

첨가된 질량이 있는 단순지지된 샌드위치 패널에 대한 간편한 진동해석의 적용

이정호* · 김성환** · 정경일** · 이봉학***

Application of Simple Method of Vibration Analysis to the Simply Supported Sandwich Panels with Point Mass/Masses

Jung-ho Lee* · Seong-Hwan Kim** · Kyoung-il Jung** · Bong-Hak Lee***

ABSTRACT

Many of the bridge systems, including the girders and cross-beams, and concrete decks behave as the special orthotropic plates. A method of calculating the natural frequency corresponding to the first mode of vibration of beam and tower structures with irregular cross-sections was developed and reported by D. H. Kim in 1974. Since 1989, The author has extended this method to Vibration analysis of two dimensional problems including composite laminates, and has reported at several conferences. Frequently, the bridge floor panels are supported by girders and cross beams. Such panels as well as some of the building floor panels can be assumed as simple supported special orthotropic plates.

In this paper, the result of application of simple method of vibration analysis developed by D. H. Kim, to the simply supported sandwich panels with point Mass/Masses is presented.

1. 서론

보와 타워의 제1모드에서의 고유진동수를 구하는 정확한 해는 1974년에 D. H. Kim에 의해 발표되었다. 최근 이 방법은 Composite 복합판을 포함하는 2차원 문제의 제 1모드 진동해석에 확장되었으며, 1989년에 제 1차 일본첨단재료기술협회 국

제회의(JISSE-1)에서 발표되었다. 또한 2차원 문제의 제2모드 진동에 대한 진동해석이 1990년 미국 토목학회 제8차 구조공학 학술발표회에서 발표되었으며, 두꺼운 적층판에 대한 적용이 1991년 제8차 국제복합재료학회 및 JISSE-2에 발표되었다.^{[1][2][3][4]}

거더와 cross-beam, 콘크리트 상판을 포함하는 대부분의 교량 구조는 특별직교 이방성 판과 같이 거동하며 이러한 패널 뿐만 아니라 건물 바닥판 패널의 몇몇 경우도 단순지지된 특별직교 이방성 판과 같이

* 강원대학교 토목공학과 박사과정

** 강원대학교 토목공학과 석사과정

** 강원대학교 토목공학과 석사과정

*** 강원대학교 토목공학과 교수

거동한다. 토목구조물에서 문제가 되는 자중을 감소시키기 위해 샌드위치 패널이 사용될 수 있다.^{[5][6]} 설계기술자들은 설계시 고유진동수를 계산하는 것을 필요로 하지만 이러한 문제에 있어서 정확한 해를 구하기는 매우 어렵다.^[7]

따라서 본 논문에서는 이전의 D. H. Kim의 고유진동수를 구하는 방법을 건물용 바닥판 또는 샌드위치패널에 적용하였다.

2. 적층복합판 이론

2.1 적층복합판의 이론

박판에 대한 고전이론은 판의 중립면에서의 변형은 없고 변형전 중립면의 법선상에 있는 점은 변형후에도 중립면의 법선상에 있으며, 판의 중앙면에 수직인 방향에서의 응력은 무시될 수 있다는 것이다. 횡전단 변형이 무시될 때 적층복합판의 평형방정식은 3개의 4차 편미분 방정식으로 나타낸다^[5].

$$\begin{aligned} & A_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A_{16} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ & + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - B_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \\ & - 3B_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \\ & - B_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = 0 \end{aligned} \quad (1.a)$$

$$\begin{aligned} & A_{16} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ & + A_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2A_{26} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - B_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \\ & - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - 3B_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \\ & - B_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = 0 \end{aligned} \quad (1.b)$$

$$\begin{aligned} & D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \\ & + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - B_{11} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \\ & - 3B_{16} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \\ & - B_{26} \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - B_{16} \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} \\ & - 3B_{26} \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} - B_{22} \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} = q(x, y) \end{aligned} \quad (1.c)$$

여기서 [A] matrix는 인장강성으로서 면내 합응력(N)과 중립면에서의 변형률(ϵ)사이의 관계를 나타내며 [D] matrix는 휨강성으로 응력 couples(M)과 곡률(κ)사이의 관계를 나타낸다. [B] matrix는 휨-인장 연계강성을 나타낸다.

A_{16} 와 A_{26} 항들은 extension-shear에 대한 것이며, B_{16} 와 B_{26} 는 휨-전단과 팽창(extension)-뒤틀림(twisting)에 관한 항들이다. D_{16} 와 D_{26} 는 휨(bending)-뒤틀림(twisting)항을 만든다.

2.2 적층복합판의 강성 매트릭스

위의 2.1절에서 적층복합판의 평형방정식인 3개의 4차 편미분방정식 중 강성 matrix A, B, D는 다음과 같이 두께의 함수로 표시할 수 있다.

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (h_k - h_{k-1}) \quad (2.a)$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (h_k^2 - h_{k-1}^2) \quad (2.b)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (h_k^3 - h_{k-1}^3) \quad (2.c)$$

여기서 h 는 laminate의 두께이고, \bar{Q}_{ij} 는 평면 응력의 경우에 대한 축소된 강성 matrix이다.

$$\begin{aligned}
\bar{Q}_{11} &= Q_{11}m^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})m^2n^2 + Q_{22}n^4 \\
\bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})m^2n^2 + Q_{12}(m^4 + n^4) \\
\bar{Q}_{13} &= Q_{13}m^2 + Q_{23}n^2 \\
\bar{Q}_{16} &= -Q_{22}mn^3 + Q_{11}m^3n - (Q_{12} + 2Q_{66}) \\
&\quad \times mn(m^2 - n^2) \\
\bar{Q}_{22} &= Q_{11}n^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})m^2n^2 + Q_{22}m^4 \\
\bar{Q}_{23} &= Q_{13}n^2 + Q_{23}m^2 \\
\bar{Q}_{26} &= -Q_{22}m^3n + Q_{11}mn^3 + (Q_{12} + 2Q_{66}) \\
&\quad \times mn(m^2 - n^2) \\
\bar{Q}_{33} &= Q_{33} \\
\bar{Q}_{36} &= (Q_{13} - Q_{23})mn \\
\bar{Q}_{44} &= Q_{44}m^2 + Q_{56}n^2 \\
\bar{Q}_{45} &= (Q_{55} - Q_{44})mn \\
\bar{Q}_{56} &= Q_{55}m^2 + Q_{44}n^2 \\
\bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12})m^2n^2 + Q_{66}(m^2 - n^2)^2
\end{aligned}$$

여기서 $m = \cos \alpha$, $n = \sin \alpha$ 이고, α 는 좌표전환각도 이다.

Q_{ij} 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
Q_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \\
Q_{12} &= \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \\
Q_{22} &= \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{66} = G_{12}
\end{aligned}$$

2.3 사용된 진동이론

구조물의 고유진동수는 공명 상태하에서 확산하기 시작하는 처짐 모드 형태하에서의 주파수이다. 자유진동으로 인한 처짐으로부터 이러한 처짐을 유발하는데 필요한 힘을 알 수 있다. 일련의 이러한 과정에 의

해 결정된 모드형태가 충분히 정확하다면, 수렴된 것과 바로 이전 값 사이에서의 상대적 최대치짐은 이러한 관성력하에서 불변하다.

구조물의 진동은 조화운동이고 진폭형상은 삼각함수에 의해 표시될 수 있는 부분이 있다. 처음에 제 1모드만 고려하면, 구조부재의 처짐형태는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$w = W(x, y)F(t) = W(x, y) \sin \omega t \quad (5)$$

Newton의 법칙에 의해 진동하는 질량 m 의 동적힘은

$$F = m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (6)$$

이다. 여기서 ω 와 W 는 미지수이다.

고유진동수 ω 를 구하기 위하여 다음의 과정이 취해진다. 어떤 몇개의 점에서 최대 처짐의 진폭은 임의로 주어진다.

$$w(i, j)(1) = W(i, j)(1) \quad (7)$$

여기서 (i, j) 는 고려한 점을 나타낸다.

이것은 절대적으로 임의의 값이지만 경험에 의해 가정하면 수렴을 촉진시키는데 더욱 좋다. 이러한(최대) 진폭에 대응하는 동적힘은

$$F(i, j)(1) = -m(i, j)[\omega(i, j)(1)]^2 w(i, j)(1) \quad (8)$$

이다. 이 힘에 의해 일어나는 "새로운" 변위는 F 의 함수이고 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}
w(i, j)(2) &= f\{m(i, j)[\omega(i, j)(1)]^2 w(i, j)(1)\} \\
&= \sum \Delta(i, j, k, l) \{-m(i, j)[\omega(i, j)(1)]^2 \\
&\quad \times w(i, j)(1)\}
\end{aligned}$$

여기에서 Δ 는 처짐에 대한 영향계수이다.

공명상태하에서 구조부재의 모든 점에서 고려한 $w(i,j)(1)$ 과 $w(i,j)(2)$ 는 동일해야 하고 다음조건을 만족해야 한다.

$$w(i,j)(1)/w(i,j)(2) = 1 \quad (10)$$

이 방정식으로 부터 (i,j) 의 각 점에서의 $\omega(i,j)(1)$ 이 얻어질 수 있지만, 대부분의 경우에 일치하지 않는다. 구조부재의 고유진동수가 부재의 모든 점에서 동일해야 하므로 $\omega(i,j)$ 의 충분한 같은값이 모든 (i,j) 점에서 얻어질 때까지 이 과정이 반복된다. 그러나 대부분의 경우에 첫번째 cycle의 계산에 의해 얻어진 $\omega(i,j)$ 의 최대와 최소값의 차이는 공학적으로 충분히 무시 될 수 있다. 정확도는 최대와 최소치의 평균을 취하거나 또한 처짐이 최대인 곳에서 $\omega(i,j)$ 의 값을 취함으로써 개선될 수 있다.

2번째 cycle의

$$w(i,j)(3) = f(m(i,j)[\omega(i,j)(2)]^2 w(i,j)(2)) \quad (11)$$

에서 $w(i,j)(2)$ 의 절대적 수치가 편리하게 사용될 수 있다. composite 구조물을 포함하여 불규칙한 단면과 이상적이 아닌 지지조건을 가진 판의 경우, 경계조건에 관계없이, 이 판을 몇개의 요소로 나누어 고려하는 것이 편리하다. 결과의 정확성은 처짐계산의 정확도에 비례한다.

첨가질량의 영향은 각각의 mass point에서 처짐의 영향면에 첨가질량을 곱함으로써 얻을 수 있다. 처짐 영향면을 얻는 것은 패널의 설계와 해석에 있어서 첫 번째 단계이다. 이러한 값들을 얻기위해서 여러 방법이 사용되어질 수 있다. 예로 거더와 cross-beam을 갖는 교량 격자구조의 경우에 있어서 F. Leonhardt(1950), H. Homberg (1951,1956), C. Massonnet(1954), N. Watanabe(1965), D. H. Kim(1972) 등에 의한 방법 및 테이블이 사용될 수 있다.

3. 수치해석

수치해석 예로 Figure 1과 같은 사변 단 순지지된 샌드위치 패널을 고려했으며, 형상비는 $c=a(5m)/b(5m)=1 \sim c=a(25m/5m)=5$ 로 변화시켰다. 본 수치해석에 사용된 적층복합판의 물성은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} E_1 &= 38.6 \text{ Gpa}, & E_2 &= 8.27 \text{ Gpa}, \\ G_{12} &= 4.14 \text{ Gpa}, & \nu_{12} &= 0.26, \\ \nu_{21} &= 0.0557, & t &= 0.005 \text{ m} \end{aligned}$$

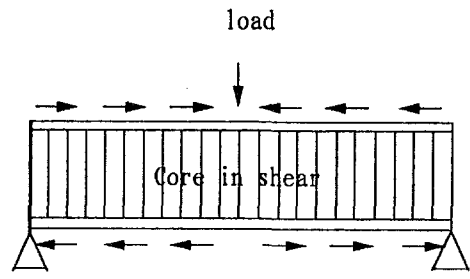


Figure 1. Sandwich panel

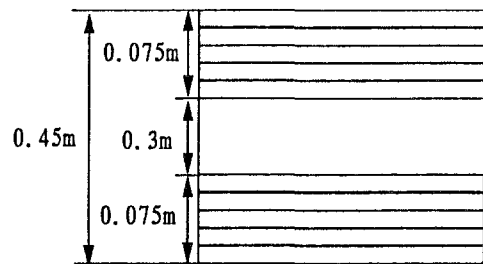


Figure 2. Section of sandwich panel

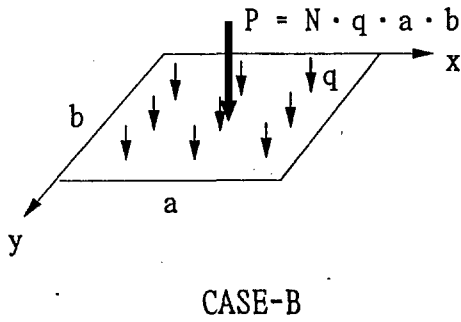
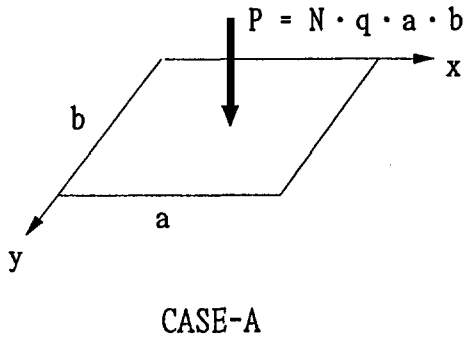


Figure 3. Plates without and with own weight

패널의 양면은 $[0^0, 90^0, 0^0]_5$ 의 적층형태로 만들었으며, 이때 하나의 lamina의 두께 t 를 $0.005m$, core의 두께를 $0.3m$ 으로 하였다. 적층판의 강성값들은 두께의 함수이므로 Figure 2와 같은 단면의 휨강성은 중앙부분의 core를 중공단면으로하여 계산하였으며, 그 계산 결과는 다음과 같다.

$$D_{11} = 149774600 \text{ Nm},$$

$$D_{12} = 10602800 \text{ Nm},$$

$$D_{22} = 81344890 \text{ Nm},$$

$$D_{66} = 20119010 \text{ Nm}$$

위의 계산된 휨강성 값들을 사용하여 단순지지된 판의 Navier solution으로 영향면을 계산하고 Kim's Method로 진동수를 구하였다. 이때 Figure 3와 같이 자중 q 와 집중하중 $P=N \cdot a \cdot b \cdot q$ 를 고려하였다. CASE-A는 집중하중 $P=N \cdot a \cdot b \cdot q$ 만이 작용할때이며 CASE-B는 집중하중 $P=N \cdot a \cdot b \cdot q$ 와 자중 q 가 작용하는 경우이다. 집중하중의 위치는 형상비마다 중앙점에 재하시켜 고유진동수를 구하였다. 두가지 경우에 대해 N 이 증가함에 따른 첨가질량의 영향이 연구된다. 이 수치계산의 결과는 Table 1~ 5와 Figure 4~8에 주어진다.

Table 1. $\omega \cdot \sqrt{\rho h}$, at center point

N	$c=5m/5m=1$		B/A
	CASE A	CASE B	
0		7198.010	
1	3419.996	3111.555	0.9098
2	2418.281	2302.379	0.9521
3	1974.518	1910.082	0.9674
5	1529.455	1498.989	0.9801
7	1292.626	1274.096	0.9857
10	1081.488	1070.575	0.9899
15	883.031	877.065	0.9932
20	764.728	760.844	0.9949

Table 2. $\omega \cdot \sqrt{\rho h}$, at center point

N	$c=10m/5m=2$		B/A
	CASE A	CASE B	
0		4253.802	
1	2768.805	2361.594	0.8529
2	1957.841	1799.506	0.9191
3	1598.570	1509.467	0.9443
5	1238.247	1195.695	0.9656
7	1046.510	1020.517	0.9752
10	875.573	860.214	0.9825
15	714.902	706.483	0.9882
20	619.124	613.636	0.9911

Table 3. $\omega \cdot \sqrt{\rho h}$, at center point

N	$c=15m/5m=3$		B/A
	CASE A	CASE B	
0		3838.233	
1	2781.433	2325.198	0.8360
2	1966.770	1789.126	0.9097
3	1605.861	1505.900	0.9378
5	1243.895	1196.173	0.9616
7	1051.283	1022.139	0.9723
10	879.566	862.349	0.9804
15	718.163	708.727	0.9869
20	621.947	615.798	0.9901

Table 4. $\omega \cdot \sqrt{\rho h}$, at center point

N	$c=20m/5m=4$		B/A
	CASE A	CASE B	
0		3709.086	
1	2799.853	2332.299	0.8330
2	1979.795	1797.976	0.9082
3	1616.496	1514.218	0.9367
5	1252.132	1203.312	0.9610
7	1058.245	1028.431	0.9718
10	885.3911	8677.781	0.9801
15	722.9188	713.266	0.9866
20	626.066	619.775	0.9900

Table 5. $\omega \cdot \sqrt{\rho h}$, at center point

N	$c=25m/5m=5$		B/A
	CASE A	CASE B	
0		3660.223	
1	2826.498	2343.298	0.8290
2	1998.636	1809.835	0.9055
3	1631.879	1525.451	0.9348
5	1264.048	1213.151	0.9597
7	1068.316	1037.206	0.9709
10	893.8171	875.426	0.9794
15	729.7985	719.7142	0.9862
20	632.0241	625.450	0.9896

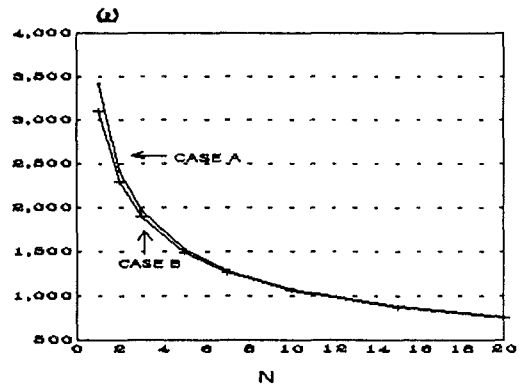


Figure 4. $\omega \cdot \sqrt{\rho h}$, at center point, when $c=a/b=1$

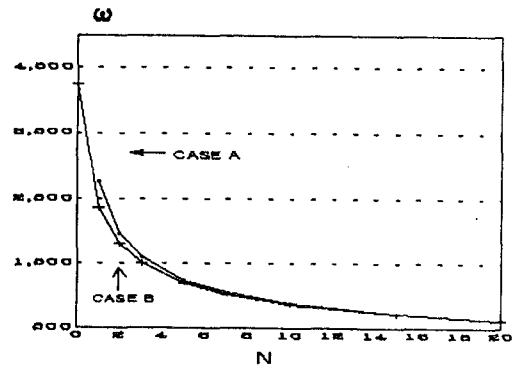


Figure 5. $\omega \cdot \sqrt{\rho h}$, at center point, when $c=a/b=2$

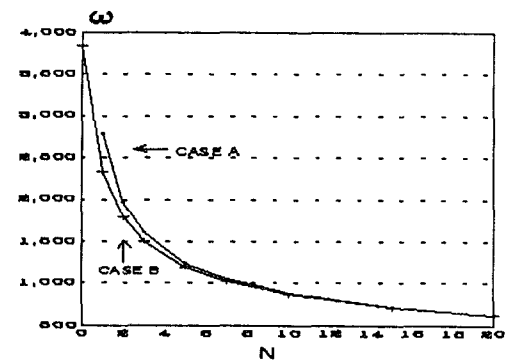


Figure 6. $\omega \cdot \sqrt{\rho h}$, at center point, when $c=a/b=3$

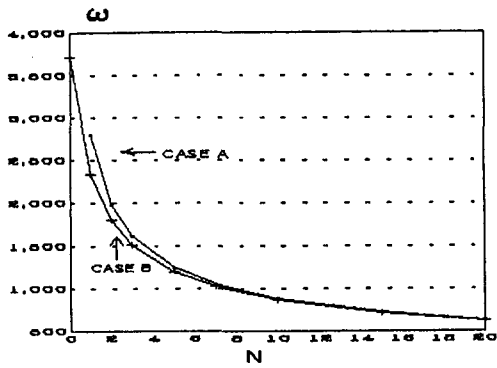


Figure 7. $\omega \cdot \sqrt{\rho h}$, at center point, when $c=a/b=4$

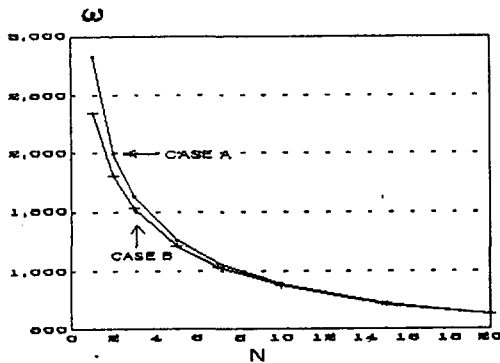


Figure 8. $\omega \cdot \sqrt{\rho h}$, at center point, when $c=a/b=5$

4. 결론

고유진동수가 형상비가 1이고 첨가질량이 자중의 7배($N=7$)로 작용할 때 CASE-B/CASE-A가 98.57%, $N=20$ 일 때 99.49%를 보이고 있다. 또한 형상비가 5이고 $N=7$ 일 때 97.09%, $N=20$ 일 때 98.96%를 나타내고 있다. 이는 실제 Composite 구조물 설계시 진동해석을 하는데 있어 형상비에 관계없이 자중을 무시하고 작용하는 첨가질량만으로 해석이 가능한 한계를 제시한다.

따라서 본 논문에서 사용된 해석방법이

Composite 샌드위치 패널에도 효과적으로 적용될 수 있다는 것을 알 수 있었다. 향후 여러 형태의 실제 구조물에 대한 더 많은 해석방법의 연구가 수행될 것이다.

참고 문헌

- [1] Kim, D. H., "A Simplified Method of Vibration Analysis of Irregularly Shaped Composite Structural Elements," *JISSE-1*, Tokyo, 1989. 12.
- [2] Kim, D. H., "Vibration Analysis of Irregularly Shaped Composite Structural Members," 1990 Structures Congress, ASCE, Baltimore, MD., U.S.A., 1990. 5
- [3] Kim, D. H., "Vibration Analysis of Irregularly Shaped Laminated Thick Composite Plates," *ICCM 8*, Honolulu, Hawaii, July 1991.
- [4] Kim, D. H., "Vibration Analysis of Irregularly Shaped Laminated Thick Composite Plates II," *JISSE-2*, Tokyo, 1991. 12. 14.
- [5] Kim, D. H., *Composite Structures for Civil and Architectural Engineering*, E & FN SPON, pp. 204-218, 1995.
- [6] Kim, D. H., "Vibration Analysis of Composite Bridge Decks with Point Mass/Masses," Second International Conference on Composites Engineering, *ICCE/2*, New Orleans, Louisiana, 1995. 8. 21-24.
- [7] 이정호, 원치문, 김경진, 김덕현, "첨가된 질량이 있는 단순지지 적층판의 고유진동수 계산을 위한 간편법," *大韓土木學會*, 1995. 10. 21.