

여러 형상의 대칭적인 핀의 성능 해석

강 형 석*

Performance Analysis on the Various Shapes of Symmetric Fins

Hyung-Suk Kang*

ABSTRACT

A comparison of the fin effectiveness, thermal resistance, and fin efficiency between the symmetric triangular fin and the symmetric trapezoidal fin which has various slopes of the fin side is made. Also the relation between Biot number and the non-dimensional fin length for equal amount of heat loss from these fins is shown. For these analyses, a forced analytic method is used. In particular, the equation for the heat loss is used simultaneously for both the symmetric triangular fin and the symmetric trapezoidal fins by just adjusting the value of the slope factor. The value of Biot number varies from 0.01 to 1.0 and the non-dimensional fin length varies from 0.01 to 10. For simplicity, the root temperature and fin's surrounding convection coefficients are assumed constant and the condition is assumed to be steady state.

1. 서 론

지속적으로, 핀 문제에 대하여 많은 관심이 이어지고 있다. 많은 다른 경우의 경계 조건에 대한 하나의 사각핀의 성능을 연구한 문헌들이^[1-6] 많이 있으며 또한 여러 논문들이 일차원 혹은 이차원적인 해석을 사

용하여 삼각핀^[7-10] 또는 사다리꼴핀^[10,11]을 해석한다. 여러 가지 다른 방법(즉, 유한차분법, 유한요소법, 해석적방법 등)들이 주어진 핀의 모델을 해석하기 위하여 사용되어 왔다. 그러나 대부분의 논문들에서 주어진 하나 또는 둘 정도^[10]의 모델을 해석하기 위하여 각기 다른 식들이 사용된다. 본 논문은 여러 형상의 핀들(즉, 대칭적인 삼각핀, 핀 윗면의 경사가 각기 다른 대칭적인 사다리꼴 핀)에 대하여 단지 경사요소 값을

* 강원대학교 기계공학과 조교수

조절함에 따라 하나의 동일한 식이 사용된다. 또한 본 논문의 주요한 목적은 핀 윗면의 기울기가 각기 다른 대칭의 사다리꼴 핀과 대칭의 삼각핀의 핀효과, 핀저항, 그리고 핀효율을 Biot 수와 무차원 핀길이의 측면에서 비교하는 것이다. 더 나아가서, 대칭의 삼각핀과 핀 윗면의 기울기가 각기 다른 대칭의 사다리꼴 핀들을 위해, 임의로 주어진 Biot 수와 무차원 핀길이에 대하여 같은 양의 열손실이 일어나기 위한 Biot 수와 무차원 핀길이 사이의 관계가 보여진다. 계산을 간편하게 하기 위하여 핀바닥 온도, 핀주위 열대류계수, 그리고 핀 재질의 열전도도는 상수로 놓고, 조건은 정상 상태로 가정한다. 수치 해석은 강제 해석적 방법으로^[9] 수행된다.

2. 이차원 수치해석

그림 1에서 보여주는 핀들의 윗면 경사를 위한 일반적인 식은 아래의 식 (1)과 같이 쓰여질 수 있다.

$$y' = -s \cdot x' + l \quad (1)$$

식 (1)에서, 경사요소 s 는 핀의 형상을 결정하며 0보다는 크고 $1/L$ 보다 작거나 같아야만 한다. 경사요소가 0보다 크고 $1/L$ 보다 작은 범위에서는 핀의 형상은 사다리꼴 핀이 되며 s 가 $1/L$ 인 경우에는 삼각핀이 된다. 그림 1에서 보여지는 여러 형상의 핀들을 위한 지배 방정식은 식 (2)에 주어진다.

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y'^2} = 0 \quad (2)$$

세개의 경계조건들과 그림 1에서 보여지는 여러 형상의 핀들을 위한 하나의 에너지 보존식이 식들 (3)부터 (6)까지 주어진다.

$$\theta = \theta_0 \text{ at } x = 0, \quad -1 \leq y \leq 1 \quad (3)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = 0 \text{ at } y = 0, \quad 0 \leq x \leq L \quad (4)$$

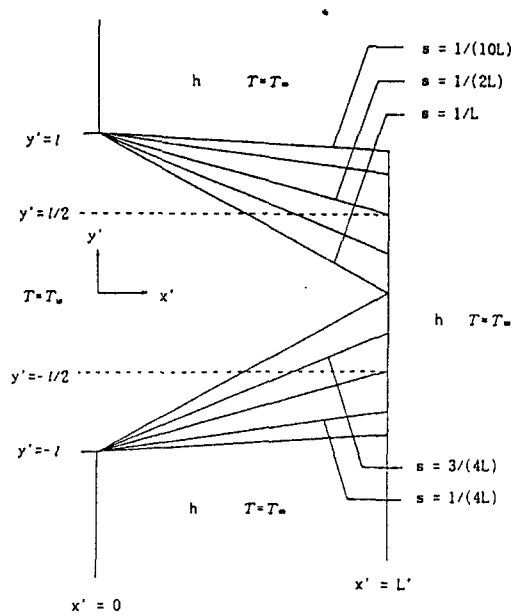


Fig. 1. Geometry of a triangular fin and various shapes of trapezoidal fins

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} + Bi \cdot \theta = 0 \text{ at } x = L$$

$$-1 + s \cdot L \leq y \leq 1 - s \cdot L \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & - \int_0^1 \left[\frac{d\theta}{dx} \right]_{x=0} dy \\ & = Bi \cdot \sqrt{\frac{1}{s^2} + 1} \int_{(1-s \cdot L)}^1 \theta dy \quad (6) \\ & - \int_0^{(1-s \cdot L)} \left[\frac{d\theta}{dx} \right]_{x=L} dy \end{aligned}$$

여기서

$$Bi = \frac{hl}{k}, \quad \theta = T - T_\infty,$$

$$\theta_0 = T_w - T_\infty, \quad L = \frac{L'}{l}, \quad x = \frac{x'}{l},$$

$$\text{그리고 } y = \frac{y'}{l}$$

식 (3)은 핀바닥 온도가 상수임을 나타내며 식 (4)는 핀이 $y = 0$ 인 면에 대하여 열적으로 평형임을 지적한다. 식 (5)는 핀끝에서 전도에 의한 열전달이 대류에 의해 주위로 나가는 열전달과 같다는 것을 의미한다. 마지막으로 식(6)은 핀바닥에서 전도로 들어오는 열전달은 핀의 윗면을 통하여 대류로 나가는 열전달과 핀 끝에서 일어나는 전도 열전달을 더한 양과 같다는 에너지 보존식이다. 식 (3)부터 (5)의 세개의 경계조건들과 에너지 보존식 (6)을 가지고 지배 방정식 (2)를 변수 분리법을 사용하여 풀면 핀 내의 온도분포를 나타내는 식 (7)을 구할 수 있다.

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_0 \cdot N_n \cdot f_n(x) \cdot \cos(\lambda_n y) \quad (7)$$

where

$$f_n(x) = \cosh(\lambda_n x) - A_n \cdot \sinh(\lambda_n x) \quad (8)$$

$$N_n = \frac{4 \sin(\lambda_n)}{2\lambda_n + \sin(2\lambda_n)} \quad (9)$$

$$A_n = \frac{\lambda_n \cdot \tanh(\lambda_n L) + Bi}{\lambda_n + Bi \cdot \tanh(\lambda_n L)} \quad (10)$$

$$= \frac{B_n \cdot C_n - E_n}{D_n - \sin(\lambda_n) + B_n \cdot F_n} \quad (11)$$

식 (11)에서 보여지는 B_n 부터 F_n 은 각각 식 (12)~(16)에서 주어진다.

$$B_n = \frac{Bi}{\lambda_n^2 \cdot \sqrt{1+s^2}} \quad (12)$$

$$C_n = s \cdot \lambda_n \cdot \sin(\lambda_n) + G_n - s \cdot \lambda_n \cdot D_n \quad (13)$$

$$D_n = \cosh(\lambda_n L) \cdot \sin\{\lambda_n(1-sL)\} \quad (14)$$

$$E_n = \sinh(\lambda_n L) \cdot \sin\{\lambda_n(1-sL)\} \quad (15)$$

$$F_n = \lambda_n \cdot \cos(\lambda_n) - H_n + s \cdot \lambda_n \cdot E_n \quad (16)$$

식 (13)과 (16)에서 보여지는 G_n 과 H_n

은 각각 식 (17)과 (18)에서 주어진다.

$$G_n = \lambda_n \cdot \sinh(\lambda_n L) \cdot \cos\{\lambda_n(1-sL)\} \quad (17)$$

$$H_n = \lambda_n \cdot \cosh(\lambda_n L) \cdot \cos\{\lambda_n(1-sL)\} \quad (18)$$

첫번째 eigenvalue, λ_1 은 식 (10)과 식 (11)을 사용하여 구한다. 나머지 eigenvalue (i.e. $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \dots$) 들은 orthogonality principle^[9]을 사용하여 얻어진 식 (19)로부터 계산되어진다.

$$\lambda_n = (2\lambda_1 + \lambda_n) \frac{\tan(\lambda_n)}{-2(\lambda_1 + \lambda_n) \frac{\tan(\lambda_1) + \tan(\lambda_n)}{\tan(\lambda_1) + \tan(\lambda_n)}} \quad (19)$$

그림 1에서 보여지는 여러 형상의 핀들로부터 나오는 열손실은 식 (21)로부터 구해진다.

$$Q = \int_{-1}^1 \left[-k \frac{\partial \theta}{\partial x} \right]_{x=0} dy \quad (20)$$

$$= 2k\theta_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\lambda_n) \cdot A_n \cdot N_n \quad (21)$$

핀효과는 식 (23)에 의하여 구해질 수 있다.

$$\epsilon_f = \frac{Q}{2l \cdot h \cdot \theta_0} \quad (22)$$

$$= \frac{1}{Bi} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\lambda_n) \cdot A_n \cdot N_n \quad (23)$$

핀효율은 식 (24)를 사용해서 구한다.

$$\eta_f = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\lambda_n) \cdot A_n \cdot N_n}{Bi \cdot \{1 + (\sqrt{1+b^2} - b)L\}} \quad (24)$$

핀저항을 위한 식은 식 (26)에서 보여진다.

$$R_f = \frac{\theta_0}{Q} \quad (25)$$

$$= \frac{1}{2k \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\lambda_n) \cdot A_n \cdot N_n} \quad (26)$$

3. 결과

Figure 2의 (a)는 무차원 핀 길이가 1일 때 핀의 윗면 경사요소 s 값이 각각 $1/(L)$,

$1/(2L)$, 그리고 $1/(10L)$ 경우에 대하여 Biot 수를 0.01부터 1.0까지 변화시키고 이에 따른 핀효과 값의 변화를 나타내며 (b)는 같은 조건 아래에서 핀효율 값의 변화를 보여준다. 주어진 세 가지의 s 값 모두에 대하여 Biot 수가 증가함에 따라 핀효과 값은 감소하며, Biot 수가 약 0.7 정도까지는 s 가 커짐에 따라 핀효과 값이 감소하나 약 0.7 이상부터 1.0까지는 s 에 대하여 다소간 불

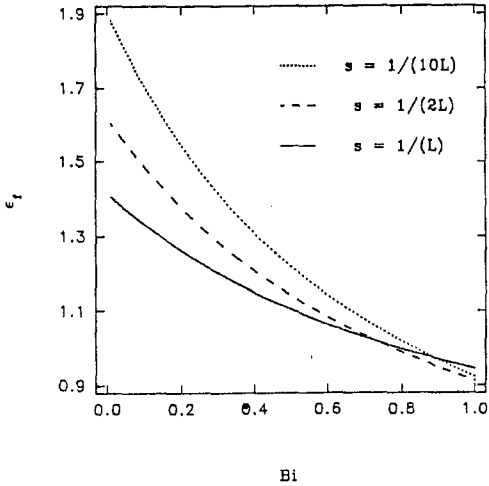


Fig. 2. (a) Fin effectiveness versus Biot number for $L=1$

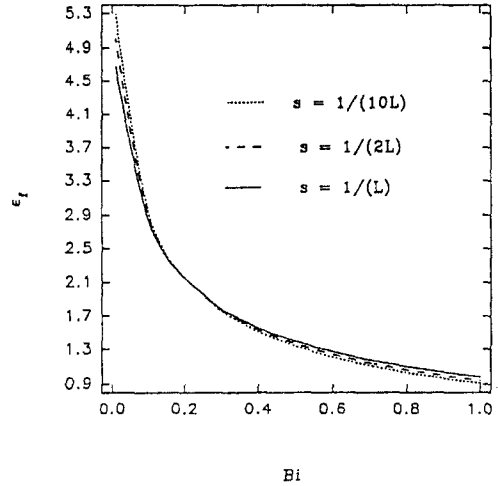


Fig. 3. (a) Fin effectiveness versus Biot number for $L=5$

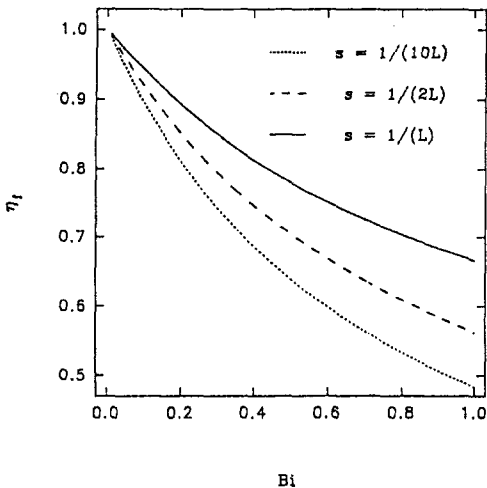


Fig. 2. (b) Fin efficiency versus Biot number for $L=1$

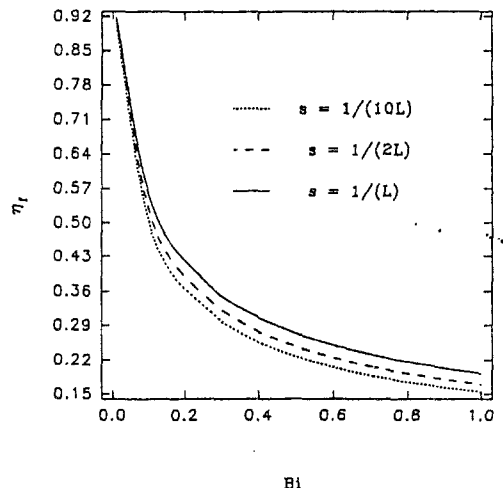


Fig. 3. (b) Fin efficiency versus Biot number for $L=5$

규칙하게 변화한다. 핀효과의 경우와 같이 핀효율 값도 Biot 수가 커짐에 따라 감소하나, 주어진 Biot 수에서 s 가 커짐에 따라 핀효율도 증가하여 s 값 측면에서는 핀효과의 변화와는 반대 경향을 보여준다.

Figure 3의 (a), (b)는 각각 Fig. 2의 (a), (b)와 같은 조건 아래에서 단지 무차원 핀 길이를 1에서 5로 바꾸었을 때 핀효과와 핀효율의 변화를 나타낸다. Biot 수의 변화에 대한 핀효과의 변화 경향은 Fig. 2의 (a)와 같으나, s 값 측면에서 현저한 차이점은 Biot 수가 약 0.2까지는 핀효과 크기가

$s = 1/(10L), 1/(2L)$, 그리고 $1/L$ 의 순서로 크다가 Biot 수가 0.2이후부터는 그 크기가 반대로 나타나는 것이다. 핀효율 변화를 보면 $L = 1$ 인 경우와 마찬가지로 $L = 5$ 인 경우에도 Biot 수가 커짐에 따라, 그리고 s 값이 작아짐에 따라 핀효율이 감소하는 것을 알 수 있다. 다만 $L = 1$ 인 경우에 대한 차이점은 핀효율이 주어진 Biot 수의 변화에 대하여는 현저히, s 의 변화에 대하여는 상대적으로 작게 변화하는 것이다.

Figure 4의 (a)는 Biot 수를 0.01로 고정시켜 놓고 $1/L, 1/(2L)$, 그리고 $1/(10L)$ 의

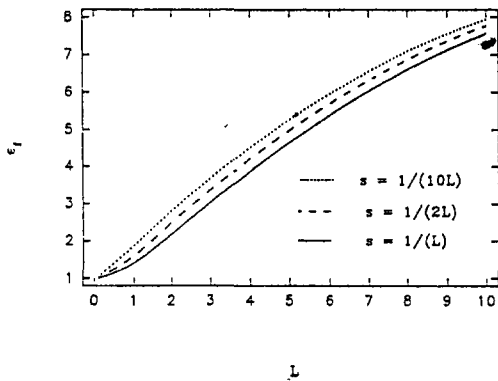


Fig. 4. (a) Fin effectiveness versus the non-dimensional fin length for $Bi=0.01$

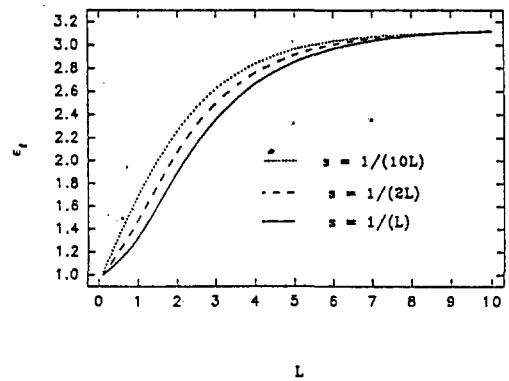


Fig. 5. (a) Fin effectiveness versus the non-dimensional fin length for $Bi=0.1$

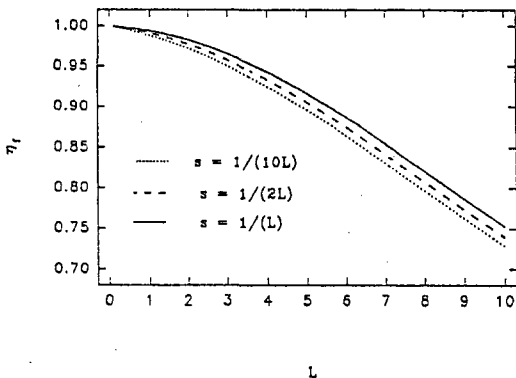


Fig. 4. (b) Fin efficiency versus the non-dimensional fin length for $Bi=0.01$

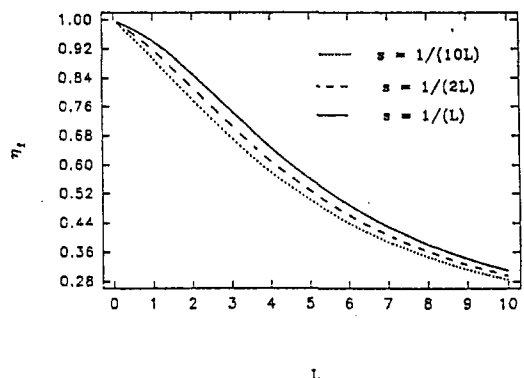


Fig. 5. (b) Fin efficiency versus the non-dimensional fin length for $Bi=0.1$

Table 1. Variation of Fin resistance times thermal conductivity along the non-dimensional fin length

	L	$R_f \cdot k$				
		$s = 1/L$	$s = 1/(4L)$	$s = 1/(2L)$	$s = 3/(4L)$	$s = 1/(10L)$
Bi = 0.01	1	35.5773	33.5860	31.1806	28.3790	26.5612
	2	22.7640	22.3901	19.9818	18.5673	17.7288
	3	16.3839	15.5616	14.7477	13.9509	13.4843
	4	12.8632	12.3389	11.8249	11.3239	11.0310
	5	10.7024	10.3461	9.9975	9.6579	9.4589
	6	9.2728	9.0183	8.7692	8.5264	8.3838
	7	8.2762	8.0873	7.9024	7.7217	7.6154
	8	7.5546	7.4103	7.2688	7.1304	7.0488
	9	7.0177	6.9047	6.7939	6.6853	6.6213
	10	6.6096	6.5195	6.4310	6.3442	6.2929
Bi = 0.1	1	3.7532	3.5820	3.3651	3.1053	2.9352
	2	2.6236	2.5134	2.3968	2.2773	2.2060
	3	2.1147	2.0562	1.9968	1.9376	1.9027
	4	1.8730	1.8410	1.8089	1.7772	1.7586
	5	1.7495	1.7314	1.7135	1.6959	1.6856
	6	1.6830	1.6728	1.6628	1.6531	1.6474
	7	1.6457	1.6402	1.6349	1.6299	1.6270
	8	1.6241	1.6215	1.6192	1.6171	1.6160
	9	1.6113	1.6106	1.6102	1.6100	1.6100
	10	1.6035	1.6041	1.6049	1.6059	1.6067

세개의 s 값에 대하여 무차원 핀길이, L 을 0.1부터 10까지 변화시키면서 그에 따른 핀효과의 변화를 나타내며 (b)는 같은 조건 아래에서 핀효율의 변화를 보여준다. 핀효과는 L 이 증가함에 따라, 그리고 s 가 감소함에 따라 증가하며 주어진 L 과 s 의 범위에서 핀효과의 변화범위는 약 1부터 7.5~8 정도임을 알 수 있다. 핀효율을 보면, 변화의 경향이 핀효과와는 완전히 반대이며 역시 주어진 L 과 s 의 범위에서 핀효율은 약 1부터 0.75~0.73까지 변화한다.

Figure 5의 (a), (b)는 Fig. 4와 같은 조건 아래에서 Biot 수를 0.01에서 0.1로 바꾸었을 때 각각 핀효과와 핀효율의 변화를 나타낸다. Biot 수가 0.1일 때 핀효과의 변화는 L 과 s 의 변화에 대한 측면에서 볼 때 Biot 수가 0.01일 때와 같은 경향을 보여주나 뚜렷한 차이점은 L 이 약 4까지는

핀효과가 급격히 증가하다가 그 이후 서서히 증가하여 L 이 10에 달했을 때는 Biot 수가 0.1일 때의 핀효과값은 Biot 수가 0.01일 때의 그 값의 절반도 안됨을 보여주는 것이다.

또한 L 이 약 8.5이상에서는 세개의 s 값에 대한 핀효과는 거의 같아진다. 핀효율의 경우도 변화하는 경향 자체는 L 과 s 의 변화 측면에서 볼 때 Biot 수가 0.01이나 0.1인 두 경우에 대해 비슷하다. 그러나 주어진 L 의 범위에서 핀효과와는 반대로 Biot 수가 0.1인 경우의 핀효율이 Biot 수가 0.01인 경우의 핀효율 보다 훨씬 큰 폭으로 감소한다.

Table 1은 임의의 5개의 s 값에 대하여 각각 Biot 수가 0.01, 0.1일 때 L 을 1부터 10까지 1단위로 변화시킬 때 핀저항과 열전도도의 곱의 변화수치를 나타낸다. 일정

한 값의 열전도도가 주어졌을 때 핀저항이 크다는 것은 그만큼 열손실이 작다는 것을 의미하며, 핀저항이 클 때는 그 반대이다. Biot 수가 0.01인 경우에는 L 과 s 가 커짐에 따라 핀저항도 커진다. Biot 수가 0.1일 때도 L 이 9까지는 핀저항의 변화경향이 Biot 수가 0.01인 경우와 같으나, L 이 10인 경우에는 s 가 작아짐에 따라 핀저항이 커진다. 이는 Biot 수가 0.1, L 이 10인 경우에는 오히려 삼각핀으로부터의 열손실이 다른 사다리꼴 핀으로부터의 열손실 보다 크다는 것을 설명한다.

마지막으로 Fig. 6의 (a)는 Biot 수가 0.1, 무차원 핀길이 $L = 1$ 일 때를 기준으로 같은 크기의 열손실이 일어나기 위한 Biot 수와 무차원 핀길이의 관계를 나타내며 (b)는 기준값으로 $Bi = 0.2, L = 0.3$ 인 경우를 나타낸다. Figure 6의 (a), (b)에서 선택한 기준값들은 임의로 결정된 값들이다. Figure 6의 (a)에서 나타나듯, 주어진 세개의 s 값에 대하여 L 이 약 3까지는 Biot 수가 급격히 감소하다가 그 이후 서서히 감소한다. 특히 L 이 0.1부터 10까지 변화하는 동안 $s = 1/L$ 인 경우의 Biot 수가 가장 큰데, 이는 주어진 Biot 수와 무차원 핀길이의 관계에서 삼각핀으로부터의 열손실이 가장 작다는 것을 설명한다. Figure 6의 (b)에서는 L 이 0.1부터 10까지 변화할 때 Biot 수가 주어진 s 값에 대하여 다소간 불규칙하게 변화하며 L 이 약 7보다 큰 범위에서는 $s = 1/L$ 일 때의 Biot 수가 가장 작은데, 이로부터 그 범위에서는 삼각핀으로부터의 열손실이 다른 사다리꼴 핀으로부터의 열손실보다 크다는 것을 알 수 있다.

4. 결론

대칭적인 삼각핀과 핀윗면 경사가 각기 다른 사다리꼴 핀들의 성능에 대한 2차원

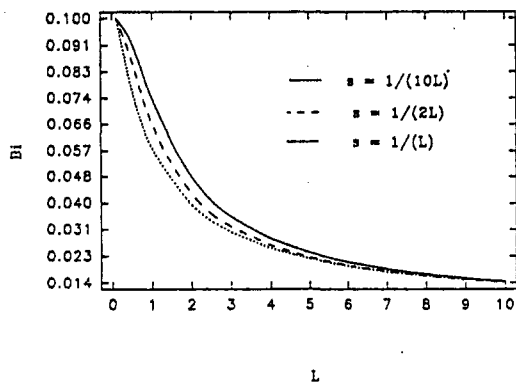


Fig. 6. (a) Relation between Biot number and the non-dimensional fin length for equal amount of heat loss based on the value of $Bi=0.1, L=0.1$

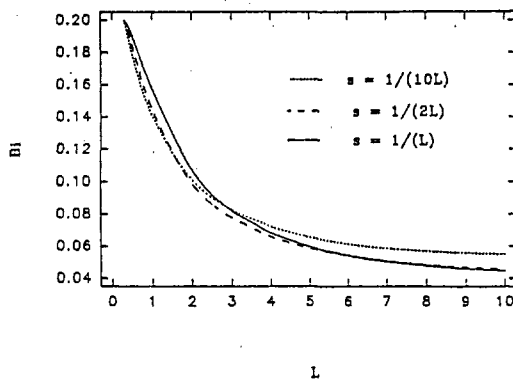


Fig. 6. (b) Relation between Biot number and the non-dimensional fin length for equal amount of heat loss based on the value of $Bi=0.2, L=0.3$

수치해석으로부터 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다.

해석되어진 핀 형상에 관계없이 Biot와 무차원 핀길이가 증가할수록 핀효율은 감소하며 삼각핀의 효율이 가장 높고 사다리꼴핀 경우 핀윗면 경사가 커질수록 핀효율이 커진다. 핀효과는 Biot 수가 감소할수록, 무차원 핀길이가 증가할수록 커지며 핀

형상에 대하여는 다소간 불규칙하게 변화한다. 따라서 핀효과의 측면에서 주위의 Biot 수나 핀길이를 고려하여 적절한 핀의 형상을 설계할 필요가 있으며 본 연구에서 나타난 데이터들이 핀의 설계에 어느 정도 도움이 될 것으로 생각된다.

참 고 문 헌

- [1] Bar-Cohen A., "Fin Thickness for an Optimized Natural Convection Array of Rectangular Fins," *ASME JOURNAL OF HEAT TRANSFER*, Vol. 101, pp. 564-566, 1979
- [2] ÜNAL, H. S., "Determination of the temperature distribution in an extended surface with a non-uniform heat transfer coefficient," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 28, No. 12, pp. 2279-2284, 1985
- [3] Kraus, A. D., "Analysis of Extended Surface," *ASME JOURNAL OF HEAT TRANSFER*, Vol. 110, pp. 1071-1081, 1988
- [4] Ju, Y. H., Chou, Y. S. and Hsiao, C. C., "A new approach to the transient conduction in 2-D rectangular fin," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 32, No. 9, pp. 1657-1661, 1989
- [5] KLETT, D. E. and McCULLOCH, J. W., "The Effect of Thermal Conductivity and Base-Temperature Depression on Fin Effectiveness," *JOURNAL OF HEAT TRANSFER, TRANS. ASME*, AUG. pp. 333-334, 1972
- [6] Look, Jr., D.C., "2-D Fin Performance: $Bi(\text{top}) > Bi(\text{bottom})$," *ASME JOURNAL OF HEAT TRANSFER*, Vol. 111, pp. 780-782, 1988
- [7] Burmeister, L.C., "Triangular Fin Performance by the Heat Balance Integral Method," *ASME JOURNAL OF HEAT TRANSFER*, Vol. 101, pp. 562-564, 1979
- [8] Ullmann, A. and Kalman, H., "Efficiency and optimized dimensions of annular fins of different cross-section shapes," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 32, No. 6, pp. 1105-1110, 1989
- [9] Kang, H. S., Look, Jr., D. C., "A Forced Analytic Scheme Applied to a Two Dimensional Fin: An Unsuccessful Venture," *AIAA* 93-2854, 1993
- [10] Martin Crawford, "Heat Transfer in Trapezoidal Straight Fins with a Periodically Varying Base Temperature," *ASME*, 82-WA/HT-41, 1982
- [11] Razelos, P., Imre, K., "The Optimum Dimensions of Circular Fins with Variable Thermal Parameters," *ASME JOURNAL OF HEAT TRANSFER*, Vol. 102, AUG., pp. 420-425, 1980