

# 마찰력이 개재된 반복충돌 혼돈 동역학의 수치해석적 연구 - 진동보울피더

한인환, \* 이윤재, \*\* 윤구영\*

## Numerical Study on Chaotic Dynamics of Repeated Impacts with Friction - Vibratory Bowl Feeders

Inhwan Han, \* Yunjae Lee, \*\* Koo Young Yoon\*

### ABSTRACT

The vibratory bowl feeder is the most versatile of all hopper feeding devices for small engineering parts, and the typical nonlinear dynamic system experiencing repeated impacts with friction. We model and analyze the dynamic behavior of a single part on the vibrating track of the bowl feeder. While the previous studies are restricted to the sliding regime, we focus our analysis on the hopping regime where the high conveying rate is available. We present the numerical analysis results for conveying rate and frictional impact process both in periodic and chaotic regimes. We examined the dynamic effects from the variation of several physical parameters, and presented the important features for the design of the vibratory bowl feeder. This research holds much potential for leverage over design problems of wide range of mechanisms and tools with repeated collisions.

**Key Words** : Vibratory Bowl Feeder(진동보울피더), Repeated Impacts(반복 충돌), Friction(마찰), Hopping Regime(호핑 영역), Conveying Rate(이송률), Periodic Motion(주기 거동), Chaotic Motion(혼돈 거동)

### 1. 서 론

진동 보울피더(vibratory bowl feeder)는 진동 수송의 원리에 의하여 소형부품을 급송하는 기기 중 가장 광범위하게 사용되고 있다.<sup>(1)</sup> Fig. 1에 보여지는 것처럼, 부품이 이동하는 트랙은 헬리컬형이며, 속이 빈

통용기(bowl)의 내부 벽면을 따라 부착되어 있다. 보울은 무거운 몸체에 고착된 3-4 세트의 경사진 판 스프링(leaf springs)에 의해 지지된다. 진동은 몸체에 붙은 전자석으로부터 보울에 공급되는 데, 스프링 지지 시스템이 보울의 운동을 구속한다. 보울에 부품이 놓여지게 될 때, 진동운동의 효과로 부품들이 트랙을 따라 기어

\* 홍익대학교 기계설계학과(정회원)

\*\* 홍익대학교 대학원 기계설계학과

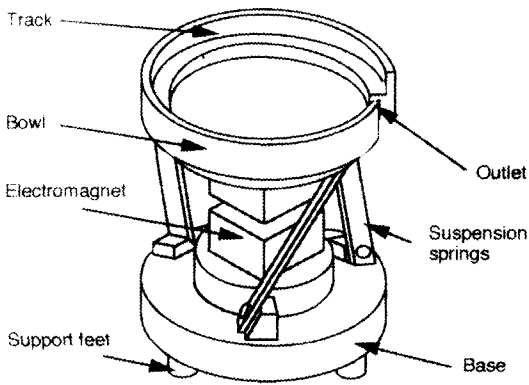


Fig. 1 Vibratory bowl feeder

올라가는 운동을 하게 된다. 트랙 위에서 부품의 운동은 미끄럼 형태(sliding type, S-regime), 호핑 형태(hopping type, H-regime), 혹은 양자의 혼합 형태(HS regime)를 가질 수 있다.<sup>[2]</sup>

Boothroyd<sup>[3]</sup>의 선구적인 연구 이후에도 진동 보울피더에 관해 무수한 이론적, 실험적 연구가 수행되어 왔다. 이러한 연구들은 보울피더의 설계, 제작자들이 당면한 어려움을 잘 설명하고 있다. 기존의 연구들은 주로 S-영역에 관한 연구가 거의 전부였다. 그러나, 많은 실험과 해석을 통해서 진동 보울피더는 H-영역에서 오히려 더 높은 이송률을 보이는 것으로 알려져 있다.<sup>[2]</sup> 진동 보울피더는, H-영역에서 반복충돌이 발생하는 전형적 비선형 동적 기계시스템이다. 따라서 진동 주파수와 진폭의 조합으로 형성되는 제어변수의 변화에 따라 혼돈(chaos) 영역이 존재하게 된다. 혼돈 영역의 존재는 비선형 동적 시스템에서 필수적으로 발생하는 현상이며, 외부의 기계적인 소음에 의해 발생되지 않는다. 주기 영역으로부터 혼돈 영역으로의 천이는 주기배중 현상(Feigenbaum type)의 모습으로 나타난다.<sup>[4]</sup> 보울 피더에서 부품이 호핑 형태의 모습을 띄기 시작한다면, 혼돈 해의 존재가 고려되어야만 한다. 선형 동적 시스템의 경우에는 해석적인 해를 구하는 것이 언제나 가능하지만, 비선형 동적 시스템의 경우에는 그렇지 않다. 따라서, 비선형 시스템의 경우는 통상 컴퓨터를 이용한 수치해석적 기법을 적용하게 된다.

혼돈 동적 시스템의 예로 잘 알려져 있는 bouncing ball 문제는, 본 논문에서 대상으로 삼고 있는 진동 보

울피더 문제와 본질적으로 유사하다. Bouncing ball 문제란, 주기적으로 진동하는 테이블 위에서 크기를 무시할 수 있는 작은 ball이 반복해서 충돌하는 시스템으로, Holmes<sup>[5]</sup>를 비롯한 많은 학자들<sup>[6-9]</sup>의 연구 대상이 되어 왔다. Bouncing ball 문제가 비교적 실험이 용이하면서도 비선형 동적 시스템에서 발생할 수 있는 거의 모든 현상의 관측이 가능하므로 집중적인 연구 대상이 된 것이다. 특히, Tufillaro 등<sup>[8,9]</sup>은 bouncing ball 문제에 관한 실험적 결과와 시뮬레이션 결과를 아울러 제시한 바 있다. 그러나, 충돌 현상은 현실적으로 마찰을 수반하는 데도 bouncing ball 문제에 관한 종래의 연구들은 마찰의 역할을 무시하여 왔다. 따라서, 그 결과는 대체로 실용적 의미에서 부적절한 것이 되며, 비교적 높은 마찰계수를 보여주는 보울피더의 경우는 별도의 해석을 요하게 된다.

Hongler 등<sup>[2,10,11]</sup>은 H-영역에서 부품의 이송률(conveying rate)에 특별히 주목하여, 주기 거동(periodic motion) 및 혼돈 거동(chaotic motion)에 관한 해석 결과를 제시하였다. 그런데, 그들은 마찰이 개재된 충돌 문제에 대해 Brach<sup>[12]</sup>가 정의한 역적비(impulse ratio)와 같은 맥락으로 접선 반발계수의 개념을 임의로 설정하여 해석을 수행하였다. 이는, 단순히 Newton이 정의한 법선 반발계수의 개념을 접선 방향에 그대로 이용한 것이며, 적절하지 못한 것으로 여겨진다. 본 논문에서는, 저자에 의해 이미 발표된 마찰 충돌이론<sup>[13]</sup>에 의거하여, 진동하는 보울피더 트랙 위에 놓여 있는 부품의 주기 및 혼돈 동적 거동에 관한 해석 결과를 제시한다. 주기 영역에서는 이송률을 비롯한 동적 거동에 관한 해석적인 해를 구하는 것이 비교적 용이하지만, 혼돈 영역에서는 거의 불가능하므로 컴퓨터에 의한 수치해석 결과를 제시한다.

## 2. 진동 보울피더 모델링

진동 보울피더에서 보울은 선형 수직 진동과 함께 그 수직 축에 관해 비틀림 진동도 가지게 된다. 따라서, 경사진 트랙의 어느 임의의 일부부분, 그 트랙 부분보다 큰 각도로 경사지고 대략 직선인 경로를 따라 진동하게 된다. 보울에 부품이 놓여지게 될 때, 이러한 진동운동의 효과로 부품들이 트랙을 따라 기어올라가는 운동을 하게 된다.<sup>[3]</sup>

진동 보울피더 모델링을 수학적으로 용이하게 수행하

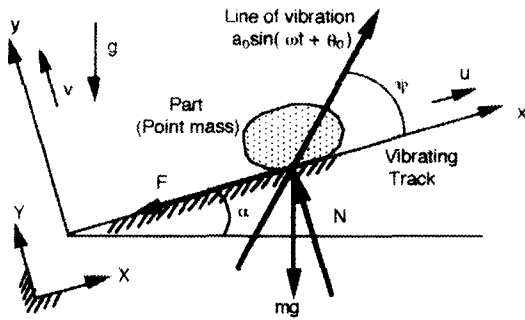


Fig. 2 Modeling of a vibratory bowl feeder

기 위하여, 몇 가지 가정을 한다. 첫째, 부품(part)을 질점(particle)으로 취급하여 크기를 무시하고, 상대적으로 질량이 매우 큰 트랙의 운동은 부품의 충돌을 포함한 어떤 동적 거동에도 영향을 받지 않는다고 고려한다. 둘째, 부품과 트랙사이에는 쿨롱 마찰이 존재하며, 부품이 트랙을 따라 굴러 내리는(roll down) 경향이 없는 것으로 가정한다. 셋째, 선형진동트랙(linear oscillating track)을 고려함으로써, 보울 내부에서 고려해야만 하는 원심, 코리올리 가속도 등을 무시한다. 넷째, 비틀 진동에 의한 효과를 무시하며, 트랙 방향과 트랙에 수직인 방향 진동간의 위상차도 없는 것으로 간주한다.

진동 보울피더를 해석에 용이하도록 모델링한 것이 Fig. 2에 보여진다. 트랙은 일정한 진동선(line of vibration)을 따라 조화 함수적으로 진동한다고 고려한다. 진동각은  $\psi$ , 트랙의 경사각은  $\alpha$ 로 표시하면, 진동선은 수평에 대하여  $(\psi + \alpha)$ 의 각도를 이루게 된다. Fig. 2에서  $(x, y)$ 축은 진동트랙에 고정되어 트랙과 함께 움직이는 국부 좌표계이다.

트랙과 부품의 운동방정식은 절대 좌표계  $(X, Y)$ 에서 식 (1), (2)로 각각 표현된다.

$$\begin{cases} \ddot{X}_T = -a_0 \omega^2 \sin(\omega t + \theta_0) \cos \psi \\ \ddot{Y}_T = -a_0 \omega^2 \sin(\omega t + \theta_0) \sin \psi \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \ddot{X}_p = -g \sin \alpha - \frac{F}{m_p} \\ \ddot{Y}_p = -g \cos \alpha + \frac{N}{m_p} \end{cases} \quad (2)$$

식 (2)에서  $N$ 은 부품에 대한 트랙의 법선 반력이고,  $F$ 는 쿨롱 마찰력이다. 식 (1), (2)로부터 부품의 트랙에 대한 상대 운동은 식(3)으로 나타난다

$$\begin{cases} \ddot{x} = a_0 \omega^2 \sin(\omega t + \theta_0) \cos \psi - g \sin \alpha - \frac{F}{m_p} \\ \ddot{y} = a_0 \omega^2 \sin(\omega t + \theta_0) \sin \psi - g \cos \alpha + \frac{N}{m_p} \end{cases} \quad (3)$$

where  $\ddot{x} = \ddot{X}_p - \ddot{X}_T$ ,  $\ddot{y} = \ddot{Y}_p - \ddot{Y}_T$

### 2.1. S-영역(미끄럼 영역)

S-영역에서는 부품이 트랙과 계속적인 미끄럼 접촉을 유지하게 된다. 이 영역에서는 식 (3)에서  $\dot{y} = 0$  이 되어야 하므로 법선반력이 식 (4)로 구해진다.

$$\begin{aligned} N &= m_p a_0 \omega^2 \{ \lambda - \sin(\omega t + \theta_0) \} \sin \psi \\ \text{where } \lambda &\triangleq \frac{g \cos \alpha}{a_0 \omega^2 \sin \psi} \end{aligned} \quad (4)$$

식 (4)에서 알 수 있는 것처럼, 부품이 트랙과 항상 접촉을 유지하기 위해서는 제어변수  $\lambda$ 가 1 보다 커야 한다. 따라서,  $\lambda > 1$  일 경우는 S-영역이 되고,  $0 < \lambda \leq 1$  일 경우에는 H-영역 혹은 양자의 혼합 형태인 HS-영역이 된다. Boothroyd<sup>[3]</sup>에 따르면, S-영역에서는 상향 미끄럼(forward sliding-up), 하향 미끄럼(backward sliding-down), 정지(stationary) 등의 구간이  $\ddot{x}$ 을 구성하는 파라미터 값들에 따라 각각 존재 혹은 혼재하게 된다. 식 (4)에서 정의되는 제어변수  $\lambda$ 는 트랙의 진동 주파수와 진폭의 조합으로 구성되는 무차원수이며, 부품의 주기 및 혼돈 동적 거동 해석에 주요한 역할을 하게 된다.

### 2.2. H-영역(호핑 영역) 및 HS-영역(혼재 영역)

호핑이 일어나는 H-영역에서는, 트랙과의 연속적인 충돌 사이에서 부품의 상대 자유비행운동(relative free flight motion)은 식 (3)으로부터 식 (5)로 표현할 수 있다.

$$\begin{cases} \ddot{x} = a_0 \omega^2 \sin(\omega t + \theta_0) \cos \psi - g \sin \alpha \\ \ddot{y} = a_0 \omega^2 \sin(\omega t + \theta_0) \sin \psi - g \cos \alpha \end{cases} \quad (5)$$

식 (5)를 무차원화하여 정리하면, 트랙의 접선과 법선 방향으로 각각 식 (6a), (6b)와 같이 나타낼 수 있

고

$$\frac{d}{d\tau} u(\tau) = \sin(\tau + \theta_0) \cdot \cos \psi - \lambda \sin \psi \tan \alpha \quad (6a)$$

$$\frac{d}{d\tau} v(\tau) = \sin(\tau + \theta_0) \cdot \sin \psi - \lambda \sin \psi \quad (6b)$$

where  $u \triangleq \frac{X}{a}$ ,  $v \triangleq \frac{Y}{a}$ ,  $\tau \triangleq \omega t$

부품과 트랙의 절대운동을 살펴보면, 트랙의 각 방향에 대한 운동은 식 (7)로 나타낼 수 있으며, 부품의 절대 운동은 식 (6)에서의 무차원 변수를 이용하여 식 (8)로 표현된다.

$$\begin{cases} U_x(\tau) = \sin(\tau + \theta_0) \cos \psi \\ V_x(\tau) = \sin(\tau + \theta_0) \sin \psi \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} U_y(\tau) = u(\tau) + U_x(\tau) \\ V_y(\tau) = v(\tau) + V_x(\tau) \end{cases} \quad (8)$$

HS-영역에서는, 부품이 트랙과 반복적인 충돌을 하다가 충돌 후 부품이 트랙에서 분리되지 않고 계속해서 미끄럼 접촉을 유지하는 경우가 발생할 수 있다. 또는, 초기에 부품이 트랙위에 놓여 있는 경우도 고려할 수 있다. 이러한 미끄럼 접촉은  $\lambda \leq 1$  일 경우에만 해제될 수 있으며,  $\lambda > 1$  일 경우에는 해제될 수 없다. 미끄럼 접촉이 해제되는 순간은, 식 (4)에서  $N=0$ 으로 하여 구할 수 있으며 식 (9)로 나타난다.

$$\theta_{unstuck} = \tau_{unstuck} + \theta_0 = \sin^{-1} \lambda \quad (9)$$

트랙이  $-Y$  방향으로 가속될 때만 부품이 트랙과의 미끄럼 접촉에서 해제될 수 있다. 따라서, 식 (1)로부터 알 수 있는 것처럼, 부품이 트랙과 함께 운동을 하다가 미끄럼 접촉이 해제되는 순간  $\theta_{unstuck}$ 은 반드시 1 혹은 2 사분면 상에 위치하여야 한다. 그리고, 만일  $n$ 번째 충돌  $(\tau - \tau_n)$ 에서 미끄럼 접촉이 발생한다면, 접촉이 해제되는 순간은 식(10)과 같이  $\tau_n$ 으로부터 한 주기 내에 반드시 존재하게 된다.

$$\tau_n \leq \tau_{unstuck} < \tau_n + 2\pi \quad (10)$$

### 3. 동적 거동 해석

전 절에서 구한 진동 보울퍼터 트랙 상 부품의 동적 모델에 근거하여, H-영역에서의 부품의 충돌 거동에 관

한 해석을 수행한다. 부품의 충돌 발생 순간과 충돌 순간의 속도를 결정하기 위한 방정식을 유도하고, 마찰 충돌 이론을 적용해 충돌 후 속도 및 impact case를 구하게 된다. 아울러 H-영역에서 이송률에 관한 해석 결과도 제시한다.

#### 3. 1. 충돌 거동 해석

초기  $(\tau = \tau_0)$ 로부터 매 충돌순간을  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, \dots$ 으로 하고,  $n$ 번째 충돌  $(\tau = \tau_n)$ 에서 충돌전 속도(pre-impact velocity) 및 충돌후 속도(post-impact velocity)를 식 (11)과 (12)로 각각 정의한다.

$$\dot{u}_n \triangleq \left. \frac{du}{d\tau} \right|_{\tau = \tau_n}, \quad \dot{v}_n \triangleq \left. \frac{dv}{d\tau} \right|_{\tau = \tau_n} \quad (11)$$

$$\dot{u}_n' \triangleq \left. \frac{du}{d\tau} \right|_{\tau = \tau_n'}, \quad \dot{v}_n' \triangleq \left. \frac{dv}{d\tau} \right|_{\tau = \tau_n'} \quad (12)$$

$$\left( \dot{u}_n' \triangleq \left. \frac{du}{d\tau} \right|_{\tau = \tau_n'}, \quad \dot{v}_n' \triangleq \left. \frac{dv}{d\tau} \right|_{\tau = \tau_n'} \right)$$

$n \geq 1$  인 경우, 식 (12)로 표현되는 충돌후 속도는 식 (11)의 충돌전 속도로부터 마찰충돌이론을 적용해 구할 수 있다.

$n$ 번째 충돌 직후로부터  $(n+1)$ 번째 충돌까지의 연속적인 구간  $(\tau_n, \tau_{n+1})$ 에서, 식 (6)을 적분하면 식 (13)을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\tau} &= \cos \psi \{-\cos(\tau + \theta_0) + \cos(\tau_n + \theta_0)\} \\ &\quad - \lambda(\tau - \tau_n) \sin \psi \tan \alpha + \dot{u}_n' \end{aligned} \quad (13a)$$

$$\begin{aligned} \frac{dv}{d\tau} &= \sin \psi \{-\cos(\tau + \theta_0) + \cos(\tau_n + \theta_0)\} \\ &\quad - \lambda(\tau - \tau_n) \sin \psi + \dot{v}_n' \end{aligned} \quad (13b)$$

식 (13)을 구간  $(\tau_n, \tau_{n+1})$ 에서 한번 더 적분하면 식 (14)가 구해진다.

$$u(\tau) = -\cos \psi \left\{ \sin(\tau + \theta_0) - \sin(\tau_n + \theta_0) \right\} \quad (14a)$$

$$\begin{aligned} &+ \left\{ \cos \psi \cos(\tau_n + \theta_0) + \dot{u}_n' \right\} (\tau - \tau_n) \\ &- \frac{\lambda}{2} (\tau - \tau_n)^2 \sin \psi \tan \alpha + u_n \end{aligned}$$

$$v(\tau) = -\sin \psi \left\{ \sin(\tau + \theta_0) - \sin(\tau_n + \theta_0) \right\}$$

$$+ \left\{ \sin \psi \cos(\tau_n + \theta_0) + \dot{v}_n' \right\} (\tau - \tau_n)$$

$$-\frac{\lambda}{2}(\tau_n - \tau_{n-1}) \sin \psi + v_n = 0 \quad (14b)$$

식 (14b)를 이용하면 n번째 충돌 순간  $\tau_n$ 으로부터 다음번 충돌 순간  $\tau_{n+1}$  을 구할 수 있게 되며, 그 관계 식은 식 (15)로 나타나게 된다.

$$v(\tau_{n+1}) = -\sin \psi \{ \sin(\tau_{n+1} + \theta_n) - \sin(\tau_n + \theta_n) \} + \left\{ \sin \psi \cos(\tau_n + \theta_n) + \dot{v}_n \right\} (\tau_{n+1} - \tau_n) - \frac{\lambda}{2} (\tau_{n+1} - \tau_n)^2 \sin \psi + v_n = 0 \quad (15)$$

식 (15)에서  $v_n$ 은 초기 상대위치  $v_0$ 를 제외하고는 항상 0이 된다. 식(15)로부터 구한  $\tau_{n+1}$ 을 식 (13)에 적용하면, (n+1)번째 충돌에서의 충돌전 속도를 아래와 같이 구할 수 있다.

$$\dot{u}_{n+1} = \cos \psi \left\{ -\cos(\tau_{n+1} + \theta_n) + \cos(\tau_n + \theta_n) \right\} - \lambda(\tau_{n+1} - \tau_n) \sin \psi \tan \alpha + \dot{u}_n \quad (16)$$

$$\dot{v}_{n+1} = \sin \psi \left\{ -\cos(\tau_{n+1} + \theta_n) + \cos(\tau_n + \theta_n) \right\} - \lambda(\tau_{n+1} - \tau_n) \sin \psi + \dot{v}_n \quad (17)$$

실제 충돌의 발생하기 위해서는 식 (17)에서  $\dot{v}_{n+1} < 0$  이어야만 한다.

### 3.2. 마찰 충돌 해석

n번째 충돌에서 충돌후 속도를 구하기 위하여, 충돌 과정 중 접촉점의 상대 미끄럼 운동 변화를 고려한 Han의 마찰충돌이론<sup>(13)</sup>을 적용한다. 부품을 크기가 없는 질점으로 가정하였으므로, 충돌 물체의 질량 관성모멘트와 기하학적 위치에 의해 결정되는 충돌 상수  $B=0$  이 되고, 마찰 충돌은 미끄럼 정지(sliding and sticking) 충돌과 순미끄럼(forward sliding) 충돌의 2가지 형태로만 나타나게 된다. 미끄럼 정지 충돌은 impact case 1 혹은 3이 되고 순미끄럼 충돌은 impact case 5가 된다. 따라서, 길동 보울피더 트랙과 질점 부품과의 충돌은 impact case 1, 3, 5로만 발생한다. 그 결과는 아래와 같이 요약될 수 있으며, 마찰 충돌 이론의 세부 내용은 Han and Gilmore의 논문<sup>(13)</sup>에서 참조할 수 있다.

$$\text{미끄럼 정지 충돌 : } |\dot{u}_n| \leq -(1+e)u \dot{v}_n$$

(impact case 1,3)

$$\begin{cases} \dot{u}_n = 0 \\ \dot{v}_n = -e\dot{v}_n \end{cases} \quad (18a)$$

$$\begin{cases} \dot{u}_n = 0 \\ \dot{v}_n = -e\dot{v}_n \end{cases} \quad (18b)$$

순미끄럼 충돌 :  $|\dot{u}_n| > -(1+e)u \dot{v}_n$   
(impact case 5)

$$\begin{cases} \dot{u}_n = \dot{u}_n + \frac{\dot{u}_n}{|\dot{u}_n|} \mu(1+e)\dot{v}_n \\ \dot{v}_n = -e\dot{v}_n \end{cases} \quad (19a)$$

$$\begin{cases} \dot{u}_n = \dot{u}_n + \frac{\dot{u}_n}{|\dot{u}_n|} \mu(1+e)\dot{v}_n \\ \dot{v}_n = -e\dot{v}_n \end{cases} \quad (19b)$$

충돌시 접선방향의 상대 속도성분  $\dot{u}_n = 0$  이라면 impact case 6에 해당되어 정지(sticking) 충돌의 형태를 띠게 되고, 충돌후 속도는 미끄럼 정지 충돌의 경우와 마찬가지로 식 (18)로 결정된다. 식 (18), (19)로부터 알 수 있는 것처럼, impact case를 결정하거나, 충돌후 속도를 구하는 데 관련된 파라미터들은  $\mu, e, \dot{u}_n, \dot{v}_n$  들이며 질량은 영향을 끼치지 못한다. 또한, 비교적 높은 마찰계수가 설정되는 경우에는, 미끄럼 정지 충돌의 경우에 해당하게 된다. 식 (18), (19)는 동적 거동의 해석적 해를 구할 때 중요한 역할을 수행할 수 있다. 식 (17)에 마찰충돌 해석의 결과인 식 (18b), (19b)를 적용하면 충돌후 법선 방향 속도 성분에 관한 식 (20)을 얻을 수 있다.

$$\dot{v}_{n+1} = e \left\{ \sin \psi \left[ \cos(\tau_{n+1} + \theta_n) - \cos(\tau_n + \theta_n) \right] + \lambda(\tau_{n+1} - \tau_n) \sin \psi - \dot{v}_n \right\} \quad (20)$$

식 (15)와 (20)으로 표현되는 사상 방정식(mapping equation)은 결국 bouncing ball 문제가 되며, 주기해(periodic solution) 및 혼돈해(chaotic solution)를 제시하게 된다. 이 두 구간의 출현은 제어변수  $\lambda$ 에 의해 좌우되게 된다. 주기 구간으로부터 혼돈 구간으로의 전이는 주기배중 현상(Feigenbaum type)의 모습을 보인다.

### 3.3. 이송률

해석적으로 완벽하게 이송률을 구하는 것은 일반적으로 용이하지가 않다. 미끄럼 접촉이나 호핑 형태 모두가 부품의 이송률에 기여하고 있다. 본 논문에서는 순

수 호핑 영역에서의 이송률만 고려할 것이다. 그러나, 호핑과 미끄럼 접촉이 혼재된 영역에서도 각개 형태가 이송률에 기여하는 부분을 별도로 계산하는 것이 언제나 가능하다.<sup>[11]</sup>

n번째와 (n+1)번째 연속적인 충돌 사이의 부품의 트랙 방향 평균 속도는 식(21)로 나타낼 수 있다.

$$W_n = \frac{1}{\tau_{n+1} - \tau_n} \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} \left( \frac{d}{dt} u(\tau) \right) d\tau \quad (21)$$

식 (21)에 식 (14a)를 적용하여 정리하면 식 (22)와 같이된다.

$$W_n = \cos \psi \cos(\tau_n + \theta_0) + \dot{u}_n' - \frac{\lambda}{2} (\tau_{n+1} - \tau_n) \sin \psi \tan \alpha - \frac{\cos \psi}{\tau_{n+1} - \tau_n} \left\{ \sin(\tau_{n+1} + \theta_0) - \sin(\tau_n + \theta_0) \right\} \quad (22)$$

호핑영역에서의 평균 이송률(mean conveying rate)을 구하면, 식(23)으로 쓸 수 있게 된다.

$$\langle W \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} W_n \quad (23)$$

식 (23)에서 평균이송률이 실질적 의미를 가지기 위해서, N은 충분히 큰 값을 가져야 한다. 식 (23)은 혼돈 구간에서의 평균 이송률을 계산하는 데 사용한다. 그러나, 부품의 운동이 주기적으로 반복되는 주기 구간에서는 이송률을 이론적 해석이 가능하도록 구할 수 있으며, 주기(period) k를 가지는 구간에서 평균이송률은 식 (24)로 표현할 수 있다.

$$\langle W \rangle = \frac{1}{k} \sum_{n=0}^{k-1} W_{n+1} \quad (24)$$

주기 구간에서는 평균 이송률에 대한 해석적인 해를 구하는 것이 어느 정도 가능하다. 마찰 충돌 해석 결과에 따르면, 비교적 높은 마찰계수의 경우에는 미끄럼정지 충돌이 발생하므로 식 (18)의 결과를 그대로 사용할 수 있게 된다.

트랙이 켜진 진동할 때마다 한번의 충돌이 발생되며, 주기 k=1의 영역을 고려하면 식 (25)와 같이 쓸 수 있다.

$$\tau_{n+1} = \tau_n + 2\pi j, \quad \dot{u}_{n+1}' = \dot{u}_n' = \dot{v}' \quad (25)$$

식 (15)와 (20)으로 표현되는 사상방정식에 식 (25)를 적용하면 각각 식 (26), (27)과 같이 된다.

$$j\pi\lambda = \sin \psi \cos(\tau_n + \theta_0) + \dot{v}' \quad (26)$$

$$\dot{v}' = \frac{2j\pi\lambda e}{1+e} \sin \psi \quad (27)$$

식 (26), (27)로부터 충돌 순간에 관한 식 (28)이 유도된다.

$$\tau_n + \theta_0 = \cos^{-1} \left\{ j\pi\lambda \left( \frac{1-e}{1+e} \right) \right\} \quad (28)$$

식 (28)로 주기 1의 구간에서 충돌 위상(phase)을 해석적으로 구하게 된다. 식 (28)에서  $\tau_n$ 을 실질적으로 구하기 위한 조건은 식 (29)로 나타난다.

$$\lambda \leq \frac{1}{j\pi} \left( \frac{1+e}{1-e} \right) \quad (29)$$

비교적 높은 마찰계수라는 가정이라면, 주기 1 영역에서 미끄럼정지 충돌만 발생하게 되며, 식 (18)로부터 식 (30)과 같이 된다.

$$\dot{u}_{n+1}' = \dot{u}_n' = 0 \quad (30)$$

식 (22)에 식 (24), (25), (28)을 적용하면, 평균 이송률에 대한 해석적인 해를 식 (31)로 구할 수 있게 된다.

$$\langle W \rangle = W_n = j\pi\lambda \left( \cos \psi \frac{1-e}{1+e} - \sin \psi \tan \alpha \right) \quad (31)$$

식 (31)로부터 알 수 있는 것처럼, 주기 1 영역에서 제어변수  $\lambda$ 가 증가할수록 평균 이송률은 선형적으로 증가하게 되게 된다. 또한, 진동각  $\psi$ , 트랙 경사각  $\alpha$ , 반발계수  $e$ 가 증가하게 되면 평균 이송률은 감소하게 되며 마찰계수의 변화에는 무관하게 된다. 이와 같이 주기 구간에서는, 식 (15), (20)으로 표현되는 사상방정식을 풀어서 평균이송률을 해석적으로 구하는 것이 가능하게 된다. 그러나, 혼돈 구간의 경우에는 해석적 해를 구하는 것이 용이하지 않으므로 수치해석적 방법에 의존해야 한다.

#### 4. 시뮬레이션 해석

전 절에서 제시한 해석 결과에 따라 프로그램을 작성

하여 컴퓨터 시뮬레이션을 수행하였다. 시뮬레이션 해석을 수행하기 위한 대상 모델로, 실험에 이용할 진동 보울피더에 관해 대략적으로 추정한 파라미터 값들이 Table 1에 나타나 있다. 제어변수  $\lambda$ 는 진폭  $a_0$ 의 크기를 변화시킴으로써, 그 조절이 가능하게 된다.

Fig. 3은 표준 진동보울피더에 대한 주기 배중 분기도(period doubling bifurcation diagram)를 보여 주고 있다. 이 분기도는 미끄럼 접촉이 발생하는 구간은 모두 제외하고, 순수 H-영역에 대한 결과만 제시하고 있다. Fig. 3은 각 제어변수 값에서 500회의 충돌을 수행하였으며, 앞의 350회를 제외하고 뒤의 150회를 각각 도시한 것이다. Fig. 3의 가로축에는 제어변수  $\lambda$ 와 표준 모델의 진동 주파수  $f = 120$  Hz에 상응하는 진폭  $a_0$ 의 크기가 함께 보여진다. 시뮬레이션 결과에 따르면, 반발계수  $e$ 가 감소할 수록 분기도는 제어변수  $\lambda$ 의 더 작은 영역으로 이동하는 경향을 보여주고 있다. 분기도에서 주기  $2^{-1}$ 에서 주기  $2^1$ 로의 분기점을  $\lambda_i$ 라고 한다면 파이겐바움 수(Feigenbaum number)  $\delta$ 는 식 (32)로 구할 수 있다.<sup>(4)</sup>

$$\delta = \lim_{i \rightarrow \infty} \delta_i = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\lambda_i - \lambda_{i-1}}{\lambda_i - \lambda_{i-2}} \quad (32)$$

식 (32)에 근거하여, 시뮬레이션을 통해 파이겐바움 수를 구하는 과정이 Table 2에 보여진다. 파이겐바움 수는 주기 배중의 수렴률을 나타내는 만유상수(universal constant)로서 4.66...의 값을 가진다. 주기배중구간의 끝점으로서, 주기 구간과 혼돈 구간을 구분하는 파이겐바움 점 (Feigenbaum point)<sup>(4)</sup>  $\lambda_*$ 는 Table 2에서 볼 수 있다.

Fig. 4는 제어변수의 변화에 따른 마찰충돌 case와 평균이송률의 추이를 보여주고 있다. Fig. 4(a)에서 보는 것처럼, 표준 모델 마찰계수  $\mu=0.6$ 의 경우에 주기 1 및 2 구간에서는 모두 미끄럼정지 충돌이 발생하고 있다. Fig. 5(a)에서 보는 것처럼,  $\mu$ 가 0.8까지 높아지는 경우에는 모든 주기 구간에서 미끄럼정지 충돌만 일어난다. 그리고  $\mu$ 가 0.4정도로 낮아지게 되면, 주기 1 구간을 제외하고는 모든 주기, 혼돈 구간에서 미끄럼정지 충돌과 순미끄럼 충돌이 혼재하게 된다. 또한, 진동 각  $\psi$ 가 증가하면 순미끄럼 충돌 발생구간이 감소하게 되며, Fig. 5(b)에서처럼  $\psi=30^\circ$ ,  $\mu=0.8$ 에 이르게 되면, Fig. 3에 보여지는 모든 구간에서 미끄럼정지 충돌만 발생하게 된다.

Fig. 4(b)에서 볼 수 있는 것처럼, 주기 구간에서 이송률은 제어변수의 값이 증가함에 따라 선형 증가하고 있다. 그러나, 혼돈 구간에서는 이송률이 진동 주파수와 진폭의 조합으로 나타나는 제어변수에 따른 뚜렷한 변화를 보여주고 있지 않다. 따라서, 제어변수의 변화에 따른 평균이송률은 혼돈 구간이 주기 구간보다 비교적 안정된 모습을 보여주고 있다. 다만, 평균 이송률

Table 1 Physical data for the standard model

$\psi$	$\alpha$	$f$	$e$	$\mu$
25°	5°	120 Hz	0.2	0.6

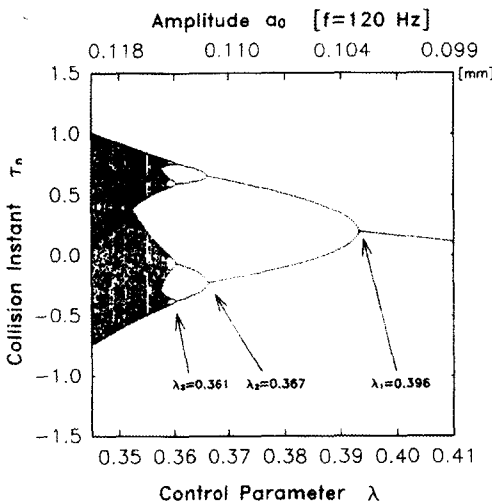
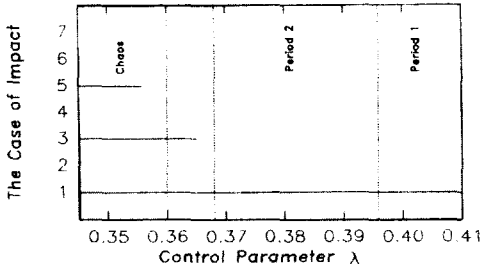


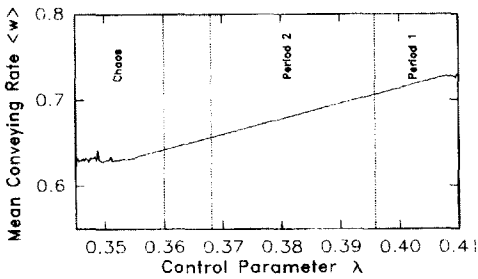
Fig. 3 Bifurcation diagram for the standard bowl feeder

Table 2 Period doubling bifurcation values and Feigenbaum delta

$i$	$\lambda_i$	$\lambda_i - \lambda_{i-1}$	$\delta_i$
1	0.396135		
2	0.367767	-0.028368	
3	0.361683	-0.006084	4.662897
4	0.360379	-0.001305	4.662909
5	0.360099	-0.000280	4.662903
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\infty$	0.360...	0.000000	4.66290...



(a) The Case of Impact



(b) The Mean Conveying Rate

Fig. 4 The Case of frictional impact and the mean conveying rate

의 크기는 주기 구간이 혼돈 구간에서보다 다소 높게 나타나고 있다. 진동각  $\psi$ 가 커질 수록 이송률은 줄어드는 경향이 있고,  $\mu$ 에 따른 이송률 크기 변화는 별로 없다. 그러나, Fig. 6(a)에서 볼 수 있는 것처럼,  $\mu$ 와  $\psi$ 가 작아질 수록 제어변수에 따른 이송률의 변화가 불규칙해지는 경향을 보여준다. 또한, Fig. 6(b)에서처럼, 경사각  $\alpha$ 가 작아질 수록 이송률이 다소 증가하며, 혼돈 구간에서의 이송률은 더욱 안정되지는 경향이 있으며 주기 구간과의 이송률 차이도 줄어든다.

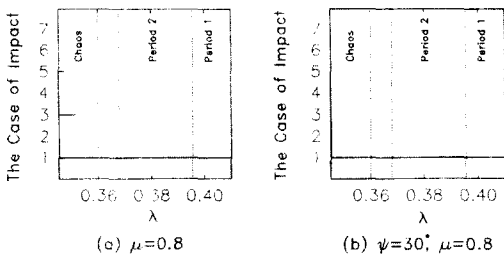


Fig. 5 Effect of variation of physical parameters : Impact case

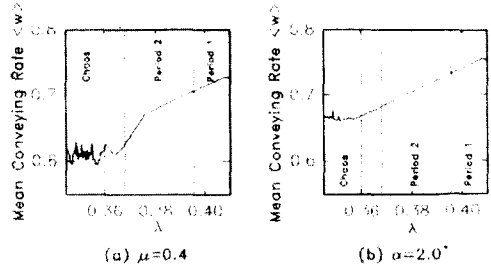
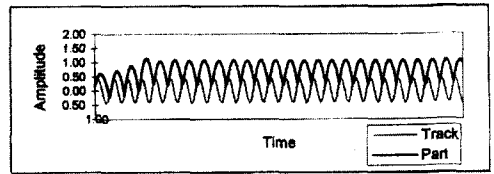
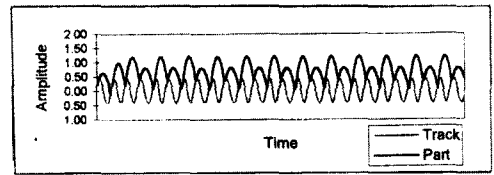


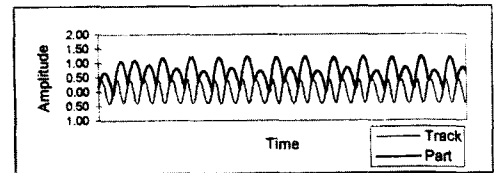
Fig. 6 Effect of variation of physical parameters : Mean conveying rate



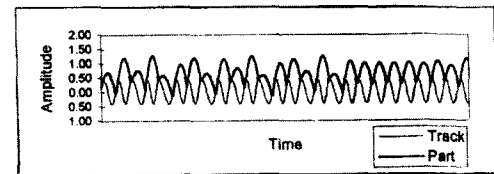
(a) Period 1 regime :  $\lambda = 0.4$



(b) Period 2 regime :  $\lambda = 0.37$



(c) Period 4 regime :  $\lambda = 0.3615$



(d) Chaotic regime :  $\lambda = 0.345$

Fig. 7 Orbits of the bouncing part

Fig. 7은 트랙 위에서 반복 충돌하는 부품의 동적 운동 궤적을 주기 및 혼돈 구간에 대해 각각 보여주고 있다. 시뮬레이션 초기에 부품이 트랙 위에 가만히 놓여있는 것을 가정하여 모든 시뮬레이션을 수행하였다.



트랙과 미끄럼 접촉을 가지며 얽혀져 있던 부품은 식 (9)에 의해 구해지는 해제 순간을 경험하며, 반복 충격을 하기 시작한다. 이 때, 제어 변수의 값에 따라 여러 형태의 주기 및 혼돈 운동을 하게 된다.

## 5. 토의 및 결론

본 논문에서는, 진동하는 보울피더 트랙 위에 놓여 있는 부품의 주기 및 혼돈 동적 거동에 대한 모델링과 컴퓨터에 의한 수치해석 결과를 제시하였다. 생산 현장의 자동화가 추진되면서, 부품 피더의 중요성은 아무리 강조해도 지나침이 없을 것이다. 그러나, 보울피더의 설계자나 사용 현장에서의 가장 큰 애로사항은 부품의 이송동작이 원활하지 못하고 균일하지 않다는 것이다. 이러한 현상에 대한 이유는, 보울에 진동을 전달하는 판 스프링의 탄성계수가 변화와 더불어, 보울에 담겨져 있는 부품의 용량 즉, 부하의 변동이다. 외부 변수의 변화에 둔감한 보울피더의 설계가 시급하고도 주요한 과제가 되고 있다.<sup>[14]</sup> H-영역에서 부품의 이송률에 특별히 주목하여, 주기 거동(periodic motion) 및 혼돈 거동에 대해 해석한 결과는 진동보울피더의 새로운 설계 방향을 제시할 수 있을 것이다. 현재, 본 논문에서 제시한 결과를 토대로 진동 보울피더에 관한 실험이 완료되었고, 시뮬레이션 결과와 좋은 일치를 보여주고 있다. 결정론적 (deterministic) 동적 시스템에서 혼돈 영역의 존재는 시스템 응답의 불확실성을 의미하게 되므로 대부분 바람직하지 않은 현상이다. 따라서, 이러한 혼돈 영역을 피하여 시스템을 설계하거나 사용하려는 노력이 경주되어 왔다. 그러나, 최근에 들어서는 이러한 혼돈 현상을 기피하지 않고 적극적으로 이용하려는 움직임이 활발히 일어나고 있다.<sup>[15-17]</sup>

본 연구 결과는 마찰력이 개재된 반복 충돌을 가지는 동적 기계시스템을 해석 및 설계하는 데 기여할 수 있을 것으로 여겨진다. 본 연구 결과에 본 논문 저자에게 이미 발표된 강체 충돌 예측 및 포착 이론<sup>[18]</sup>을 적용하면, 진동하는 트랙 위에서 반복 충돌을 하는 부품을 입자가 아닌 일반적인 다양한 형상의 강체로 확장하는 것이 가능하게 된다. 그러면, 광범위한 기계기구나 공압 해머, 펀치 프레스 등의 기계공구들의 동적 거동 해석이나 이들에게서 발생하는 충격 소음 문제를 해석하는 데 유용할 것이다.

## 후 기

이 논문은 1994년도 한국학술진흥재단의 광도파세 연구비에 의하여 연구되었음.

## 참고문헌

1. 심수섭, "자동조립기술," 도서출판 기술, pp. 227 ~ 270, 1991.
2. Hongler, M.-O., Figour, J., "Periodic versus Chaotic Dynamics in Vibratory Feeders," *Helvetica Physica Acta*, Vol. 62, pp. 68~81, 1989.
3. Boothroyd, G., "Assembly Automation and Product Design," Marcel Dekker, Inc., pp. 31~48, 1992.
4. Peitgen, H.-O., Jürgens, H., Saupe, D., "Fractals for the Classroom Part Two: Complex Systems and Mandelbrot Set," Springer-Verlag, pp. 117~267, 1992.
5. Holmes, P.J., "The Dynamics of Repeated Impacts with a Sinusoidally Vibrating Table," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 84, No. 2, pp. 173~189, 1982.
6. Bapat, C.N., Sankar, S., "Repeated Impacts on a Sinusoidally Vibrating Table Reappraised," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 108, No. 1, pp. 99~115, 1986.
7. Everson, R.M., "Chaotic Dynamics of a Bouncing Ball," *Physica 19D*, pp. 355~383, 1986.
8. Tufillaro, N.B., Albano, A.M., "Chaotic Dynamics of a Bouncing Ball," *Am. J. Phys.*, Vol. 54, No. 10, pp. 939~944, 1986.
9. Tufillaro, N.B., Abbott, T., Reilly, J., "An Experimental Approach to Nonlinear Dynamics and Chaos," Addison-Wesley Pub. Co., pp. 1~109, 1992.
10. Hongler, M.-O., Cartier, P., Flury, P., "Numerical Study of a Model of Vibro-

- Transporter." *Physics Letters A*, Vol. 135, No. 2, pp. 106~112, 1989.
11. Hongler, M.-O., "Chaotic and Stochastic Behaviour in Automatic Production Lines." Springer-Verlag, pp. 5~26, 1994.
  12. Brach, R.M., "Tangential Restitution in Collisions." *Proc. of ASME Winter Annual Meeting*, AMD-Vol. 103, pp. 1~7, 1989.
  13. Han, I. and Gilmore, B.J., "Multi-Body Impact Motion with Friction -Analysis, Simulation and Experimental Validation." Designated as Best Technical Paper 1990 ASME Design Automation Conference, and ASME Journal of Mechanical Design, Vol. 115, pp. 412~422, 1993.
  14. 상공부, "Part's Feeder." 1990 상공부공업기술 수요조사보고서, 1990.
  15. Bühler, M., Koditschek, D.E., "From Stable to Chaotic Juggling: Theory, Simulation, and Experiments." *Proc. of 1990 IEEE Robotics and Automation Conf.*, pp. 1976~1981, 1990.
  16. Vakakis, A.F., Burdick, R., "Chaotic Motion in the Dynamics of a Hopping Robot." *Proc. of 1990 IEEE Robotics and Automation Conf.*, pp. 1464~1469, 1990.
  17. M'Closkey, R.T., Burdick, J.W., "Periodic Motions of a Hopping Robot with Vertical and Forward Motion." *International Journal of Robotics Research*, Vol. 12, No. 3, pp. 197~218, 1993.
  18. Han, I., Gilmore, B.J., Ogot, M.M., "The Incorporation of Arc Boundaries and Stick/Slip Friction in a Rule-Based Simulation Algorithm for Dynamic Mechanical Systems with Changing Topologies." *ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. 115, pp. 423~434, 1993.