

## 수중 음향 압전 트랜스듀서의 등가 회로 모델링

### Equivalent Circuit Modeling of Underwater Acoustic Piezoelectric Transducer

조치영\*, 서희선\*, 이정민\*

(Cheeyoung Joh\*, Heeseon Seo\*, Jungmin Lee\*)

#### 요약

본 연구에서는 샌드위치형 압전 트랜스듀서의 등가 회로 모델을 규명하는 방법을 제시하였다. 공기중에서 실험적으로 측정된 트랜스듀서의 전기적 어드미턴스와 이론적으로 계산된 어드미턴스의 오차가 최소가 되도록 하는 비선형 최적화 문제를 풀어 등가 회로에 관련된 미지 상수를 규명하였다. 예제 트랜스듀서에 대해 제안된 방법을 적용하여 등가회로를 모델링하고, 수중에서의 송신 음압 감도(TVR) 및 수신 음압 감도(RVS)를 예측하고 실험치와 비교하여 규명된 등가 회로 모델의 타당성을 검증하였다.

#### ABSTRACT

In this paper an identification method is presented to obtain the equivalent electric circuit model of a sandwich type piezoelectric transducer. Unknown parameters related to the equivalent circuit are identified by solving a nonlinear optimization problem which can minimize an error between the experimental and analytical admittances in air. The proposed method is applied to an example transducer. The validity of equivalent circuit model is demonstrated by the comparison between the experimental measurements and analytical calculations of transmitting voltage response(TVR) and receiving voltage response(RVS).

#### I. 서론

최근 수중 탐지 및 추적용 트랜스듀서는 낮은 운용 주파수와 높은 출력을 요구할 뿐만 아니라 적용하는 목적 및 환경에 따라 고려해야 할 설계 사양이 다양해지고, 구조 또한 더욱 복잡해지는 경향이 있다. 따라서 트랜스듀서를 효율적으로 설계하기 위해서는 동특성을 미리 예측하고 그 결과를 설계에 반영하기 위한 이론적인 해석 모델이 필요하다.

수중 소나용 트랜스듀서로는 압전 세라믹을 가운데 두고 양면에 일반 금속 재질의 전, 후면추를 결합한 샌드위치형 진동체가 널리 사용되고 있다.<sup>(1)</sup> 그동안 압전 세라믹 트랜스듀서의 동특성 해석을 위한 다양한 해석 기법이 개발되어 왔는데, 비교적 구조가 간단하고 공진 주파수 부근에서의 동특성에만 관심이 있을 경우에는 평면파 운동으로 가정된 1차원 유한 요소 모델링<sup>(2)</sup>이나 전기적 등가 회로 모델링<sup>(3)</sup>이 널리 사용되고 있다. 그러나 구조가 복잡하고 넓은 주파수 영역에서의 동특성에 관심이 있을 경우는 일반적인 3차원 유한 요소 해석 기법<sup>(2)</sup>이 활

용된다. 그 중에서 특히 트랜스듀서를 위한 각종 전기적 인 회로 설계를 위해서는 전기적 등가 회로 모델이 아주 효과적으로 활용되고 있다.

압전 세라믹 트랜스듀서의 전기적 등가 회로에 관련된 매개 변수들은 진동체의 형상, 크기 뿐만 아니라 여러가지 재질의 음속, 밀도, 탄성계수 등의 물성치에 따라 결정된다. 그러나 각종 재질의 부정확한 물성치, 특히 압전 세라믹에 관련된 압전 상수, 뿐만 아니라 고려하기 힘든 여러가지 부품들의 동특성에 의해 이론적으로 매개 변수값을 결정하여 등가 회로를 세우고 이것으로부터 계산된 동특성을 실험적으로 측정된 값과 비교하면 많은 오차가 발생한다.

그동안 등가회로 모델 규명에 관한 연구는 주로 비교적 형태가 단순한 압전 세라믹 진동체 자체만의 모델에 국한되고 규명에 있어서 몇개의 물성치를 알고 있다고 가정하거나 또한 규명에 이용한 자료로는 공진주파수 정도만 이용하였다<sup>(3)</sup>. 본 연구에서는 전, 후면추와 압전 세라믹으로 구성된 샌드위치형 압전 트랜스듀서에 대해 등가 회로에 관련된 미지 상수를 규명하는 방법을 제시하였다. 먼저 공기중에서 실험적으로 측정된 트랜스듀서의 전기적 어드미턴스와 이론적으로 계산된 어드미턴스의 오차가 최소가 되도록 하는 비선형 최적화 문제를 풀어

\*국방과학연구소 수중음향센서연구실  
접수일자:1996년 5월 27일

트랜스듀서 자체의 등가 회로를 모델링을 구한 다음, 수중에서의 어드미턴스를 측정하여 이로부터 수중에서의 하중 임피던스를 규명하였다. 그리고 예제 트랜스듀서를 선정하여 제안된 방법을 적용하여 등가 회로를 규명하였으며, 이를 이용하여 송신 음압 감도(TVR) 및 수신 음압 감도(RVS)를 예측하고 실험으로 측정한 값과 비교하여 규명된 등가 회로 모델의 타당성을 검증하였다.

II. 등가 회로 모델링

그림 1은 수중 음향 트랜스듀서로 널리 사용되는 샌드위치형 압전 세라믹 진동체의 일반적인 형상을 나타낸다. 전면추(head mass)와 후면추(tail mass) 사이에 길이 방향으로 분극 처리된 압전 세라믹이 적층되어 있다.<sup>(1)</sup> 그리고 전면추와 방사 매질 사이에는 음향 윈도우(acoustic window)가 부착되어 있다. 대부분의 압전 세라믹 트랜스듀서의 경우 공진 주파수 부근에서의 동특성은 그림 2에 있는 전기적 등가 회로를 이용하여 해석할 수 있는데, 키르히호프 법칙을 적용하면 다음의 관계식을 얻을 수 있다.<sup>(4)</sup>

$$V = Z_{EB}I + NZ_{EB}U$$

$$F = NZ_{EB}I + (Z_{ms} + N^2 Z_{EB})U = -Z_L U \quad (1)$$

$$\frac{1}{Z_{EB}} = \frac{1}{R_0} + j\omega C_0, Z_{ms} = R_m + j(\omega L_m - \frac{1}{\omega C_m})$$

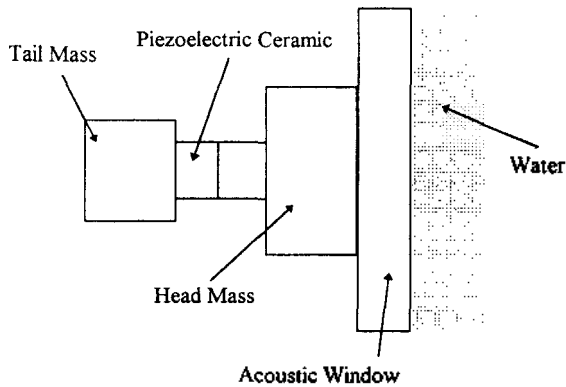


그림 1. 샌드위치형 압전 세라믹 진동체

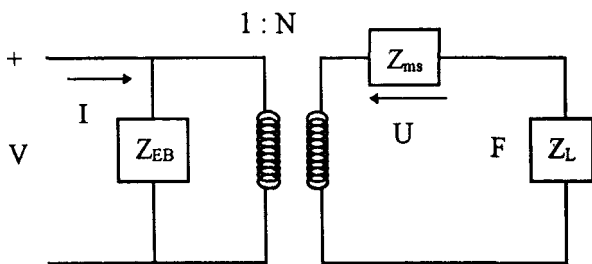


그림 2. 압전 세라믹 트랜스듀서의 전기적 등가회로

여기서 V(I)는 전기적 등가 회로 입력단에 가해지는 전압(전류)이고, F(U)는 기계적 등가 회로 양단에 추가되는 힘(속도)이다. 그리고  $\omega$ 는 주파수, N은 트랜스듀서가 이상적인 변환기로 가정했을 때의 변환율(turn ratio)이며,  $Z_{ms}$ 는 트랜스듀서가 전기적으로 단락되었을 때의 기계적 임피던스이며,  $Z_{EB}$ 는  $U=0$  일때의 전기적 임피던스이며,  $Z_L$ 은 음향 윈도우와 매질의 방사 임피던스를 고려한 하중 임피던스이다.

먼저 그림 2에서 하중 임피던스를 고려하지 않을 경우 ( $Z_L=0$ ), 전기적 입력 어드미턴스는 다음 식으로 표현된다.<sup>(4)</sup>

$$Y_E = G_E + jB_E$$

$$G_E = \frac{1}{R_0} + \frac{RN^2}{R^2 + X^2}, B_E = \omega C_0 - \frac{XN^2}{R^2 + X^2} \quad (2)$$

$$R = R_m, X = \omega L_m - 1/\omega C_m$$

여기서  $G_E, B_E$ 는 각각 전기적 컨덕턴스와 서셉턴스를 나타내며, 주파수에 따른 각각의 특성을 그림 3에 나타내었다. 그림에서  $\omega_r(\omega_n)$ 는  $B_E \approx 0$  일때  $G_E$ 가 큰(작은)값을 가지는 전기적 공진(반공진) 주파수이며,  $\omega_0$ 는  $X=0$ 가 되는 기계적 공진 주파수로서 다음 식으로 결정된다.

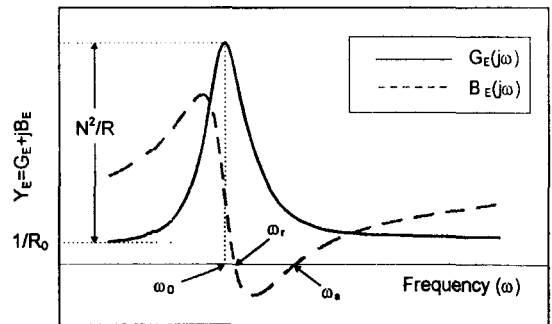


그림 3. 입력 어드미턴스의 주파수 특성!

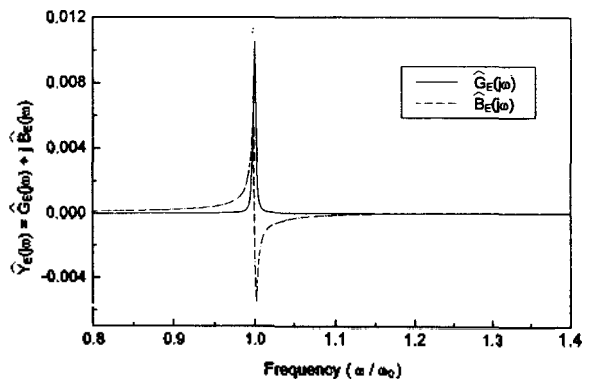


그림 4. 공기중 입력 어드미턴스

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{L_m C_m}} \quad (3)$$

그리고 식(2)와 그림 3에서 보면  $G_E$ 는 공진 주파수에서 충분히 떨어진 저주파 영역에서는  $1/R_0$  값으로,  $\omega_0$ 에서는  $(1/R_0 + N^2/R)$  값으로 근사화됨을 알 수 있다.

한편 트랜스듀서의 유효 전기-기계 결합 계수(coupling coefficient)는 다음 식으로 정의된다.<sup>(4)</sup>

$$k_{eff}^2 = \frac{C_m}{C_0 + C_m} \quad (4)$$

그런데  $R$ 이 충분히 작은 경우 유효 결합 계수는 다음의 근사식으로 표현된다.

$$k_{eff}^2 \approx 1 - \left( \frac{\omega_0}{\omega_a} \right)^2 \quad (5)$$

식 (1) 또는 (2)에서 동가 회로에 관련된 미지 상수는 6 개, 즉  $N, R_0, C_0, R_m, L_m, C_m$ 이다. 이들 미지수를 규명하기 위한 방법의 하나로 공기중에서 실험적으로 전기적 어드미턴스를 측정하고 이를 식 (2)에서 계산되는 이론적 어드미턴스와 비교하여 그 오차가 최소가 되도록 하는 미지수를 결정할 수 있다. 여기서 공기중에서 실험적으로 공진 및 반공진 주파수를 포함하는 영역에서  $M$ 개의 복소 어드미턴스  $\hat{Y}_E(j\omega_i), i=1, 2, \dots, M$ 를 측정했다고 가정하자. 그러면 각 주파수에서의 어드미턴스 오차는 다음과 같다.

$$\Delta Y_E(j\omega_i) = \hat{Y}_E(j\omega_i) - Y_E(j\omega_i); i=1, 2, \dots, M \quad (6)$$

따라서 미지 상수 규명은 다음과 같이  $M$ 개의 주파수에서의 어드미턴스 오차의 크기의 합을 최소화하는 비선형 최소화 문제로 나타낼 수 있다.

$$\text{Minimize } E(x) = \sum_{i=1}^M |\Delta Y_E(j\omega_i, x)| \quad (7)$$

$$x = \{N, R_0, C_0, R_m, L_m, C_m\}$$

여기서  $E(x)$ 는 오차를 나타내는 목적 함수이며,  $x$ 는 미지 상수로 구성된 설계 변수 벡터이다.

식 (7)은 일반적인 비선형 최적화 알고리즘을 이용하여 해결할 수 있는데, 이 때 필요한 설계 변수의 초기 추정치는 다음과 같이 구할 수 있다. 먼저  $n$ 개의 압전 세라믹이 병렬 연결로 적층된 경우  $N$  및  $C_0$ 의 추정치는 다음 식으로 구할 수 있다.<sup>(5)</sup>

$$\hat{N} = \frac{d_{33} A_c n}{L_c s_{33}^E}, \quad \hat{C}_0 = \frac{n^2 A_c \epsilon_{33}^T (1 - k_{33}^2)}{L_c} \quad (8)$$

여기서  $A_c$ 는 압전 세라믹의 단면적,  $L_c$ 는 세라믹 부분의

전체 길이를 나타내며,  $s_{33}^E, d_{33}, \epsilon_{33}^T, k_{33}^2$ 는 각각 분극(길이) 방향의 세라믹 재료의 탄성 컴플라이언스, 압전 변환률, 유전 상수, 결합 계수를 나타낸다. 그리고  $R_0$  및  $R_m$ 값의 초기치는 그림 3을 참고로 각각 실험적으로 측정된 어드미턴스의 컨덕턴스  $\hat{G}_E(j\omega_i)$ 와 저주파 영역에서의 값과  $\omega_0$ 에서의 값으로부터 추정할 수 있다. 또한  $C_m$ 값의 초기치는 식 (4), (5)로부터 다음 식으로 구할 수 있다

$$\hat{C}_m = \frac{\hat{k}_{eff}^2 \hat{C}_0}{(1 - \hat{k}_{eff}^2)}, \quad \hat{k}_{eff}^2 \approx 1 - \left( \frac{\hat{\omega}_0}{\hat{\omega}_a} \right)^2 \quad (9)$$

여기서  $\hat{\omega}_0, \hat{\omega}_a, \hat{k}_{eff}^2$ 는 각각 실험으로 측정된 공기중 어드미턴스  $\hat{Y}_E(j\omega_i)$ 로부터 구한 기계적 공진 주파수, 전기적 반공진 주파수, 유효 결합 계수이다. 마지막으로 식 (2)로부터  $L_m$ 의 초기 추정치는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\hat{L}_m = \frac{1}{\hat{\omega}_0^2 \hat{C}_m} \quad (10)$$

### III. 트랜스듀서의 수중 거동

트랜스듀서의 전면추면에서 방사 매질쪽으로 바라본 하중 임피던스를  $Z_L (= R_L + jX_L)$ 이라고 하면, 식 (1), (2)에서 전기적 입력 어드미턴스는 다음 식으로 표현된다.

$$Y_{IN} = Y_{EB} + \frac{N^2}{Z_{ms} + Z_L} \quad (11)$$

$$Y_{EB} = 1/R_0 + j\omega C_0$$

여기서 하중 임피던스가 부가된 상황에서 실험적으로 전기적 입력 어드미턴스  $\hat{Y}_{IN}(j\omega_i)$ 를 측정했다고 가정하자. 그러면 트랜스듀서 자체의  $N, R_0, C_0, R_m, L_m, C_m$  값은 이미 알고 있으므로, 하중 임피던스는 식 (11)으로부터 다음 식으로 계산할 수 있다.

$$Z_L(j\omega) = R_L(j\omega) + jX_L(j\omega) = \frac{N^2}{\hat{Y}_{IN}(j\omega) - Y_{EB}(j\omega)} - Z_{ms}(j\omega) \quad (12)$$

트랜스듀서에 전압  $V$ 를 가할 때 전면추면에서의 방사 속도는 식 (1)에서  $F = -Z_L U$ 를 대입하고 정리하면 다음 식을 얻는다.

$$U = \frac{-NV}{Z_{ms} + Z_L} \quad (13)$$

그러면 트랜스듀서의 방사 전력(radiation power)는 다음과 같다.

$$W = \frac{1}{2} |U|^2 R_L \quad (14)$$

따라서 단위 전압  $V=1$ 을 가할 때, 수중에서의 송신 전압 감도, TVR(transmitting voltage response)는 다음 식으로 결정된다.<sup>14,15)</sup>

$$TVR = 170.8 + 10 \log W + DI \quad (dB/\mu Pa/Volt @ 1m) \quad (15)$$

여기서 DI는 트랜스듀서의 지향 지수(directivity index)로서 무한 배플에서 피스톤 운동한다고 가정하면 다음의 식으로 구할 수 있다.<sup>16)</sup>

$$DI = 10 \log D; D = \frac{(ka)^2}{1 - \frac{J_1(2ka)}{ka}} \quad (16)$$

여기서  $k$ 는 wave number이며,  $a$ 는 방사면의 유효반경이며,  $J_1$ 은 제 1종 1차 Bessel 함수이다.

한편 개방 회로(open circuit) 수신 전압 감도, RVS(receiving voltage sensitivity)는 직접 다음 식으로 구할 수 있다.<sup>17)</sup>

$$RVS = TVR + 20 \log |\hat{Z}_{IN}(j\omega)| - 20 \log(f) - 294 \quad (dB/Volt/\mu Pa) \quad (17)$$

여기서  $f$ 는 주파수이며,  $|\hat{Z}_{IN}(j\omega)|$ ;  $\hat{Z}_{IN}(j\omega) = 1/\hat{Y}_{IN}(j\omega)$ 는 하중 임피던스를 고려할 때의 전기적 입력 임피던스의 크기이다.

#### IV. 예제 모델

본 논문에서는 지름이 18mm이고 길이가 10mm인 2개의 압전 세라믹(PZT4)이 병렬 연결로 결합된 샌드위치형 압전 진동체를 예제 모델을 선정하여, 등가 회로 모델을 규명하였다. 그리고 수중에서의 TVR과 RVS를 측정하고 규명된 모델로부터 계산된 값과 비교하여 모델의 타당성을 검증하였다.

진동체에 사용된 압전 세라믹 재료인 PZT4의 물성치는 다음과 같다.<sup>18)</sup>

$$s_{33}^E = 15.5 \times 10^{-12} m^2/N, \quad \epsilon_{33}^T = 1.15 \times 10^{-8}$$

$$d_{33} = 290 \times 10^{-12} C/N, \quad k_{33} = 0.7$$

그림 4는 임피던스 분석기(HP4194A)를 이용하여 음향 원도우를 부착하지 않고 진동체 자체만의 공기중 어드미턴스를 측정한 것이다. 이를 이용하여 식(7)의 비선형 최적화 문제를 위한 미지수들의 추정치는 다음과 같이 구했다. 먼저 위의 PZT4의 물성치를 식(8)에 대입하면  $N = 0.4675$ ,  $\hat{C}_0 = 293 pC$ 를 얻는다. 그리고 그림 4의 컨덕턴스  $\hat{G}_E(j\omega)$ 로부터  $\hat{R}_0 = 1M\Omega$ ,  $\hat{R}_m = 20.7\Omega$ 를 구할 수 있다. 또한 서셉턴스  $\hat{B}_E(j\omega)$ 로부터  $\hat{\omega}_0$ ,  $\hat{\omega}_a (= 1.236\hat{\omega}_0)$  값을 읽어 식(9)로부터  $\hat{k}_{eff}^2 = 0.3457$ ,  $\hat{C}_m = 155 pC$ 를 얻을 수 있으며,

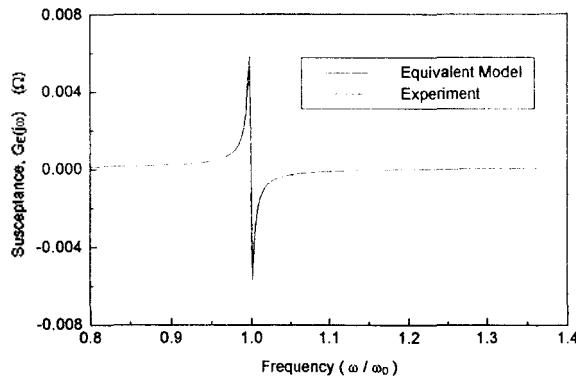
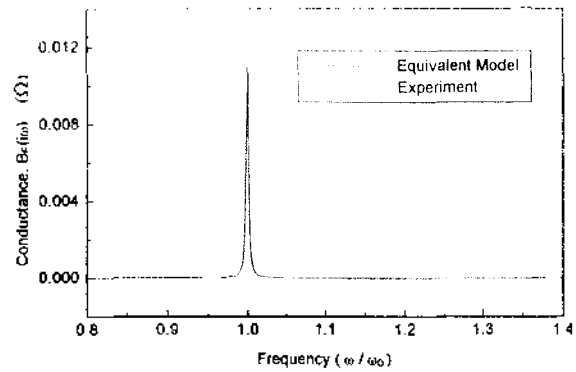


그림 5. 규명된 등가회로와 실험적으로 측정된 어드미턴스

마지막으로 식(10)으로부터  $\hat{L}_m$ 을 구할 수 있다. 여기서  $R_0$  값은 상당히 커서 어드미턴스에 큰 영향을 미치지 않으므로 설계 변수에서 제외하였다. 그리고 식(2)의 어드미턴스 식에서 보면 변환을  $N$ 은  $R, X$ 에 대해 비례상수 역할만 하므로 식(8)에 의해 계산되는 이론적인 값으로 가정하고 역시 미지수에서 제외하였다. 따라서 최종적으로 규명해야 할 미지수는 모두 4개 즉,  $C_0, R_m, L_m, C_m$ 로서 Hooke-Jeeves Direct Search Algorithm<sup>(8)</sup>을 이용하여 식(7)의 비선형 최적화 문제를 풀어 다음의 결과를 얻었다.

$$C_0 = 345 pC, C_m = 844 pC, R_m = 19\Omega, L_m = L^*$$

그림 5는 규명된 등가회로를 이용하여 식(2)로부터 이론적 어드미턴스를 계산하여 실험으로부터 측정된 어드미턴스와 비교한 그림으로, 각 공진 주파수 뿐만 아니라 모든 주파수 영역 내에서도 동특성이 아주 잘 일치함을 알 수 있다.

다음 트랜스듀서의 수중 거동을 해석하기 위하여 특성 임피던스가 물에 가까운 폴리우레탄( $\rho C = 1.98 \times 10^6 Pa \cdot s/m$ )을 이용하여 두께가 1/4 파장이고 유효 지름이 45mm인 원판 형태의 음향 원도우를 제작하여 전면추면에 부착하고, 수중에서의 어드미턴스를 측정하여 그림 6에 나타내었다. 그림 4에 있는 진동체 자체만의 공기중 어드미턴스와 비교하여 보면 하중 임피던스에 의해  $\omega_{0L} (= 0.978$

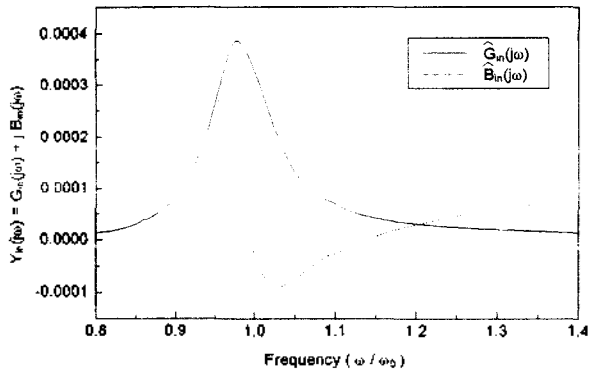


그림 6. 음향 윈도우를 부착한 경우의 수중 어드미턴스

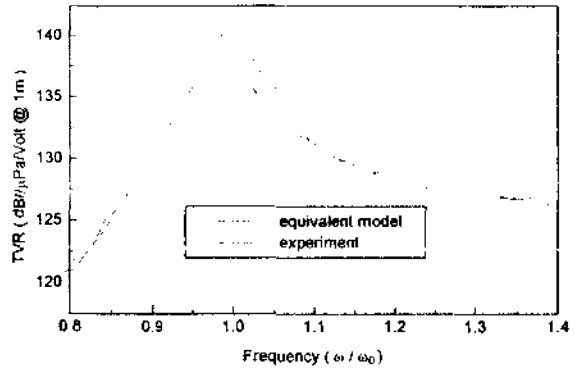


그림 9. 송신 전압 감도

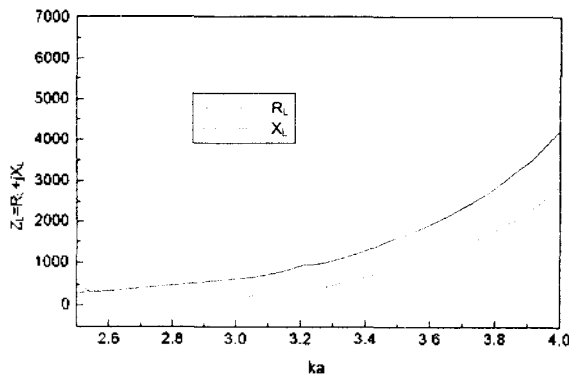


그림 7. 규명된 하중 임피던스

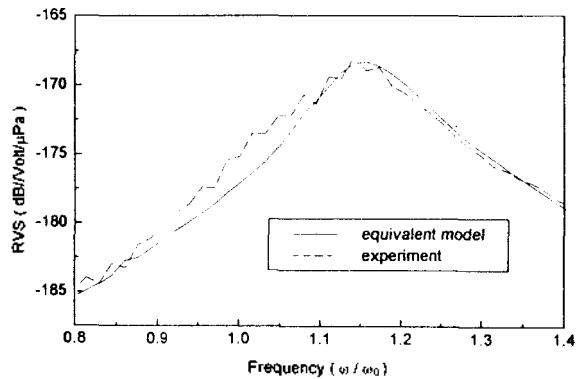


그림 10. 수신 전압 감도

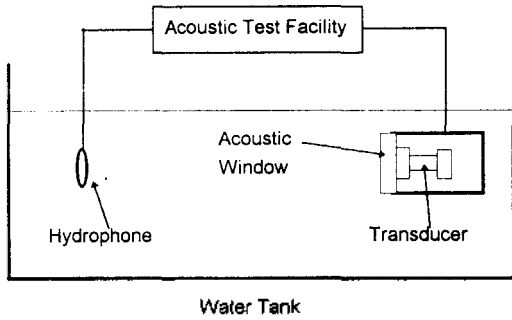


그림 8. 송신 음압 감도 측정 실험 방법

$\omega_0$ ,  $\omega_{aL}(=1.138\omega_0)$  모두 감소하였음을 알 수 있다. 또한 식 (5)에 의한 유효 결합계수는  $k_{off}^2=0.2614$ 로서 공기중에서의 값 ( $k_{off}^2=0.3457$ )보다 역시 감소하였다. 그림 7은 식 (12)로부터 규명된 하중 임피던스를 x축을  $ka(k=\omega/c, a=\text{방사면의 유효반경})$  값으로 하여 그린 것으로 대체적으로  $R_L$  값이  $X_L$  값보다 큰 경향을 보이고 있다.

한편 규명된 등가 회로 모델의 타당성 및 효용성을 검토하기 위해 수중에서의 TVR과 RVS를 측정하고 규명된 모델로부터 계산된 값과 비교하였다. 그림 8에 있는 실험 장치를 이용하여 수중에서 TVR을 측정하고 RVS는 식 (17)을 이용하여 계산하였으며, 그리고 규명된 등가회

로에 대해 식 (15), (16) 및 (17)로부터 TVR 및 RVS를 계산하여 각각 그림 9, 10에 나타내었다. 그림 9, 10에서 보면 TVR 및 RVS 모두  $\omega_0$  근처 약 2-3 dB의 감도 차이를 보이고 있지만, 모든 주파수 영역에서 그 특성이 잘 일치함을 알 수 있다. 오차의 주 원인은 수중 시험치구에서 음향 윈도우가 결합되는 정도에 따라 경계조건이 변화하여 TVR 및 RVS의 감도에 영향을 미치기 때문이라 판단된다.

결론적으로 규명된 등가 회로는 트랜스듀서의 특성 해석 및 성능 예측을 위한 모델로 사용 가능함을 보이고 있다.

## V. 결 론

본 연구에서는 수중 음향 트랜스듀서로 널리 사용되는 샌드위치형 압전 진동체의 등가 회로 모델을 규명하는 방법을 제시하였다. 먼저 공기중에서 실험적으로 트랜스듀서의 전기적 어드미턴스를 측정하고 이를 이론적 어드미턴스와 비교하여 그 오차가 최소가 되도록 하는 비선형 최적화 문제를 풀어 등가 회로에 관련된 미지 상수를 규명하였다. 규명된 등가 회로 모델의 타당성 및 효용성을 검토하기 위해 수중에서의 TVR과 RVS를 측정하고 규명된 모델로부터 계산된 값과 비교하였다.

결론적으로 규명된 등가 회로는 트랜스듀서의 특성 해

식 및 성능 예측을 위한 모델로 사용 가능함을 보였다.

### 참 고 문 헌

1. 조치영, 김연수, 윤희규, "수중 음향 트랜스듀서용 샌드위치형 압전 진동체의 설계," 한국소음진동공학회지, 제 5권 4호, pp577-583, 1995.
2. B. Tocquet and D. Boucher, "In-air analysis of piezoelectric Tonpilz transducers in a wide frequency band using a mixed finite element-plane wave method," *Journal of Acoustic Society of America*, Vol. 78(5), Nov., 1985, pp1499-1507.
3. D. Church and D. Pincock, "Predicting the Electrical Equivalent of Piezoceramic Transducers for Small Acoustic Transmitters," *IEEE Transactions on Sonics and Ultrasonics*, Vol. SU-32, No.1, 1985, pp61-64.
4. L. E. Kinsler, *Fundamentals of Acoustics*, John Wiley & Sons, 1982.
5. W. P. Mason, *Physical Acoustics. Principles and Methods*, Volume. I. Academic Press, 1964.
6. R. J. Urick, *Principles of Underwater Sound*, McGraw-Hill, 1983.
7. R. J. Bobber, *Underwater Electroacoustic Measurements*, Naval Research Laboratory, 1970.
8. Kuester and J. H. Mize, *Optimization Techniques with FORTRAN*, McGraw-Hill, 1973.

▲조 치 영(Chee Young Joh): 14권 5호 참조

▲서 회 선(Hee Seon Seo): 14권 5호 참조

▲이 정 민(Jeong Min Lee): 15권 1호 참조