

해석적 자동격자생성방법에서 보간방법에 따른 조절함수의 영향에 관한 연구

채은미*¹, 사종엽*²

Study on effect of control functions according to interpolations for elliptic grid generation method

E. M. Chae and J. Y. Sah

This study examines effect of various interpolations of interior control function for analytic methods such as Thomas-Middlecoff and Sorenson methods. Laplace interpolation is developed and compared among linear interpolation and exponential interpolation systematically.

Keywords: 자동격자생성(Automatic Grid Generation), 대수적 방법(Algebraic Method), 해석적 방법>Analytical Method), 유한차분법(Finite Difference Method), 유한체적법(Finite Volume Method)

1. 서론

전산유체역학 분야에서 격자계의 수치적 생성은 실제적인 응용문제를 해석하는데 필요한 가장 기본적인 단계이다. 수치해의 정확도나 계산의 안정성이 사용된 격자계에 따라 크게 영향을 받는다는 것은 널리 알려진 사실이다. 특히 일반 좌표계의 격자계에서는, 격자 간격의 크기와 연속성, 그리고 격자계의 수직성과 같은 세 가지 조건이 잘 만족되어야 수치해의 오차를 최소화할 수 있으며, 해의 수렴성을 향상시킬 수 있다.^[1] 특히, 격자계의 수직성은 경계면에서 가장 잘 만족되어야 한다.

격자계를 생성할 때에는 먼저 경계 형상의 곡선을 입력하고 경계격자를 생성한 후, 내부 격자를 생성시킨다. 경계 격자의 분포는 사용자가 비교적 간단하게 직접 조절할 수 있으나, 내부 격자는 격자계의 직교성과 연속성 등을 고려하

여야 하므로 사용자가 직접 조절하는 것이 쉽지 않다. 그러므로, 경계격자의 분포에 대한 정보를 사용하여 자동적으로 내부 격자를 생성시키는 방법이 필요하게 되는데 이를 자동격자생성 방법이라 한다.

자동격자생성 방법은 크게 대수적 방법과 해석적 방법으로 나눌 수 있다. 경계격자를 보간하여 내부 격자를 생성시키는 대수적 방법으로는 선형 transfinite 보간 방법이나 3차식을 이용한 Hermite transfinite 보간 방법을 조사하였으며, 특히 Hermite 방법은 경계면에서 격자 간격과 수직성을 고려할 수 있도록 하였다. 이러한 대수적 방법은 계산 속도가 빠르고 프로그래밍 작업이 단순한 반면, 경계격자에 불연속한 점이 있으면 내부 격자의 연속성에 직접 영향을 주는 단점이 있다. 자동격자생성을 위한 해석적 방법으로 Thomas-Middlecoff 방법과 Sorenson 방법을 조사하였으며, 이러한 방법들은 경계격자의 분포로부터 내부 격자에 대한 조절함수를 만들어 Poisson 방정식을 통하여 내부 격자를 생성하므로 격자계의 연속성이 탁월한 장점이 있다. 특히, Sorenson 방법은 Hermite 보간법과

*¹ 학생회원, 영남대학교 대학원 기계공학과

*² 정회원, 영남대학교 기계공학과

마찬가지로 경계면에서의 격자 간격과 수직성을 고려할 수 있다.

해석적 방법에서 사용되는 내부 격자의 조절 함수는 경계격자의 조절함수들을 보간하여 구하는데, Thomas-Middlecoff 방법에서는 선형 보간법을, Sorenson 방법에서는 지수형 보간법을 제안하였다. 동일한 경계 격자를 사용하더라도 사용하는 조절함수의 보간 방법에 따라 내부 격자계의 분포가 달라지므로 본 연구에서는 선형 보간법, 지수형 보간법과 Laplace 방정식을 이용하는 Laplace 보간법을 Thomas-Middlecoff 방법과 Sorenson 방법에 각각 적용시켜 보았으며, 각 보간법의 특징과 생성되는 격자계에 대하여 조사하였다.

2. 곡선 표현 및 경계격자 생성방법

2.1. 곡선의 표현

실제 복잡한 곡선을 표현하기 위하여 다양한 종류의 곡선이 지원되어야 하며, 특히 자유곡선을 표현할 수 있어야 한다. 자유곡선은 Bezier 곡선, B-spline 곡선 등이 있으나 이러한 모든 곡선들은 NURBS (Non-Uniform Rational B-Spline)에 의하여 표현이 가능하므로, NURBS를 이용하여 모든 자유곡선을 표현하고자 한다.

$$P(t) = \frac{\sum_{i=1}^{n+1} w_i B_i N_{i,k}(t)}{\sum_{i=1}^{n+1} w_i N_{i,k}(t)}$$

여기서, w_i 는 가중치, B_i 는 조절점의 좌표, $N_{i,k}(t)$ 는 non-rational B-spline의 기저함수이다.^[2]

2.2. 경계격자 분포 조절방법

자동격자생성 방법을 사용할 때 내부 격자를 생성하기 전에 경계 곡선을 따라 경계 격자점을 먼저 분포시켜야 하며, 경계격자 분포가 내부 격자에 직접적인 영향을 주므로, 경계격자 분포를 조절할 수 있는 다양한 방법을 제공하여야 한다. 본 연구에서는 네 가지 함수변환을 이용한 방법을 제시하고자 한다. 첫 번째의 멱함수를 이용한 경계격자 분포는 격자간격이 등비 r 의 등비수열을 이룬다.

2.1.1 멱함수 (등비수열)

$$s_i = S \frac{r^i - 1}{r^n - 1}$$

2.2.2 지수함수

$$s_i = S \frac{e^{a \frac{i}{n}} - 1}{e^a - 1}$$

2.3.3 hyperbolic tangent 함수

$$s_i = S \left(1 + \frac{\tanh(a(-\frac{i}{n} - 1))}{\tanh(a)} \right)$$

(4) hyperbolic sine 함수

$$s_i = S \left(1 + \frac{\sinh(a(-\frac{i}{n} - 1))}{\sinh(a)} \right)$$

3. 대수적 자동 격자 생성 방법

일반적으로 2차원 격자계를 보간법으로 형성할 때, ξ 와 η 방향의 정보를 동시에 사용하는 것이 바람직하며 이러한 보간 방법을 transfinite 보간법이라 한다.

$$\overrightarrow{P_\xi \oplus P_\eta} = \overrightarrow{P_\xi} + \overrightarrow{P_\eta} - \overrightarrow{P_\xi P_\eta}$$

여기서,

$$\overrightarrow{P_\xi} = \sum_i \phi_i(\xi) \vec{r}(\xi_i, \eta)$$

$$\overrightarrow{P_\eta} = \sum_j \psi_j(\eta) \vec{r}(\xi, \eta_j)$$

$$\overrightarrow{P_\xi \oplus P_\eta} = \sum_i \sum_j \phi_i(\xi) \psi_j(\eta) \vec{r}(\xi_i, \eta_j)$$

보간 함수 $\phi(\xi)$ 와 $\psi(\eta)$ 를 선택하는 방법에 따라 다음과 같이 구분할 수 있다.

3.1 선형 transfinite 보간법

선형 transfinite 보간법은 ξ, η 방향의 경계 격자점을 이용하여 선형 보간을 하는 것으로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\overrightarrow{P_\xi} = \phi_1(\xi) \vec{r}(0, \eta) + \phi_2(\xi) \vec{r}(1, \eta)$$

$$\overrightarrow{P_\eta} = \phi_1(\eta) \vec{r}(\xi, 0) + \phi_2(\eta) \vec{r}(\xi, 1)$$

$$\overrightarrow{P_\xi \oplus P_\eta} = \phi_1(\xi) [\phi_1(\eta) \vec{r}(0, 0) + \phi_2(\eta) \vec{r}(0, 1)]$$

$$+ \phi_2(\xi) [\phi_1(\eta) \vec{r}(1,0) + \phi_2(\eta) \vec{r}(1,1)]$$

여기서,

$$\phi_1(\xi) = 1 - \xi, \quad \phi_2(\xi) = \xi$$

3.2 Hermite transfinite 보간법

3차의 Hermite 곡선을 이용하여 보간을 수행하며, 경계면에서의 기울기를 3차 곡선을 위한 부가적인 정보로 사용할 수 있어 벽면의 직교성이 선형 transfinite보간법보다 우수하다.

$$\begin{aligned} \vec{P}_\xi &= \phi_1(\xi) \vec{r}(0, \eta) + \phi_2(\xi) \vec{r}(1, \eta) \\ &+ \phi_1(\xi) \vec{r}_\xi(0, \eta) + \phi_2(\xi) \vec{r}_\xi(1, \eta) \\ \vec{P}_\eta &= \phi_1(\eta) \vec{r}(\xi, 0) + \phi_2(\eta) \vec{r}(\xi, 1) \\ &+ \phi_1(\eta) \vec{r}_\eta(\xi, 0) + \phi_2(\eta) \vec{r}_\eta(\xi, 1) \\ \overline{P_\xi P_\eta} &= \phi_1(\xi) [\phi_1(\eta) \vec{r}(0,0) + \phi_2(\eta) \vec{r}(0,1) \\ &+ \phi_1(\eta) \vec{r}_\eta(0,0) + \phi_2(\eta) \vec{r}_\eta(0,1)] \\ &+ \phi_2(\xi) [\phi_1(\eta) \vec{r}(1,0) + \phi_2(\eta) \vec{r}(1,1)] \\ &+ \phi_1(\eta) \vec{r}_\eta(1,0) + \phi_2(\eta) \vec{r}_\eta(1,1)] \\ &+ \phi_1(\xi) [\phi_1(\eta) \vec{r}_\xi(0,0) + \phi_2(\eta) \vec{r}_\xi(0,1) \\ &+ \phi_1(\eta) \vec{r}_{\xi\eta}(0,0) + \phi_2(\eta) \vec{r}_{\xi\eta}(0,1)] \\ &+ \phi_2(\xi) [\phi_1(\eta) \vec{r}_\xi(1,0) + \phi_2(\eta) \vec{r}_\xi(1,1)] \\ &+ \phi_1(\eta) \vec{r}_{\xi\eta}(1,0) + \phi_2(\eta) \vec{r}_{\xi\eta}(1,1)] \end{aligned}$$

여기서,

$$\begin{aligned} \phi_1(\xi) &= (1+2\xi)(1-\xi)^2 \\ \phi_2(\xi) &= (3-2\xi)\xi^2 \\ \phi_1(\eta) &= (1-\eta)^2\eta \\ \phi_2(\eta) &= (\eta-1)\xi^2 \end{aligned}$$

경계면으로의 격자간격 d와 직교성을 이용한 Hermite 보간 곡선의 기울기는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$x_\xi = \pm \frac{d y_\eta}{\sqrt{x_\eta^2 + y_\eta^2}}$$

$$y_\xi = \pm \frac{d x_\eta}{\sqrt{x_\eta^2 + y_\eta^2}}$$

$$x_\eta = \pm \frac{d y_\xi}{\sqrt{x_\xi^2 + y_\xi^2}}$$

$$y_\eta = \pm \frac{d x_\xi}{\sqrt{x_\xi^2 + y_\xi^2}}$$

4. 해석적 자동 격자 생성 방법

격자계를 생성하기 위하여 사용되는 가장 일반적인 방법들 중의 하나는 타원형 편미분 방정식을 이용하는 것으로, 이 방법은 닫혀진 영역의 경계조건으로부터 타원형 편미분 방정식을 풀어 내부 격자를 형성하므로 원활한 격자계를 만들 수 있다는 장점이 있다. 격자계를 생성하기 위한 타원형 편미분 방정식은 아래와 같다.

$$\xi_{xx} + \xi_{yy} = P, \quad \eta_{xx} + \eta_{yy} = Q \quad (1)$$

여기서 ξ, η 는 계산 공간의 좌표계, x, y 는 실제 공간의 좌표계를 나타내며 P와 Q는 내부 격자계를 조절하기 위한 조절함수이다. 각 좌표계 간의 관계는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \xi_x &= y_\eta / J, \quad \xi_y = -x_\eta / J \\ \eta_x &= -y_\xi / J, \quad \eta_y = x_\xi / J \end{aligned}$$

여기서,

$$J = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi$$

위의 관계식을 좌표계에 대한 Poisson 식 (1)에 대입하면, 다음과 같이 변환된 좌표계에서의 식을 얻을 수 있다.^[4]

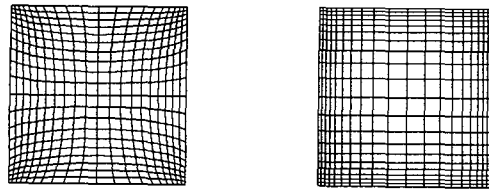
$$\begin{aligned} \alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta} &= -J^2 (P x_\xi + Q x_\eta) \\ \alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta} &= -J^2 (P y_\xi + Q y_\eta) \end{aligned} \quad (2)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \alpha &= x_\eta^2 + y_\eta^2 \\ \beta &= x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta \\ \gamma &= x_\xi^2 + y_\xi^2 \end{aligned}$$

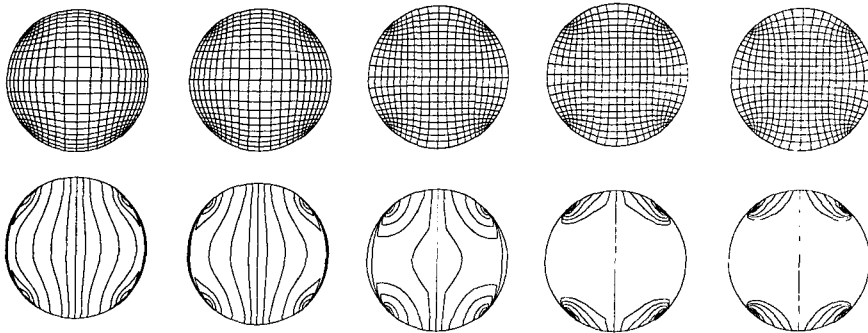
조절함수가 모두 영인 경우 내부 격자계는 Laplace 방정식에 의해 지배되므로 Fig.1(a)에서 보는 바와 같이 경계 격자의 분포에 관계없이 균일한 내부 격자계를 형성하며, 경계 격자의 분포가 고려된 조절함수를 이용하면 Fig.1(b)와 같이 경계가 밀집된 격자계를 얻을 수 있다. 이와 같이, 직교성과 연속성이 뛰어나며 경계격자의 분포에 따라 밀집정도를 조절할 수 있는 격자계를 생성하기 위해서는 적절한 조절함수가 필요하게 되는데, 자동 격자 생성 방법에는 조절함수 P, Q를 결정하는 방법에 따라 Thomas-Middlecoeff^[3]에 의한 방법과 Sorenson^[4]에 의한 방법 등이 있다.

Thomas-Middlecoeff에 의한 해석적 방법은



(a) Laplace equation (b) Poisson equation

Fig.1 Comparison of 21x21 grid systems with different equation



(a) (b) (c) (d) (e)

Fig.2 Comparison of 21x21 grid systems and control function among different interpolation of control function based on Thomas-Middlecoff method

- (a) linear interpolation
- (b) exponential interpolation (E=W=S=N=0.1)
- (c) exponential interpolation (E=W=S=N=0.2)
- (d) exponential interpolation (E=W=S=N=0.5)
- (e) Laplace interpolation (Contour levels: 0, ±5, ±10, ±20, ±50, ±100, ±200, ±500)

D. A. Anderson and J. Steinbrenner^[5], D. A. Anderson^[6]에 의하여 더 연구되었으며, Sorenson의 방법은 R. L. Sorenson^[7], K. Hsu and S. L. Lee^[8], Y. N. Jeng and Y. C. Liou^[9]에 의하여 더욱 연구되었다.

4.1 Thomas-Middlecoff 방법

Thomas-Middlecoff 방법은 내부 격자계를 경계 격자의 분포에 따라 부분적으로 밀집시키기 위하여 다음과 같이 조절함수가 지수적인 해를 가지게 하였다.

$$P = \phi(\xi, \eta) (\xi_x^2 + \xi_y^2)$$

$$Q = \psi(\xi, \eta) (\eta_x^2 + \eta_y^2) \quad (3)$$

격자계의 경계 수직성을 만족시키기 위하여 경계에서의 수직성(Orthogonality to the boundary)과 국소적인 직진성(Locally straight)을 제한조건으로 사용하였다.

$$r_\xi \cdot r_\eta = 0 \quad (4)$$

$$(x_\eta / y_\eta)_\eta = 0 \quad \text{on} \quad \eta = \eta_b$$

$$(x_\xi / y_\xi)_\xi = 0 \quad \text{on} \quad \xi = \xi_b \quad (5)$$

식 (4), (5)의 조건식을 식 (2)에 대입하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\phi_{\min} = -(x_\xi x_{\xi\xi} + y_\xi y_{\xi\xi}) / (x_\xi^2 + y_\xi^2) \quad \text{on} \quad \eta = \eta_{\min}$$

$$\phi_{\max} = -(x_\xi x_{\xi\xi} + y_\xi y_{\xi\xi}) / (x_\xi^2 + y_\xi^2) \quad \text{on} \quad \eta = \eta_{\max}$$

$$\psi_{\min} = -(x_\eta x_{\eta\eta} + y_\eta y_{\eta\eta}) / (x_\eta^2 + y_\eta^2) \quad \text{on} \quad \xi = \xi_{\min}$$

$$\psi_{\max} = -(x_\eta x_{\eta\eta} + y_\eta y_{\eta\eta}) / (x_\eta^2 + y_\eta^2) \quad \text{on} \quad \xi = \xi_{\max} \quad (6)$$

Thomas-Middlecoff 방법은 경계 격자점으로부터 경계 조절 함수를 유일하게 결정할 수 있으므로 쉽고 빠르게 자동격자생성을 할 수 있다. 내부 격자계의 조절함수는 ϕ_{\min} , ϕ_{\max} , ψ_{\min} , ψ_{\max} 값을 각 방향으로 보간을 취하여 내부에서의 $\phi(\xi, \eta)$, $\psi(\xi, \eta)$ 를 계산한 다음 식 (3)에 대입하여 조절함수 P, Q를 결정한다.

4.1.1 선형 보간법

경계의 $\phi_{min}, \phi_{max}, \psi_{min}, \psi_{max}$ 값을 선형 보간하여 내부격자의 $\phi(\xi, \eta), \psi(\xi, \eta)$ 값을 계산하는 선형 보간법은 Thomas-Middlecoff 방법에서 제시된 것으로 조절함수의 분포를 선형적으로 원활하게 적용시킬 수 있어 벽면 격자의 성질이 우수한 격자계를 생성할 수 있다.

Fig.2(a)는 Thomas-Middlecoff 방법으로 경계에서의 ϕ, ψ 값을 계산하고 이를 선형 보간하여 내부의 ϕ, ψ 값을 구한 후 식 (3)에 대입하여 조절함수를 계산할 때, 생성된 격자계와 조절함수 P의 분포를 나타낸 예로서 내부 격자계가 경계에서의 수직성을 비교적 잘 만족하고 있으며 경계 격자의 분포를 따라 내부 격자계가 조밀하도록 생성되었다. 조절함수 P는 경계에서의 수직성을 만족하기 위하여 곡률이 심한 곳에서 높은 값을 나타내고 있음을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} \phi(\xi, \eta) &= \frac{\eta_{max} - \eta}{\eta_{max} - \eta_{min}} \phi_{min} + \frac{\eta}{\eta_{max} - \eta_{min}} \phi_{max} \\ \psi(\xi, \eta) &= \frac{\xi_{max} - \xi}{\xi_{max} - \xi_{min}} \psi_{min} + \frac{\xi}{\xi_{max} - \xi_{min}} \psi_{max} \end{aligned} \quad (7)$$

4.1.2 지수형 보간법

경계의 $\phi_{min}, \phi_{max}, \psi_{min}, \psi_{max}$ 값을 지수 보간하여 내부 격자의 ϕ, ψ 값을 계산하므로 경계 격자의 영향을 지수적으로 감쇄시켜 내부 격자계를 생성할 수 있다.

$$\begin{aligned} \phi(\xi, \eta) &= \phi_{min} e^{-S\eta} + \phi_{max} e^{-N(\eta_{max} - \eta)} \\ \psi(\xi, \eta) &= \psi_{min} e^{-W\xi} + \psi_{max} e^{-E(\xi_{max} - \xi)} \end{aligned} \quad (8)$$

위 식에서 E(east), W(west), S(south), N(north)는 각 방향의 경계 격자 분포의 영향을 내부 격자계에 반영시킬 수 있는 계수들으로써, 이 계수들을 이용하여 각 방향 경계의 ϕ, ψ 의 영향을 조절할 수 있다.

Fig.2(b), (c), (d)는 Thomas-Middlecoff 방법으로 경계 조절함수를 구하고 지수형 보간으로 내부 조절함수를 계산하여 격자계를 형성한 예이다. 감쇄계수가 작을수록 경계 영역에서 조절함수 값이 크기 때문에 경계 영역 격자계의 격자 간격과 직교성이 우수하고, 감쇄계수가 클수록 내부 격자계가 원활하다.

지수형 보간에서의 방향에 따른 감쇄를 조절은 경계 격자에 불연속점이 있을 때 큰 감쇄 계

수를 사용하여 내부 격자계를 부드럽게 만들 수 있어, 임의의 경계에서 원활한 격자계를 만들 수 있다는 장점이 있다.

4.1.3 Laplace 보간법

Laplace 방정식을 이용하여 경계면에서의 조절함수 $\phi_{min}, \phi_{max}, \psi_{min}, \psi_{max}$ 값으로부터 내부 조절함수를 계산하는 보간법이다.

Thomas-Middlecoff 방법에서는 ϕ 와 ψ 값이 ξ, η 축을 따라 한 쪽 방향으로만 정의되므로, 정의되지 않은 축에 대하여는 Neumann 경계조건을 사용한다.

$$\begin{aligned} \phi_{\xi\xi} + \phi_{\eta\eta} &= 0 \\ \psi_{\xi\xi} + \psi_{\eta\eta} &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Laplace 보간법을 이용하면 내부 격자의 ϕ 와 ψ 값이 Laplace 방정식에 의해 분포되므로 전체적으로 균일한 성질의 내부 격자계를 얻을 수 있다.

4.2 Sorenson 방법

경계면에서의 벽면 거리 및 교차각을 사용하여 조절함수를 결정하는 방법으로 경계 부근에서 격자의 수직성이 우수하고 경계에 불연속점이 있을 때에도 우수한 격자계를 생성할 수 있다.

경계면에서의 벽면 거리는 다음의 식과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} s_{\eta} |_{k=1} &= [x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2]^{1/2} \\ s_{\xi} |_{k=1} &= [x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2]^{1/2} \end{aligned} \quad (10)$$

경계면에서 격자의 교차각은 다음의 식과 같이 표현할 수 있다.

$$[\nabla \xi \cdot \nabla \eta]_{k=1} = [|\nabla \xi| |\nabla \eta| \cos \theta]_{k=1} \quad (11)$$

s_{η} 는 경계 ($\eta = \eta_{min}, \eta = \eta_{max}$)에서의 내부 방향으로의 격자 간격이고, θ 는 경계면과 내부 격자선의 교차각이다. 식 (10), (11)의 조건으로부터 경계 격자에서의 조절함수 P, Q의 값을 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$P(\xi, 0) = \left[\frac{y_{\eta} R_1 - x_{\eta} R_2}{J} \right]_{k=1}$$

$$P(\xi, 1) = \left[\frac{y_\eta R_3 - x_\eta R_4}{J} \right]_{k=k_{max}}$$

$$Q(\xi, 0) = \left[\frac{-y_\xi R_1 + x_\xi R_2}{J} \right]_{k=1}$$

$$Q(\xi, 1) = \left[\frac{-y_\xi R_1 + x_\xi R_2}{J} \right]_{k=k_{max}}$$

$$[R_1] = \left[\frac{-(ax_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta})}{j^2} \right]_{k=1}$$

$$[R_2] = \left[\frac{-(ay_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta})}{j^2} \right]_{k=1}$$

$$[R_3] = \left[\frac{-(ax_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta})}{j^2} \right]_{k=k_{max}}$$

$$[R_4] = \left[\frac{-(ay_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta})}{j^2} \right]_{k=k_{max}}$$

$$x_\eta |_{k=1} = \left[\frac{s_\eta(-x_\xi \cos \theta - y_\xi \sin \theta)}{\sqrt{x_\xi^2 + y_\xi^2}} \right]_{k=1}$$

$$y_\eta |_{k=1} = \left[\frac{s_\eta(-y_\xi \cos \theta + x_\xi \sin \theta)}{\sqrt{x_\xi^2 + y_\xi^2}} \right]_{k=1}$$

$$x_\eta |_{k=k_{max}} = \left[\frac{s_\eta(-x_\xi \cos \theta - y_\xi \sin \theta)}{\sqrt{x_\xi^2 + y_\xi^2}} \right]_{k=k_{max}}$$

$$y_\eta |_{k=k_{max}} = \left[\frac{s_\eta(-y_\xi \cos \theta + x_\xi \sin \theta)}{\sqrt{x_\xi^2 + y_\xi^2}} \right]_{k=k_{max}}$$

위와 같이 Sorenson 방법은 경계 조절함수를 계산할 때 내부 격자를 필요로 하기 때문에 Thomas-Middlecoff 방법에 비해 반복 계산에 많

은 시간이 소요되어 수렴이 느린 단점이 있지만, 일반적으로 임의의 형상에서 직교성과 경계 밀집성이 뛰어난 우수한 격자계를 얻을 수 있다.

4.2.1 선형 보간법

모든 경계에 조절함수값이 존재하므로 ξ, η 방향의 선형 transfinite 보간을 취해 내부 격자의 조절함수를 결정한다. Sorenson 방법에서의 선형보간은 내부 격자의 조절함수가 지나치게 큰 값을 가져 Fig.3(a)에서 보는 바와 같이 수렴하지 않고 발산함을 알 수 있다.

즉, 선형보간법은 사용된 보간법 중 내부 격자계가 경계의 영향을 가장 많이 받는 보간법으로 내부 격자를 경계 형상에 맞추어 생성하고자 할 때 유용한 방법이다.

$$P(\xi, \eta) = \phi_1(\xi)P(0, \eta) + \phi_2(\xi)P(1, \eta) + \phi_1(\eta)P(\xi, 0) + \phi_2(\eta)P(\xi, 1) - \phi_1(\xi)[\phi_1(\eta)P(0, 0) - \phi_2(\eta)P(0, 1)] - \phi_2(\xi)[\phi_1(\eta)P(1, 0) + \phi_2(\eta)P(1, 1)]$$

where, $\phi_1(\xi) = 1 - \xi, \phi_2(\xi) = \xi$
 $\phi_1(\eta) = 1 - \eta, \phi_2(\eta) = \eta$

4.2.2 지수형 보간법

Sorenson 방법에서 제안된 지수형 보간법은 경계 조절함수를 지수 보간하여 내부 조절함수를 계산한다.

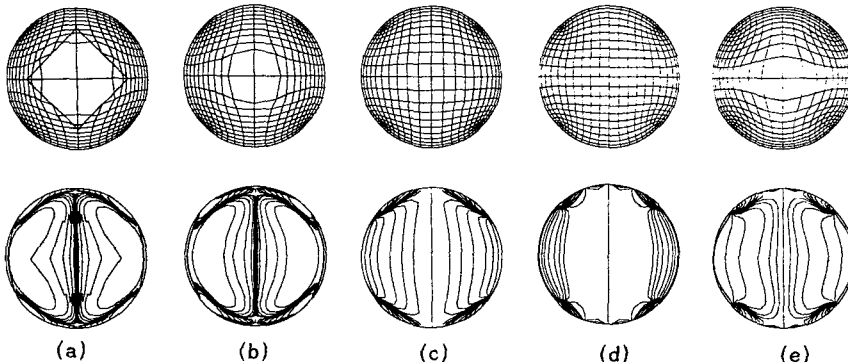


Fig.3 Comparison of 21x21 grid systems and control function among different interpolation of control function based on Sorenson method

- (a) linear interpolation
 - (b) exponential interpolation (E=W=S=N=0.2)
 - (c) exponential interpolation (E=W=S=N=0.5)
 - (d) exponential interpolation (E=W=S=N=1.0)
 - (e) Laplace interpolation
- (Contour levels: 0, ±5, ±10, ±20, ±50, ±100, ±200, ±500)

$$P(\xi, \eta) = P(0, \eta) e^{-W(\eta - \eta_{min})} + P(1, \eta) e^{-E(\eta_{max} - \eta)} \\ + P(\xi, 0) e^{-S(\xi - \xi_{min})} + P(\xi, 1) e^{-N(\xi_{max} - \xi)}$$

여기서 E(east), W(west), S(south), N(north)는 각 방향의 경계 격자 분포의 영향을 내부 격자계에 반영시킬 수 있는 계수들이다.

Fig. 3(b), (c), (d)는 Sorenson 방법에서 지수형 보간법을 이용하여 내부 격자계를 형성한 예로써, 감쇄계수가 작을수록 경계 조절함수가 내부로 멀리 전파되어 내부 격자계의 조절함수가 큰 값을 가짐을 알 수 있다.

4.2.3 Laplace 보간법

Sorenson 방법에서는 모든 경계에서 조절함수 값이 정의 되므로 Dirichlet 경계 조건을 이용하여 Laplace 보간을 수행한다. 조절함수에 대하여 Laplace 방정식을 계산하는 이 보간법은 어떠한 경계형상에서도 전체적으로 균일한 격자계를 얻을 수 있다.

$$P_{\xi\xi} + P_{\eta\eta} = 0$$

$$Q_{\xi\xi} + Q_{\eta\eta} = 0$$

5. 계산결과 및 토의

Fig.4에서 보는 바와 같이 세가지 경우의 격자

계에 대하여 자동격자생성 방법들을 비교하였다. 선형 transfinite 방법과 Hermite transfinite 방법, Thomas-Middlecoff 방법, 그리고 Sorenson 방법을 사용하여, 21x21 격자계를 형성하였다. 경계격자는 동일한 것을 사용하였으나, 내부 격자는 자동격자생성 방법에 따라 서로 다른 내부 격자를 형성함을 알 수 있다. 내부 조절함수를 결정하기 위하여, Thomas-Middlecoff 방법과 Sorenson 방법은 각각 선형보간과 지수형 보간(E=W=S=N=0.5)을 사용하였다. Fig. 4(c), Fig. 4(d)의 해석적 자동격자생성 방법을 사용한 첫 번째 형상의 예에서 조절함수는 격자 간격이 조밀한 경계 영역에서 큰 값을 나타내고 형상의 중앙에서 0에 가까운 값을 가져, 경계 영역이 조밀한 내부 격자계를 형성하였다. 조절함수가 0에 가까운 값을 가지면 격자계가 Laplace 방정식에 의해 지배되어 모든 격자가 균일한 크기로 생성되려는 성질이 강하며, 조절함수의 절대값이 클수록 직교성을 만족시키고 경계격자의 분포에 따르려는 성질이 강하다. 두 번째 경계 격자에서는 대수적 방법을 이용한 격자계로는 Hermite transfinite 방법이, 해석적 방법을 이용한 격자계로는 Sorenson 방법이 경계 영역에서의 직교성을 잘 만족하고 있다. 이 경우는 경계 격자계가 3차식의 Hermite 곡선에 적합하도록 분포되어 있기

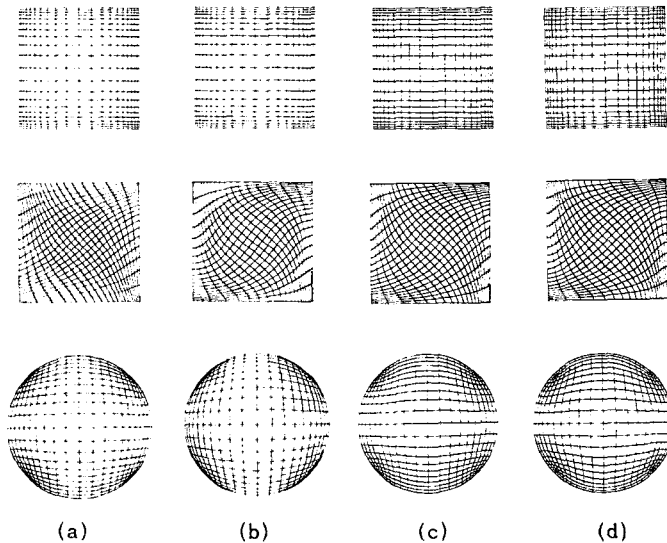


Fig. 4 Comparison of 21x21 grid systems among four automatic grid generation methods
 (a) linear transfinite method (b) Hermite transfinite method
 (c) Thomas-Middlecoff method (with linear interpolation of control function)
 (d) Sorenson method (with exponential interpolation, E=W=S=N=0.5 of control function)

때문에 Sorenson 방법보다 오히려 대수적 방법인 Hermite 방법으로 형성한 격자계가 뛰어난 직교성을 보이고 있으나, 세 번째 경계 격자와 같이 수직성을 만족하기 위하여 4차식이 필요한 경우 Hermite 방법으로는 우수한 격자계를 만들 수 없음을 알 수 있다. 즉, 경계의 형상과 경계 격자의 분포 경향에 따라 쉽고 빠르게 우수한 격자계를 생성할 수 있는 방법을 선택하여야 한다. 세 번째 경계 격자와 같이 비교적 벽면에서의 수직성을 만족하기 어려운 예에서는 대수적 방법에 비해 해석적 방법이 우수한 격자계를 형성한다. 해석적 자동격자생성 방법은 경계 영역에서의 직교성과 격자계의 원활성을 만족하기 위하여 조절함수 P, Q의 값을 이용하여 격자계의 분포를 조절하므로, 일반적으로 대수적 방법보다 우수한 성질의 격자계를 생성할 수 있다. 해석적 방법 중 Sorenson 방법이 Thomas-Middlecoff 방법에 비해 경계영역의 직교성과 벽면으로의 일정한 격자간격을 잘 만족하고 있다. 조절함수 P가 (-)이면 $\xi=const$ 의 곡률을 (-)에, (+)이면 곡률을 (+)에 가깝도록 하려는 성질이 있는데, (c)는 네 꼭지점에서 P가 각각 (+)나 (-) 값을 가지는 반면 (d)는 꼭지점 뿐만 아니라 경계면에서 양 꼭지점과 반대되는 부호의 P값을 가지기 때문에 Sorenson 방법을 이용

하여 만들어진 격자계가 경계 영역의 직교성을 더욱 잘 만족하고 있다.

조절함수의 여러가지 보간법을 사용한 Thomas-Middlecoff 방법들이 Fig.5에 나타나 있다. 선형 보간이 내부 격자계에 경계 조절함수의 영향을 가장 많이 미치므로 선형 보간법으로 형성한 (a)의 예가 경계 영역의 성질이 좋으며, 경계의 영향이 줄어들수록 내부 영역의 성질이 좋아짐을 알 수 있다. 두 번째 경계 격자에서 지수형 보간법으로 만들어진 격자계가 감쇄계수가 작을수록 격자계의 분포가 원활하지 않음을 알 수 있는데, 이는 Thomas-Middlecoff 방법에서 지수형 보간을 이용한 조절함수의 분포 정도가 선형 보간이나 Laplace 보간보다 부드럽지 못하기 때문으로 경계 격자의 분포에 따라 지수형 보간법이 격자계의 원활성을 저하시킬 수도 있음을 보여주고 있다. Laplace 보간법은 전 영역의 조절함수값을 부드럽게 분포시키므로 균일한 크기의 격자계를 생성할 수 있고, 특히 두 번째 경계 격자의 예에서는 조절함수의 Laplace 보간이 경계 영역의 직교성이 뛰어난 격자계를 형성하고 있다.

Sorenson 방법은 경계 영역에서 직교성이 우수하고 일정한 격자간격을 유지한다는 장점이 있어, 일반적으로 Thomas-Middlecoff 방법보다

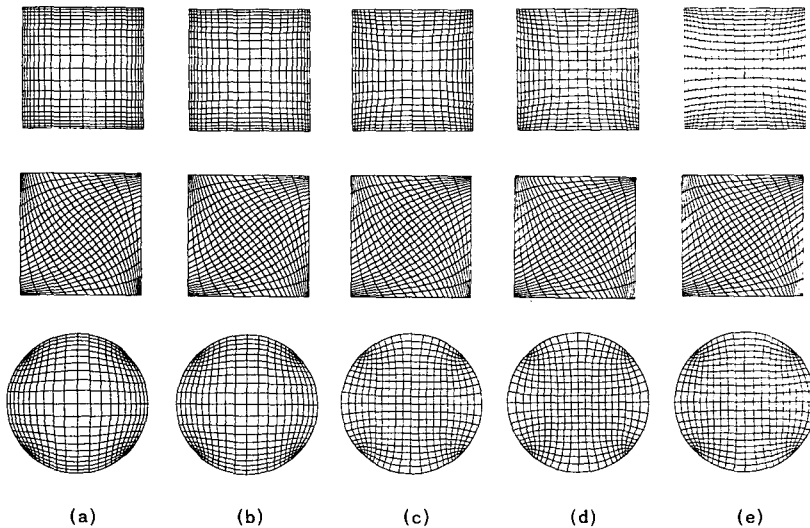


Fig.5 Comparison of 21x21 grid systems among different interpolation of control function based on Thomas-Middlecoff method

- (a) linear interpolation
- (b) exponential interpolation(E=W=S=N=0.1)
- (c) exponential interpolation(E=W=S=N=0.2)
- (d) exponential interpolation(E=W=S=N=0.5)
- (e) Laplace interpolation

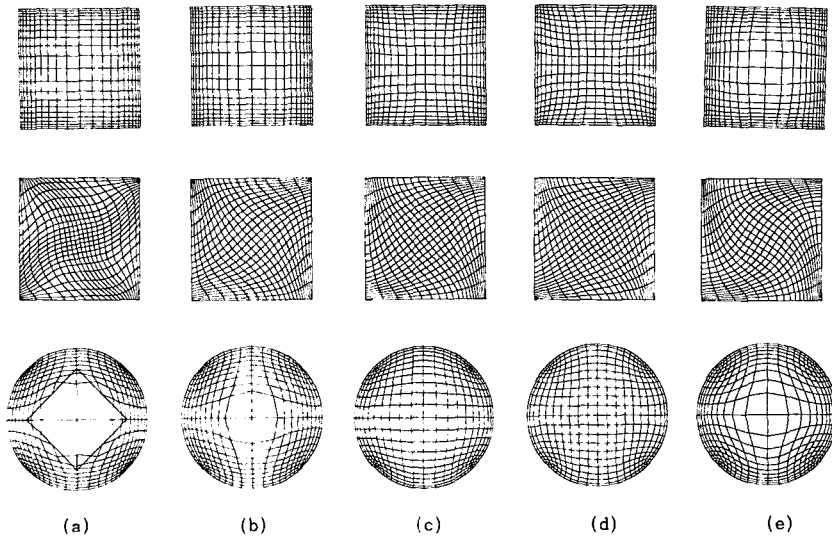


Fig. 6 Comparison of 21x21 grid systems among different interpolation of control function based on Sorenson method

- (a) linear interpolation
- (b) exponential interpolation(E=W=S=N=0.2)
- (c) exponential interpolation(E=W=S=N=0.5)
- (d) exponential interpolation(E=W=S=N=1.0)
- (e) Laplace interpolation

때문에 Sorenson 방법보다 오히려 대수적 방법인 Hermite 방법으로 형성한 격자계가 뛰어난 직교성을 보이고 있으나, 세 번째 경계 격자와 같이 수직성을 만족하기 위하여 4차식이 필요한 경우 Hermite 방법으로는 우수한 격자계를 만들 수 없음을 알 수 있다. 즉, 경계의 형상과 경계 격자의 분포 경향에 따라 쉽고 빠르게 우수한 격자계를 생성할 수 있는 방법을 선택하여야 한다. 세 번째 경계 격자와 같이 비교적 벽면에서의 수직성을 만족하기 어려운 예에서는 대수적 방법에 비해 해석적 방법이 우수한 격자계를 형성한다. 해석적 자동격자생성 방법은 경계 영역에서의 직교성과 격자계의 원활성을 만족하기 위하여 조절함수 P, Q의 값을 이용하여 격자계의 분포를 조절하므로, 일반적으로 대수적 방법보다 우수한 성질의 격자계를 생성할 수 있다. 해석적 방법 중 Sorenson 방법이 Thomas-Middlecoff 방법에 비해 경계영역의 직교성과 벽면으로의 일정한 격자간격을 잘 만족하고 있다. 조절함수 P가 (-)이면 $\xi = \text{const}$ 의 곡률을 (-)에, (+)이면 곡률을 (+)에 가깝도록 하려는 성질이 있는데, (c)는 네 꼭지점에서 P가 각각 (+)나 (-) 값을 가지는 반면 (d)는 꼭지점 뿐만 아니라 경계면에서 양 꼭지점과 반대되는 부호의 P값을 가지기 때문에 Sorenson 방법을 이용하여 만들어진 격자계가 경계 영역의 직교성을

더욱 잘 만족하고 있다.

조절함수의 여러가지 보간법을 사용한 Thomas-Middlecoff 방법들이 Fig. 5에 나타나 있다. 선형 보간이 내부 격자계에 경계 조절함수의 영향을 가장 많이 미치므로 선형 보간법으로 형성한 (a)의 예가 경계 영역의 성질이 좋으며, 경계의 영향이 줄어들수록 내부 영역의 성질이 좋아짐을 알 수 있다. 두 번째 경계 격자에서 지수형 보간법으로 만들어진 격자계가 감쇄계수가 작을수록 격자계의 분포가 원활하지 않음을 알 수 있는데, 이는 Thomas-Middlecoff 방법에서 지수형 보간을 이용한 조절함수의 분포 정도가 선형 보간이나 Laplace 보간보다 부드럽지 못하기 때문으로 경계 격자의 분포에 따라 지수형 보간법이 격자계의 원활성을 저하시킬 수도 있음을 보여주고 있다. Laplace 보간법은 전 영역의 조절함수값을 부드럽게 분포시키므로 균일한 크기의 격자계를 생성할 수 있고, 특히 두 번째 경계 격자의 예에서는 조절함수의 Laplace 보간이 경계 영역의 직교성이 뛰어난 격자계를 형성하고 있다.

Sorenson 방법은 경계 영역에서 직교성이 우수하고 일정한 격자간격을 유지한다는 장점이 있어, 일반적으로 Thomas-Middlecoff 방법보다 우수한 격자계를 형성할 수 있다. 그러나, Fig. 6에서 보는 바와 같이 경계 격자의 분포에 따라 적절한 조절함수의 보간법을 선택하는 것

이 중요하다. Sorenson 방법에서 내부 격자가 경계 격자 분포의 영향을 적게 받아야 할 경우 선형 보간법은 적절하지 않다. 특히, Fig. 6(a)의 세 번째 원형 단면의 경우는 수렴하지 않고 발산함을 알 수 있다. Fig.6 세 번째 경계 격자의 예에서 지수형 보간법을 사용하였을 때 감쇄 계수가 커질수록 격자계가 우수하지만, 이는 경계 격자에 따라 다르므로 임의의 형상으로 격자계를 생성할 때 경계 격자의 분포에 따라 감쇄 계수를 적절히 조절하여야 한다. Laplace 보간법은 두 번째 경계 격자의 경우, 역시 직교성을 가장 잘 만족하고 있으나 세 번째 경계 격자에서 내부영역의 성질이 좋지 않다.

위와 같이 자동 격자생성은 문제의 특성과 형상에 따라 최적의 방법이 다르므로 각 조절함수의 보간 방법에 따른 격자계의 성질을 잘 파악하여 원하는 격자계의 분포에 적합한 방법을 선택하여야 한다.

6. 결론

해석적 방법에 있어서 Thomas-Middlecoff 방법은 경계에서의 수직성이나 격자 간격의 조절이 바람직하지는 않지만 경계에서의 조절함수 값이 적당한 크기이므로 수렴성이 좋으며, Sorenson 방법은 경계에서의 수직성이나 격자 크기 조절이 우수하지만, 경계 조절 함수의 값이 너무 커서 보간 방법에 따라 수렴이 어려운 문제가 있다.

내부 조절함수의 보간에 있어서, 선형 보간은 불합리한 내부 조절함수를 만들어 수렴이 안 되는 경우가 있다.(Fig. 3(a), 6(a) 참조) Laplace 보간은 조절함수가 부드럽게 변화하므로 선형 보간보다는 수렴성에서 유리하며 지수형 보간은 계수를 조절하여 다양한 경우를 조절하는 것이 가능하다.

후 기

이 논문은 1994년도 한국학술진흥재단의 공보 과제 연구비에 의하여 진행되었음.

참고문헌

- [1] J.F.Thompson, Z.U.A.Warsi, and C.W. Martin, "Numerical Grid Generation" North-Holland, New York (1982)
- [2] D.F.Rogers and J.A.Adams, "Mathematicla Elements for Computer Graphics", McGraw-Hill, New York (1990)
- [3] J.L.Steger and R.L.Sorenson, "Automatic Mesh-Point Clustering near a Boundary in Grid Generation with Elliptic Partial Differential Equations," J. Comp. Phys. (1979), vol.33, pp.405-510
- [4] P.D.Thomas and J.F.Middlecoff, "Direct Control of the Grid Point Distribution in Meshes Generated by Elliptic Equations," AIAA J., (1980) vol.18, pp.652-656
- [5] D.A.Anderson and J.Steinbrenner, "Generating Adaptive Grids with a Conventional Grid Scheme," AIAA Paper (1986) 86-0427
- [6] D.A.Anderson, "Equidistribution Schemes, Poisson Generators and Adaptive Grids," Appl. Math. Comput. (1987) vol.24, pp.211-227
- [7] R.L.Sorenson, "Three-Dimensional Elliptic Grid Generation about Fighter Aircraft for Zonal Finite-Difference Computations," AIAA Paper (1986) 86-0429
- [8] K.Hsu and S.L.Lee, "A Numerical Technique for Two Dimensional Grid Generation with Grid Control at All of the Boundaries," J. Comp. Phys. (1991) vol.92, pp.451-469
- [9] Y.N.Jeng and Y.C.Liou, "Two Modified Versions of Hwu-Lee's Elliptic Solver of Grid Generation," Numer. Heat Transfer (1992) Part B, vol.22, pp. 125-140