \quad (23)$$

위 등식 좌변의 두번째 항이 비압축성 유동특성으로부터 도출되는 Poisson형태의 Operator이며, 좌변의 세번째 항이 압축성 유동의 Hyperbolic특성을 반영하는 것이다. 위의 식에서 Possion형태의 Operator는 Shaw[8]의 Equal Order SIMPLE 알고리즘에서 제시된 것이지만, 본 연구에서는 압축성 유동에도 적용가능한 새로운 형태의 유한요소 압력방정식으로 확장되었다. 이들 항의 존재 때문에 본 유한요소 알고리즘은 비압축성 및 압축성 점성유동을 공히 해석할 수 있게 된다. 위의 식으로부터 p^*를 구한 다음 이것을 속도보정관계식 (14)과 (15)에 대입하여 u^{**}, v^{**}를 구한다. 이후에 이 값들로부터 내부에너지 예측값인 e^*를 아래의 식으로부터 구한다.

$$(\frac{M_T}{\Delta t}+K_T)e^*=\frac{M_T e^n}{\Delta t}-\int_\Omega W_i p^*(\frac{\partial u^{**}}{\partial x}+\frac{\partial v^{**}}{\partial y})d\Omega+F_T \quad (24)$$

3.3 두번째 보정단계

이전 단계에서와 마찬가지로 다음 조건을 만족하는 u^{***}, v^{***}를 구한다.

$$(\frac{M}{\Delta t}+K_u^d)u^{***}=\frac{Mu^n}{\Delta t}-K_u' u^{**}-C_x p^{**}+F_u \quad (25)$$

$$(\frac{M}{\Delta t}+K_v^d)v^{***}=\frac{Mv^n}{\Delta t}-K_v' v^{**}-C_y p^{**}+F_v \quad (26)$$

식 (25)와 (26)을 식 (10), (11)로 각각 빼고 이전 단계에서와 같은 방법으로 정리하면 다음과 같은 속도보정관계식이 나온다.

$$u^{***}=\hat{\hat{u}}-\overline{K_u}^{-1}C_x p^{**} \quad (27)$$

$$v^{***}=\hat{\hat{v}}-\overline{K_v}^{-1}C_y p^{**} \quad (28)$$

여기에서 $\hat{\hat{u}}, \hat{\hat{v}}$는 다음식으로 주어진다.

$$\hat{\hat{u}}=u^{**}-\overline{K_u}^{-1}[K_u'(u^{**}-u^*)-C_x p^n] \quad (29)$$

$$\hat{\hat{v}}=v^{**}-\overline{K_v}^{-1}[K_v'(v^{**}-v^*)-C_y p^n] \quad (30)$$

압력보정방정식은 다음과 같다.

$$\int_\Omega H_i\frac{1}{\Delta t}(\frac{p^{**}}{RT^*}-\frac{p^n}{RT^n})d\Omega+\int_\Omega \rho^n[\frac{\partial H_i}{\partial x}W_j(\overline{K_u}^{-1}C_x)$$

$$+\frac{\partial H_i}{\partial y} W_j(\overline{K_v}^{-1} C_y)]p^{**}d\Omega$$

$$+\int_\Omega H_i[\frac{\partial}{\partial x}(\frac{p^{**}}{RT^*}u^n)+\frac{\partial}{\partial y}(\frac{p^{**}}{RT^*}v^n)]d\Omega$$

$$=-\int_\Omega H_i[\frac{\partial}{\partial x}(\rho^n\hat{u})+\frac{\partial}{\partial y}(\rho^n\hat{v})]d\Omega$$

$$+\int_\Omega H_i[\frac{\partial}{\partial x}(\rho^n u^n)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho^n v^n)]d\Omega \quad (31)$$

마지막으로 내부에너지의 보정값 e^{**}를 얻기 위해 다음과 같은 식을 풀어야 한다.

$$(\frac{M_T}{\Delta t}+K_T)e^{**}=\frac{M_T e^n}{\Delta t}-K_T' e^* - \int_\Omega W_i p^{**}(\frac{\partial u^{***}}{\partial x}+\frac{\partial v^{***}}{\partial y})d\Omega+F_T \quad (32)$$

이 단계에서 구한 유동변수들이 (n+1)시간에서의 최종적인 값이 된다.

3.4 Upwind Method

본 연구에서 사용된 Upwind Method는 Brooks & Huges등[15]에 의해 제안되어 비압축성 유동문제에서 그 효율성이 입증된 바 있는 Simplified Petrov-Galerkin Method를 사용하였다. 이 방법은 요소내에서 유동의 방향에 따라서 인공점성항이 더해지기 때문에 다른 방법들에 비해 Over-Diffusion이 매우 작은 것으로 알려져 있다. 이 방법은 Convection항의 가중함수를 아래식과 같이 취함으로써 구현된다.

$$\overline{W}_i = W_i + \beta\frac{h_e}{|\tilde{u}|}(\tilde{u}\cdot\nabla W_i) \quad (33)$$

여기에서 h_e는 Element Length Scale이며 β는 Artificial Diffusion을 최소화시키는 Parameter이다.

4. 결과 및 검토

4.1 2차원 Driven cavity유동

2차원 Driven cavity는 Fig. 1에서 보는 것처럼 매우 간단한 형상을 가지고 있으며, Cavity 중간에서의 Primary vortex, 아래쪽 좌, 우에서의 Vortex등과 같은 다양한 유동현상을 보여주기 때문에, 비압축성 유동에 대한 Benchmark test로서 널리 이용되고 있는 문제이다. 유동현상의 중요한 Parameter인 Re수는 Cavity의 넓이, 그리고 유동을 유발시키는 윗판의 견인속도를 기준으로 하며, 여기에서는 Re수가 100, 400, 1000인 경우에 대해 계산을 수행하였다. 계산을

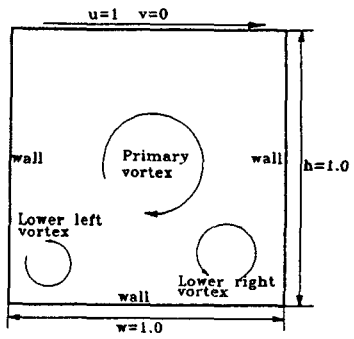


Fig. 1 Two-dimensional driven cavity.

위해 경계쪽에 밀집된 51×51개의 격자를 사용하였으며, 시간간격(Time step)은 Re수 100, 400, 1000에 대해 각각 3.0, 1.5, 0.7을 취하였는데, 이때의 수렴과정이 Fig. 2에 나타나 있다.

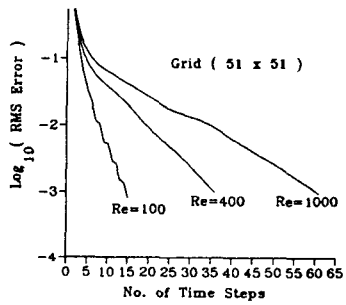
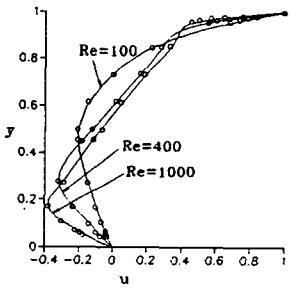
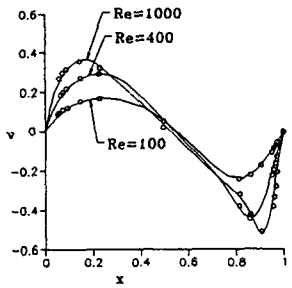


Fig. 2 Convergence history for the 2D driven cavity problem

Fig. 3은 Cavity의 수직중앙선 그리고 수평중앙선을 따른 속도분포를 Ghia등[16]의 결과와 비교한 것이다. Re수가 커짐에 따라 벽에서의 경계층이 얇아짐을 알 수 있으며, 모든 점에서 Ghia등의 결과와 매우 잘 일치하고 있다.



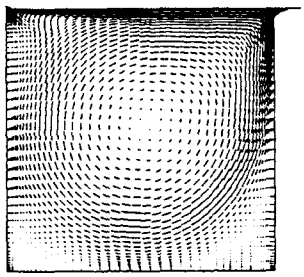
(a)



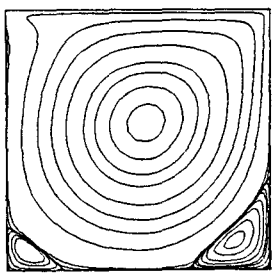
(b)

Fig. 3 Velocity profiles (o, Ghia *et al*; ——, present study) : (a) along a vertical centerline, (b) along a horizontal centerline.

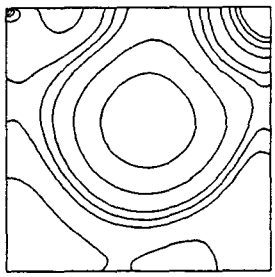
Fig. 4의 (a),(b),(c)는 Re=1000에서의 Velocity Vector, Streamline, Pressure를 도시한 것이다. 특히 (b)에서는 Primary vortex와 바닥면 좌우에서의 Vortex를 명확히 보여준다. 또한 (c)에서는 매우 매끄러운 압력 분포를 보여주고 있으며 어떠한 Wiggle도 관찰되지 않는다.



(a)



(b)



(c)

Fig. 4 Two-dimensional driven cavity flow for Re=1000 : (a) Velocity vector, (b) Streamlines, (c) Pressure.

4.2 Carter의 평판문제

압축성 유동에서 본 알고리즘의 타당성을 검토하기 위하여 Carter[16]의 평판문제를 해석하였다. Carter의 평판문제는 경계층의 발달과 충격파의 발생을 한꺼번에 관찰할 수 있기 때문에 층류 압축성 유동영역에서 알고리즘의 검증용으로 많이 해석되고 있다. Fig. 5에 나타나 있듯이 자유류의 Mach수는 3, 입구에서의 속도와 평판의 길이를 기준으로 하는 Reynolds수는 1000이며, 평판에서의 온도 T_w는 유입온도 T_∞의 2.8배, Prandtl수는 0.72, 비열비(Specific heat ratio)는 1.4이다. 격자계는 57×71개이며, Fig. 6에서 보듯이 벽면 근처와 앞전(Leading edge)에서 밀집되어 있다.

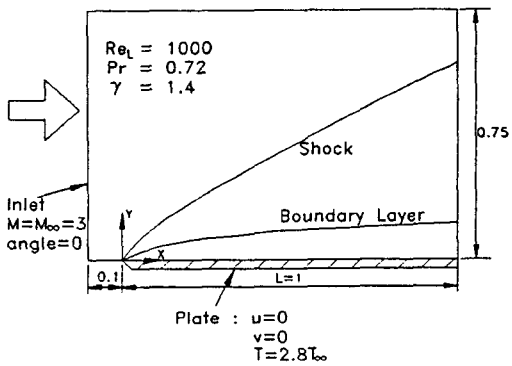


Fig. 5 Schematic drawing of the Carter plate problem.

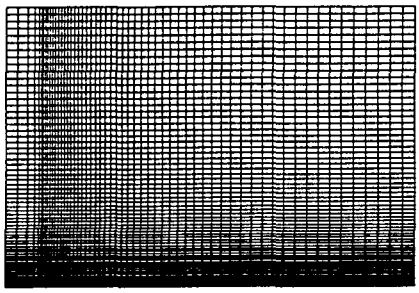


Fig. 6 Computational mesh system for Carter plate(57×71).

Fig. 7은 CFL 값 5에 대하여 정상상태로의 수렴과정을 나타내고 있다. 압력의 RMS(Root mean square) error의 값을 기준으로 했을때 582번만에 Error tolerance는 1.0×10^{-6}보다 작아지며, 수렴과정에서의 어떠한 진동도 발견되지 않는다.

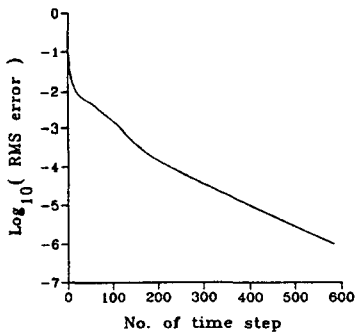
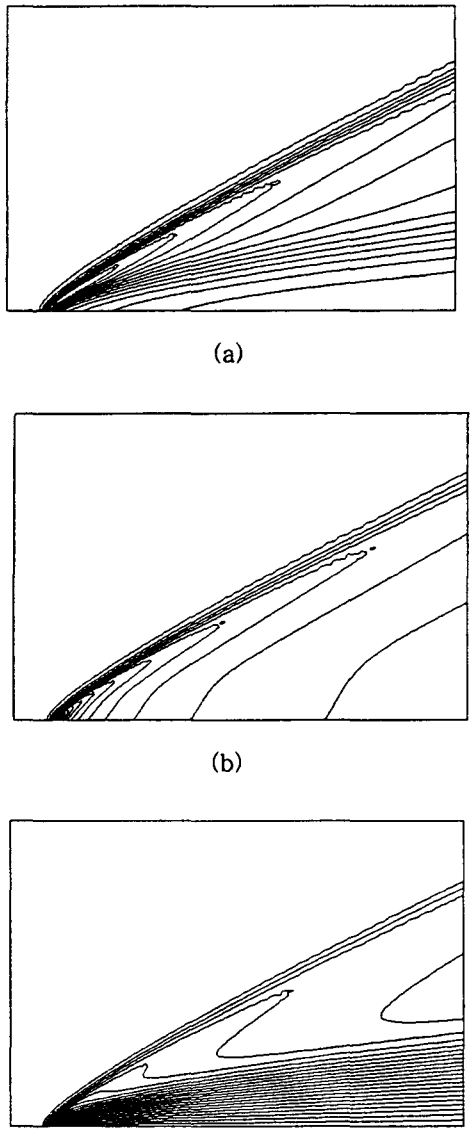


Fig. 7 Convergence history for the Carter plate problem.

Fig. 8(a),(b),(c)는 각각 밀도, 압력 그리고 Mach수의 contour를 보여주고 있다. 밀도의 contour는 앞전에서 발생한 충격파를 선명하게 보여주고 있다. 압력의 변화는 충격파 근처에서 매우 크며, 경계층에서는 거의 변화가 없다. 반면 Mach수는 주로 평판 쪽에서 구배가 심한데 이는 경계층의 존재로 인한 것이다.



(a)

(b)

(c)

Fig. 8 Numerical results of Carter plate problem : (a) Density contours, (b) Pressure contours, (c) Mach number contours.

Fig. 9는 출구에서의 밀도와 수평방향 속도를 Carter의 결과와 정량적으로 비교한 것으로서, Shock의 위치와 Boundary layer에서의 밀도 값, 경계층내에서의 x-방향 속도 값들이 매우 잘 일치하고 있음을 볼 수 있다.

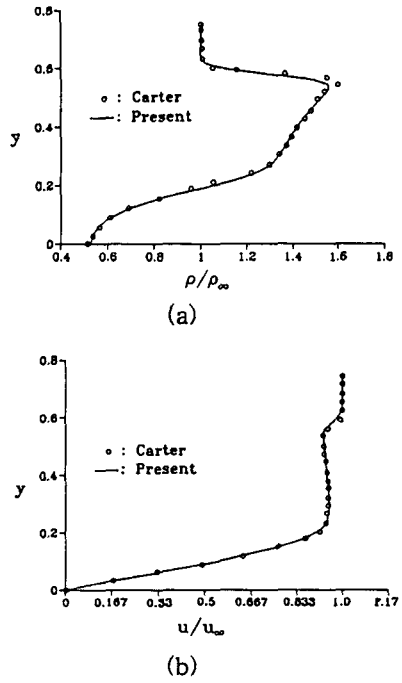


Fig. 9 Variations of flow variable along the y-coordinate at the exit : (a) Density, (b) x-direction velocity.

4.3 입사충격파와 경계층의 상호작용에 의한 유동박리

본 문제에서는 자유류 Mach수가 2이고, Re수가 2.96×10^5인 초음속유동의 평판위 경계층은 수평과 32.6°의 각도로 입사되는 충격파와 상호간섭을 일으켜 경계층이 박리하게 된다. 이 문제는 Hakkinen등[18]에 의해 제시된 실험치가 존재하며, 다양한 충격파가 존재하기 때문에 압축성 Navier-Stokes코드의 충격파 포획능력을 검증하기 위한 목적으로 많이 이용된다. Fig. 10에서 보듯이 평판이 시작되는 곳에서 약한 앞전충격파(Leading edge shock)가 발생하고, 입사된 충격파와 경계층이 만나면서 유동이 박리된다. 이로 인하여 박리영역 앞에서 압축충격파가 생기고, 그 이후에는 입사된 충격파의 반사파와 재압축파가 나타난다. 경계조건으로는 입구(Inflow)에서는 입사되는 충격파의 아래쪽에서는 Mach수 2의 유입경계조건을 주었고, 입사되는 충격파 위쪽의 입구 및 원방경계(Far Boundary)에서는 경사충격파 이론에 근거한 Jump Shock Condition을 적용하였다. 출구에서는 Neumann Condition을, 벽에서의 속도 경계조건은 No-Slip Condition으로, 에너지방정식에 대해서는 단열벽 조건을 사용한다.

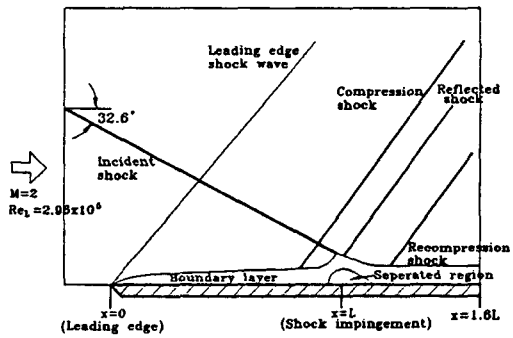


Fig. 10 Schematic drawing of the shock-boundary layer interaction problem.

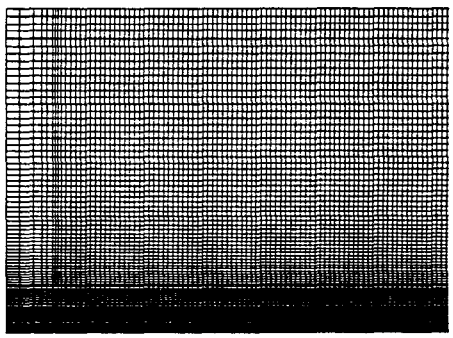


Fig. 11 Computational mesh system(99×99).

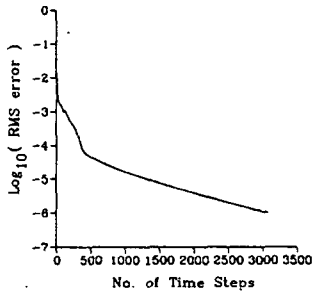


Fig. 12 Convergence history for the shock-boundary layer interaction.

Fig. 11에 나타나 있듯이 격자계는 99×99이며 벽면근처와 앞전(Leading Edge)에서 밀집되어 있다. CFL수를 4로 취하고 계산하였을때의 수렴곡선이 Fig. 12에 나타나 있는데 약 3,000번 정도에 수렴함을 알 수 있다. Fig. 13은 압력의 분포를 보여주는 것으로서, 앞전에서의 미약한 충격파, 압축충격파, 반사충격파 그리고 재압축 파등이 선명히 나타나 있는데, 이는 본 알고리즘의 충격파 포획능력을 보여주는 것이다. Fig. 14는 입사된 충격파가 평판과 만나는 지점 부근의 Velocity vector를 그린 것인데, 박리된 영역이 뚜렷이 관찰된다.

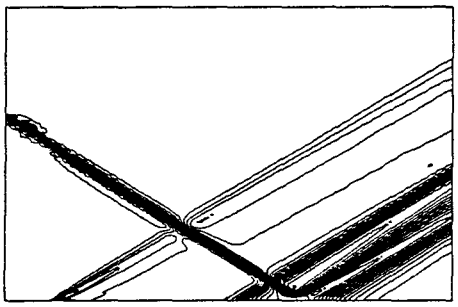


Fig. 13 Pressure contours of the shock-boundary layer interaction.

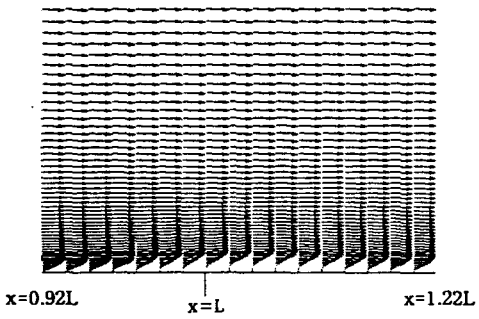
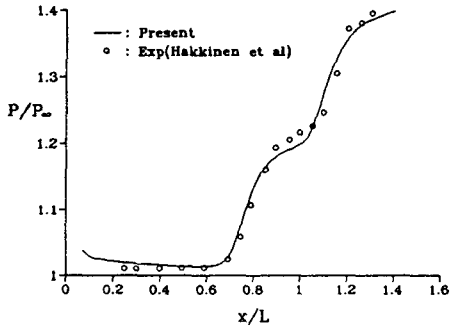
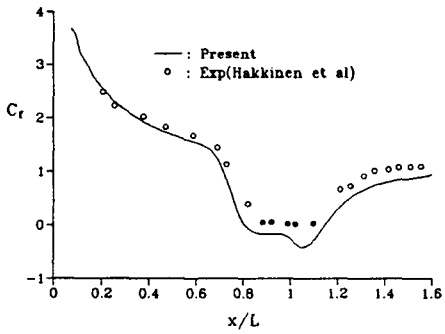


Fig. 14 Velocity vectors in and around the seperated region.

Fig. 15(a),(b)는 각각 계산된 벽면에서의 압력 및 마찰계수를 나타내고 Hakkinen의 실험치와 비교한 것으로서 그 결과는 전반적으로 잘 일치하고 있다. 그러나 박리된 영역의 후방에서는 다소의 오차가 발견되는데 이는 경계층이 충격파와 만나서 유동이 불안정해지고 따라서 난류로 천이되고 있는 영역이기 때문에 층류유동의 가정이 한계를 가질 수 밖에 없는 것으로 알려져 있다. 벽면에서의 압력분포곡선은 충격파와 경계층이 만나는 부근에서 두번의 급격한 압력 상승을 보여준다. 즉 x/L=0.8 직전에서의 압력 상승은 박리영역의 형성을 인하여 발생하는 압축충격파에 의한 것이며, 두번째의 것은 반사충격파로 인한 것이다. 그림 15(b)에서 보듯이 x/L=0.8 직전에서 벽면마찰계수가 급격히 감소하며 박리된 영역에서는 마찰계수가 거의 일정하다.



(a)



(b)

Fig. 15 Computational results : (a) Pressure, (b) Friction coefficient.

5. 결 론

본 연구에서는 본 저자들에 의해 개발되어 비압축성 유동에 훌륭히 적용된 바 있는 PISO Type의 유한요소법을 모든 속도영역의 점성유동에 적용 가능하도록 확장하였다. 압축성 유동을 풀 수 있도록 하기 위해, 비압축성 조건을

반영하는 Poisson형태의 Operator뿐만 아니라 밀도의 변화를 반영하는 Hyperbolic형태의 Operator가 포함된 새로운 형태의 압력방정식이 유도되었다. 제시된 방법의 타당성을 검증하기 위하여 몇가지의 응용문제를 해석하고 이를 기존의 결과와 비교 검토하였다. 먼저 2차원 Driven cavity내의 비압축성 유동을 해석한 결과, 기존의 연구결과와 정성적으로, 그리고 정량적으로 잘 일치하고 있음을 확인하였으며, 압력의 경우 어떠한 Wiggle도 관찰되지 않았다. 압축성 유동의 경우에는 두가지를 해석하였는데, Carter plate문제와 충격파와 경계층의 상호작용 문제 모두 기존의 연구결과와 잘 일치되는 결과를 얻을 수 있었으며, 정상상태로의 수렴과정에서는 진동이 거의 없는 매우 안정된 수렴특성을 확인할 수 있었다. 또한 입사된 충격파와 경계층의 상호작용에 의해 경계층이 박리되는 유동문제에 대해서도 정확한 수치계산 결과를 보여주었으며, 또한 기존의 연구결과에서 보여주는 모든 충격파를 선명하게 포획할 수 있음을 보여주었다. 이로써, 본 유한요소방법은 Grid 탄력성이 요구되는 복잡한 유동장을 갖는 비압축성 및 압축성의 전 속도영역의 산업체 문제를 위한 산업용·컴퓨터 코우드작성을 위하여 훌륭한 장점을 보유하고 있음을 확인하게 되었다.

참고문헌

[1] Löhner, R., "An Adaptive Finite Element Scheme for Transient Problems in CFD," *Comp. Methods. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 61 (1987), p.335.

[2] Huges, T.J.R., Franca, L.P., and Hulbert, G.M., "A New Finite Element Formulation for Computational Fluid Dynamics," *Comp Meth. Appl. Mechods. Eng.*, Vol. 73 (1989), p.173.

[3] Taylor, C., Hood, P., "A Numerical Solution of Navier-Stokes Equations Using Finite Element Technique," *Computers and Fluids*, Vol. 1 (1973), p.73.

[4] Oden, J.T., "RIP Methods for Stokesian Flows," *Finite Element Methods in Fluid Mechanics*, Vol. 4 (1982), p.305.

[5] Gresho, P.M., "On the Theory of Semi-Implicit Projection Methods for Viscous Incompressible Flow, Part 2 : Implementation," *Int'l J. Numer. Meth. in Fluids*, Vol. 11 (1990), p.587.

[6] Benim, A.C., Zinser, W., "A Segregated Formulation of Navier-Stokes Equations with Finite Element," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 57 (1986), p.223.

[7] Yoon, S.B., Kawahara, M., "Finite Element Modelling of Navier-Stokes Equation Using All Neumann Pressure Boundary Condition," *Computational Methods in Flow Analysis*, Vol. 1 (1988), p.381.

[8] Shaw, C.T., "Using a Segregated Finite Element Scheme to Solve the Incompressible Navier-Stokes Equations," *Int'l J. Numer. Meth. in Fluids*, Vol. 12 (1991), p.81.

[9] Shim, E.B., Chang, K.S., "Three-Dimensional Vortex Flow past a Tilting Disc Valve Using a Segregated Finite Element Scheme," *Computational Fluid Dynamics Journal*, Vol. 3 (1994), p.205.

[10] Karki, K.C., Patankar, S.V., "Pressure-Based Calculation Procedure for Viscous Flows at All Speeds in Arbitrary Configurations," *AIAA J.*, Vol. 27 (1989), p.1167.

[11] Chen, K.H., Pletcher, R.H., "Primitive Variable, Strongly Implicit Calculation Procedure for Viscous Flows at All Speeds," *AIAA J.*, Vol. 29 (1991), p.1241.

[12] Kwak, D.C., "A Three-Dimensional Incompressible Navier-Stokes Flow Solver Using Primitive Variables," *AIAA J.*, Vol. 24 (1986), p.390.

[13] Issa, R.I, Gosmann, A.d, and Watkins, A.P., "The Compuation of Compressible and Incompressible Recirculating Flows by Non-Iterative Implicit Scheme," *J. Computational Physics*, Vol. 62 (1986), p.66.

[14] Benim, A.C., "Finite Element Solution of an Enclosed Turbulent Diffusion Flame," *Int'l J. Numer. Meth. in Fluids*, Vol. 9 (1989), p.289.

[15] Brooks, A.N., Huges, T.J., "A Streamline Upwind/Petrov-Galerkin formulation for Convection Dominated Flows with Particular

Emphasis on the Incompressible Navier -Stokes Equations," *Comp. Methods in App. Mech. Eng.*, Vol. 101 (1980), p.583.
[16] Ghia, U., Ghia, K.N., and Shin, C.T., "High - Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and Multigrid Method," *J. Comp. Physics*, Vol. 48 {1982}, p.387.
[17] Carter, J.E., "Numerical Solutions of the Navier-Stokes Equations for the Supersonic Laminar Flow over a Two-Dimensional Compression Corner," *Technical Report TR R-385*, NASA, (1972).
[18] Hakkinen, R.J., Greber, I., "The Interaction of an Oblique Shock Wave with a Laminar Boundary Layer," *Memo-2-59W*, NASA, (1959).