

자유파수를 이용한 새로운 실린더 운동방정식과 Junger and Feit의 실린더 운동방정식의 비교연구

A Study of Comparison with Free Wave Number Between a New Cylindrical Wave Equation and the Wave Equation by Junger and Feit

조 형 국*
(Heung-Kuk Jo*)

요 약

실린더 운동방정식은 실린더 내에서 발생하는 소음 해석에 매우 중요하다. 그러므로, 지금까지 많은 학자들에 의해 실린더 운동방정식을 유도되었다[1].

참고문헌[6]에서는, 새로 제안된 실린더 운동방정식, Junger and Feit의 실린더 운동방정식 그리고 가정해에 의한 선형 방정식으로, 실린더가 자유 운동을 할 때, 자유파수를 구하였다.

본 논문에서는 자유파수들의 분산곡선들을 이용하여, 두 실린더 운동방정식을 비교하였고, 링주파수와 링확장주파수의 계산으로, 자유파수들의 분산곡선의 물리적인 의미를 부가하였다. 이 결과, 새로 유도된 실린더 운동방정식의 타당함을 보였다. 새로 제안된 실린더 운동 방정식을 이용하면, 산업현장에서, 실린더 내의 고체파에 대한 보다 정확한 분석을 할 수 있을 것으로 사료된다.

ABSTRACT

The Cylindrical Shell Equation is one of the fundamental tools in the study of the noise analysis in the cylindrical shell. Therefore, lot of the acousticians induced many cylindrical shell motion equations.[1]

In the Reference[6], we introduced the newly induced cylindrical Shell Equation and Junger and Feit's shell equation[5], and computed the free wave number with the linear Equation with the supposed solution, in the case of the free motion of the shell.

In this paper, we compared above cylindrical shell equations by using dispersion curve of free wave number and we describe the physical mean for the dispersion curve with ring-frequency and ring-extension-frequency. With this result, we proves the useful of a newly induced cylindrical shell equation and we can analyse the Structure-Borne Sound of the shell with this equation in the application.

I. 새로운 실린더 운동방정식과 선형방정식

실린더에서 발생하는 소음은, 실린더 벽면에 가하는 자극에 따라, 여러가지 형태로 나타난다. 유류를 송출하는 관에서는, 송출관의 내부에서 기름의 와류에 의한 소음 그리고 발전소에서는 증기의 송출 통로에서 발생하는 소음등이 있다. 이러한 소음의 분석은 우선 실린더를 자유 운동시킬때 나타나는 현상에 의해 해석된다. 이를 위해 실린더 운동방정식과 선형방정식을, 참고문헌[6]에서 인용하였다. 그림 1에 실린더 운동방정식을 위한 가정으로

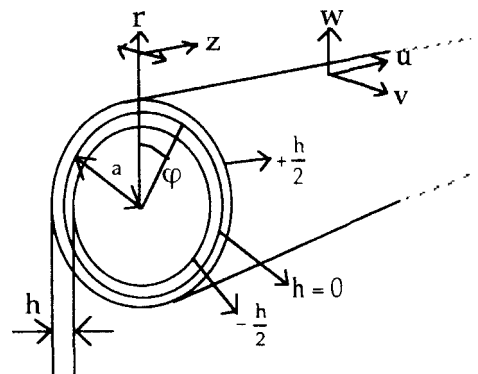


Fig 1. System of coordinates for cylindrical shell(tube).

*동서대학교 전자기계 공학부 전자공학전공 조교수
접수일자: 1996년 7월 24일

실린더의 두께가 얇고, 무한히 긴 실린더를 도시하였다.

그림 1에서 r, φ 그리고 z는 실린더 좌표이며, u, v 그리고 w는 실린더 좌표 방향의 변위이다. 실린더 두께에서 두께 중간을 h=0라 하고, 양끝이 +h/2 그리고 -h/2이다. 식(1), (2) 그리고 (3)이 새로이 유도된 실린더 운동 방정식이며 식(4), (5), (6) 그리고 (7)은 가정해로서 실린더 표면에 수직으로 점자극을 가할때의 가정해이다.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{1+\beta^2}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \left(\frac{1+\mu}{2} - \beta^2 \frac{1-\mu}{2} \right) \frac{1}{a} \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial \varphi} + \frac{\mu}{a} \frac{\partial w}{\partial z} + (1-\mu) \frac{\beta^2}{a} \frac{\partial^3 w}{\partial z \partial \varphi^2} - \frac{1}{C_L^2} \ddot{u} = 0 \quad (1)$$

$$\left(\frac{1+\mu}{2} - \beta^2 \frac{1-\mu}{2} \right) \frac{1}{a} \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \varphi} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{1-\mu}{2} (1+\beta^2) \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} - (1-\mu) \beta^2 \frac{\partial^3 w}{\partial z^2 \partial \varphi} - \frac{1}{C_L^2} \left[(1+\beta^2) \ddot{v} - \beta^2 \frac{\partial \ddot{w}}{\partial \varphi} \right] = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\mu}{a} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{(1-\mu)}{a} \beta^2 \frac{\partial^3 u}{\partial z \partial \varphi^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - (1-\mu) \beta^2 \frac{\partial^3 v}{\partial z^2 \partial \varphi} + \frac{1+\beta^2}{a^2} w + \frac{\beta^2}{a^2} \left[\frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} + 2a^2 \frac{\partial^4 w}{\partial z^2 \partial \varphi^2} + a^4 \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} \right] + 2\beta^2 \left[\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] + \frac{1}{C_L^2} \left[\ddot{w} - \beta^2 \frac{\partial^2 \ddot{w}}{\partial \varphi^2} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^2 \ddot{w}}{\partial z^2} + \beta^2 \frac{\partial \ddot{v}}{\partial \varphi} \right] = \frac{(1-\mu^2)}{Eh} P_a \quad (3)$$

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(k_z) \cos n\varphi e^{-jk_z z} \quad (4)$$

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} V_n(k_z) \sin n\varphi e^{-jk_z z} \quad (5)$$

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} W_n(k_z) \cos n\varphi e^{-jk_z z} \quad (6)$$

$$p = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(k_z) \cos n\varphi e^{-jk_z z} \quad (7)$$

식(8), (9) 그리고 (9)인 가정해를 실린더 운동 방정식 (1), (2) 그리고 (3)에 대입하고, Cramer법칙을 이용하면, 각 방향의 진폭이 포함된 선형 방정식(8), (9) 그리고 (10)이 유도된다.

$$\left\{ -k_z^2 a^2 - \frac{1-\mu}{2} n^2 (1+\beta^2) + v^2 \right\} U_n + j \left\{ - \left(\frac{1+\mu}{2} - \beta^2 \frac{1-\mu}{2} \right) n k_z a \right\} V_n + j \{ -\mu k_z a + (1-\mu) \beta^2 n^2 k_z a \} W_n = 0 \quad (8)$$

$$j \left\{ \left(\frac{1+\mu}{2} - \beta^2 \frac{1-\mu}{2} \right) k_z a \right\} U_n + \left\{ -n^2 - \frac{1-\mu}{2} (1+\beta^2) + k_z^2 a^2 + (1+\beta^2) v^2 \right\} V_n + \{ -n - (1-\mu) \beta^2 n k_z^2 a^2 + \beta^2 n v^2 \} W_n = 0 \quad (9)$$

$$j \{ -\mu k_z a + (1-\mu) \beta^2 n^2 k_z a \} U_n + \{ n + (1-\mu) \beta^2 n k_z^2 a^2 - \beta^2 n v^2 \} V_n + \{ (1+\beta^2) + \beta^2 (n^4 + 2n^2 k_z^2 a^2 + k_z^4 a^4) - 2\beta^2 n^2 - 2\beta^2 \mu k_z^2 a^2 + (-1 - n^2 \beta^2) v^2 - \beta^2 v^2 k_z^2 a^2 \} W_n = \frac{(1-\mu^2) a^2}{Eh} P_{an} \quad (10)$$

II. Junger and Feit의 실린더 운동방정식과 선형방정식

Junger and Feit(참고문헌[2])의 실린더 운동방정식을 식(11), (12) 그리고 (13)에 보이고, 식(4), (5), (6) 그리고 (7)로 계산된 선형방정식은 식(11), (12) 그리고 (13)에 보이고 있다[5], [6].

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1-\mu}{2a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1+\mu}{2a} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi \partial z} + \frac{\mu}{a} \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{C_L^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (11)$$

$$\frac{1+\mu}{2a} \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \varphi} + \frac{1-\mu}{2} (1+\beta^2) \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \beta^2 \left(\frac{\partial^3 w}{\partial z^2 \partial \varphi} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^3 w}{\partial \varphi^3} \right) - \frac{1}{C_L^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (12)$$

$$-\frac{\mu}{a} \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \beta^2 \left(\frac{\partial^3 v}{\partial z^2 \partial \varphi} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^3 v}{\partial \varphi^3} \right) - \frac{w}{a^2} - \beta^2 \left[a^2 \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial z^2 \partial \varphi^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} \right] - \frac{1}{C_L^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\frac{(1-\mu^2)}{Eh} P_a \quad (13)$$

식(1), (2) 그리고 (3), 식(11), (12) 그리고 (13)에서 첨자의 의미는 다음과 같다.

- ω : 각 속도
- μ : Poisson's ratio
- a : 실린더 반경 [m]
- h : 실린더 관벽의 두께 [m]
- ρ_w : 실린더 재료의 밀도 [kg/m³]
- c_t : 횡파의 속도 [m/s]
- E : Young's Modulus [N/m²]
- j : 허수 단위
- $\beta^2 = h^2/12a^2$

선형방정식의 유노를 위해 가정해는 식(4), (5), (6) 그리고 식(7)을 식(11), (12), 그리고 (13)에 대입하면, 선형 방정식 식(14), (15) 그리고 (16)을 구할 수 있다.

$$\left\{ k_z^2 a^2 + \frac{1-\mu}{2} n^2 - v^2 \right\} U_n + j \left\{ \frac{1+\mu}{2} n k_z a \right\} V_n + j \{ \mu k_z a \} W_n = 0 \tag{14}$$

$$-j \left\{ \frac{1+\mu}{2} n k_z a \right\} U_n + \left\{ \frac{1-\mu}{2} (1+\beta^2) k_z^2 a^2 + (1+\beta^2) n^2 - v^2 \right\} V_n + (n + \beta^2 (n k_z^2 a^2 + n^3)) W_n = 0 \tag{15}$$

$$-j \{ \mu k_z a \} U_n + \{ n + \beta^2 (n k_z^2 a^2 + n^3) \} V_n + \{ 1 - v^2 + (n_2 + k_z^2 a^2)^2 \beta^2 \} W_n = \frac{(1-\mu^2)}{Eh} a^2 P_{un} \tag{16}$$

새로운 실린더 운동방정식으로 유도된 선형방정식과 Junger and Feit의 실린더 운동방정식으로 유도된 선형 방정식은 단지 β^2 을 포함하는 항이 차이가 있다. 만약 $h \ll a$ 이면 β^2 항이 "0"으로 되어 두 식은 같게 된다.

III. 자유파수

자유파수를 구하기 위해 $P_{un} = 0$ 으로 하고 선형방정식을 Cramer 법칙을 이용하여 k_z 에 대해 풀면, 자유파수의 분산 곡선인, 그림 2, 3 그리고 4를 구할 수 있다. 그림 2은 $n = 0, h/a = 0.1$ 일때의 자유파수의 분산곡선이며, 그림에서 ①, ② 그리고 ③은 Junger and Feit의 식으로 계산한 결과이며, ①', ②' 그리고 ③'은 새로운 실린더 운동방정식에 의한 계산 결과이다. ①과 ①'의 곡선에서 ①'이 $v > 1$ 에서 빨리 상승함을 보이고 있다. 이것은 실린더의 두께 내부의 임의 점(반지름 방향)에서 Z방향의 움직임을 고려하였기 때문이다[3]. 그림 3은 $n = 1, h/a = 0.1$ 일때 파수이다. $n = 1$ 의 모드는 실린더의 ϕ 방향으로 두께의 정점을 갖는 모드이며, 막대 운동과 같은 형태로 운동한다. ①'의 파수가 $v > 0.8$ 에서 ① 보다 빨리 상승함을 알 수 있다. 그림 4는 $n = 2, h/a = 0.1$ 에서 자유파수를 도시하였다. ①'

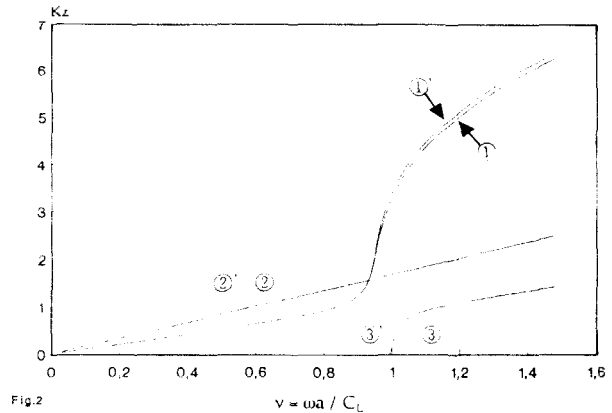


Fig 2. Dispersion curve for Wave number by $n=0$ and $h/a=1$ newly reduced cylindrical shell equation : ①', ②', ③' Junger and Feit cylindrical shell equation : ①, ②, ③

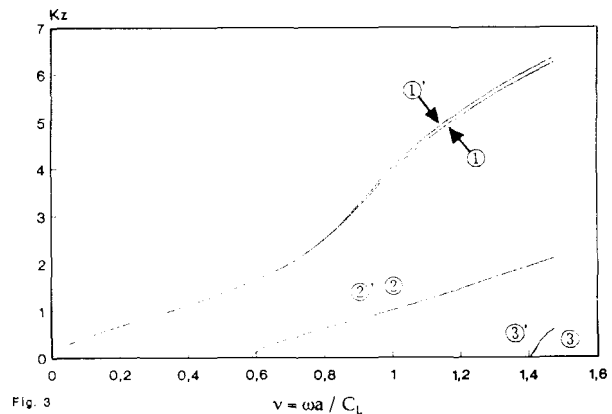


Fig 3. Dispersion curve for Wave number by $n=1$ and $h/a=1$ newly reduced cylindrical shell equation : ①', ②', ③' Junger and Feit cylindrical shell equation : ①, ②, ③

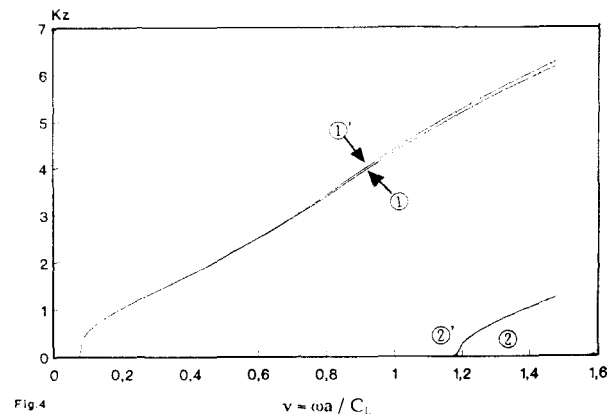


Fig 4. Dispersion curve for Wave number by $n=2$ and $h/a=1$ newly reduced cylindrical shell equation : ①', ②', ③' Junger and Feit cylindrical shell equation : ①, ②, ③

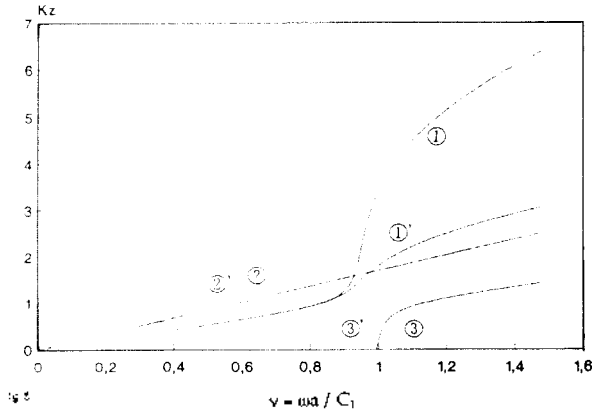


Fig 5. Dispersion curve for Wave number by newly reduced cylindrical shell equation $h/a = 0.1$: ①, ②, ③, $h/a = 0.5$: ①', ②', ③'

의 파수가 $v > 0.6$ 에서 ① 보다 빨리 상승함을 알 수 있다. 그림 5는, $n=0$ 에서 ①, ② 그리고 ③의 곡선은 $h/a = 0.1$ 에서 자유파수이며, ①', ②' 그리고 ③'의 곡선은 $h/a = 0.5$ 에서 계산된 결과이다. 실린더 두께가 클수록 자유파수는 현저히 작아 짐을 알 수 있다. 이것은 실린더의 두께에 의한 진동의 파장이 클때(낮은 주파수에서) z방향으로 자유파가 움직임을 나타낸다.

IV. 링 주파수와 링 확장주파수

식(8), (9) 그리고 (10)에서 r, ϕ 방향의 변위의 진폭을 각각 W_n 그리고 V_n 이다. 이 변위들이, 임의의 주파수에서, z방향으로 움직이지 않고, 단지 r방향과 ϕ 방향으로만 진동을 한다면, 이 때 r방향으로 진동할 때의 주파수를 링 주파수라고 하며, ϕ 방향으로만 진동할 때의 주파수를 링 확장주파수라고 한다. 이것을 그림 6에 도시하였다.

그림 6의 (a)는 r방향으로 움직이는 변위 W_n 의 공진상태를 나타내었으며, (b)는 ϕ 방향으로 움직이는 변위 V_n 의 공진상태를 도시하였다. 이 공진상태에서 주파수의 계산

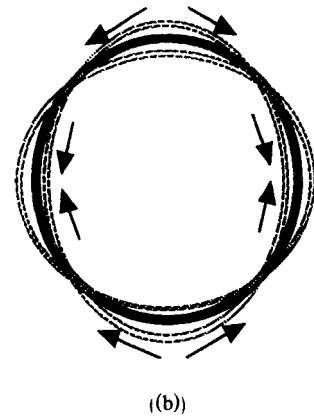
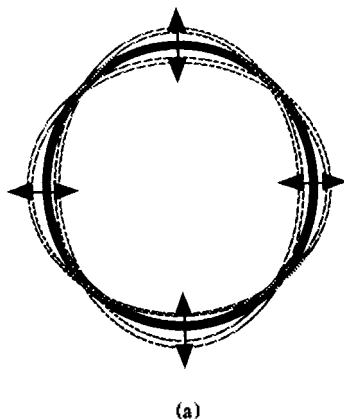


Fig 6. The motion of cylindrical Shell at Ring-frequency and Ring-extension-frequency by mode $n = 1$
(a) Resonance of ring motion
(b) Resonance of the ring extension motion

을 위한 가정은 $k_z = 0$ 이다. 여기서 k_z 는 z방향으로 향하는 파수이다. 이 가정과 식(14), (15) 그리고 (16)로 유도된 식을 식(17)에 보인다.

$$\begin{aligned} & \left\{ -(1 + \beta^2)v^2 + n^2 \right\} \left\{ -v^2 + \frac{1-\mu}{2} n^2(1 + \beta^2) \right\} \left\{ \beta^2 n^4 + (1 + \beta^2) \right. \\ & \left. - 2\beta^2 n^2 - (1 + n^2 \beta^2 v^2) \right\} - \left\{ -\beta^2 n v^2 + n \right\}^2 \\ & \left\{ -v^2 + \frac{1-\mu}{2} n^2(1 + \beta^2) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

식(17)을 v에 대해 계산하면, 각 모드($n=0, 1, 2, \dots$)에 대해, $(v^2)^2$ 의 해가 구해지며, 이 해들은 링주파수와 링 확장주파수 그리고 링 굽힘 주파수를 의미한다. 링 굽힘 주파수는 실린더가 z방향으로 변위가 있을때를 의미한다. 계산 결과를 표 1에 보인다.

Table 1. Ring-frequency and ring-extension-frequency by mode $n = 0, 1, 2$

mode	종 류	$v = \frac{\omega}{C_L} a$	frequency
n = 0	ring-frequency	0.0	0.0[Hz]
	ring-extension-frequency	0.0	0.0[Hz]
n = 1	ring-frequency	0.0	0.0[Hz]
	ring-extension-frequency	0.59	470[Hz]
n = 2	ring-frequency	0.07	68[Hz]
	ring-extension-frequency	1.18	941[Hz]

(위의 계산은 $C_L = 5000\text{m/s}$, $a = 1\text{m}$, $h = 0.1\text{m}$ 일 때이다.)

표 1에서 보인 결과와 그림 2, 3 그리고 4에서 영점 위치가 일치함을 보인다. 그림 2은 $n=0$ 모드에서 자유파수의 분산곡선이다. 그림 2에서 ①의 파수가 0[Hz]에서 시작하고, ③의 자유파수가 $v = 1$ ($f = 684\text{Hz}$)에서 시작함을 알 수

있다. 그러므로 ①의 곡선은 r방향의 변위(W_n , 이때 $n=0$ 이다.)가 z방향으로 향하는 자유파수이다. ②는 ϕ 방향의 자유파수이며, ③은 변위 U_n 가 z방향으로 향하는 자유파수이다. 그림 3에서 ①의 곡선이 0[Hz]에서 시작하고, ②의 곡선은 0.6($=470$ [Hz])에서 시작하고, ③의 곡선이 $v=1.4$ ($f=967$ [Hz])에서 시작한다. 그림 4에서 ①의 곡선은 $v=0.07$ ($f=68$ [Hz])에서 시작하며, ②곡선은 $v=1.18$ ($f=941$ [Hz])에서 시작한다[6].

V. 결 론

실린더 운동방정식은 실린더형태의 원통관에서 고체 파나 음향방사의 해석을 위해서는 매우 중요하다. 지금까지 많은 음향학자들이 여러형태의 실린더운동방정식을 유도하였다. 참고문헌[6]에서, 새로 유도된 실린더 운동 방정식과 Junger and Feit의 실린더 운동 방정식에 의해 자유파수의 분산곡선을 구하였다.

본 논문에서는, 두 실린더운동방정식들에 의한 자유파수의 분산곡선이 실린더의 벽 두께의 임의의 점에서 z방향으로 움직이는 진동을 고려한 식(새로이 유도된 실린더 운동 방정식)으로는 자유파수가 고려치 않은 식으로 유도된 자유파수 보다 $v>1$ 의 범위에서 빨리 상승함을 알 수 있었다. 이러한 것은 자유파수를 보이는 식 $k_z = \omega / C_L = 2\pi/\lambda$ 에서 z방향으로 향하는 파의 주파수가 커지고 z 방향으로 향하는 파의 파장은 짧아짐을 알 수 있었다. 또한 실린더의 두께가 두꺼울 수록 w의 변위를 갖는 자유파가 큰 파장으로 z방향으로 진행함을 알 수 있었다.

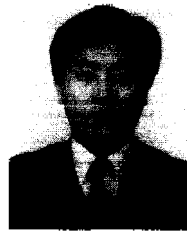
자유파수가 z방향으로 향하지 않는 것을 가정으로 하는, 링주파수와 링확장주파수를 계산하였고, 자유파수의 분산곡선에서 영점위치와 링주파수 그리고 링 확장주파수가 일치함을 보였다.

참 고 문 헌

1. A. N. Leissa, "Vibration of Shells," NASA, SP-288.
2. M. C. Junger and Feit D., "Sound, Structures, and Their Interaction," 2th edition, pp. 231-253.
3. M. Cremer M.Heckl and E. E. Ungar, "Structure-Borne Sound," Springer Verlag Berlin 1988.
4. G. Pavic, "The Influence of Curvature on Structure-Borne Acoustical Power Propagation in a Cylindrical Circular Shell," ICA, vol. 12, D6-6, TORONTO.
5. 조형국, 김정국, "z방향의 에너지 흐름을 위한 실린더 운동 방정식 유도," 한국음향학회 학술논문발표회 논문집, Vol. 12, No. 1(s), 1993.
6. 조형국, 이채봉, 김정국, "실린더에서 점자극에 의한 어더미턴스와 자유파수," 한국음향학회지, Vol. 14, No. 3, 1995.

▲조 형 국(Heung-Kuk Jo)

1955년 12월 2일생



1977년 2월: 동아대학교 전자공학과 졸업(학사)

1979년 2월: 동아대학교 대학원 전자공학과(석사)

1990년 2월: 독일 베르린공과대학 음향공학연구소(박사)

1985년~1990년: 독일 베르린공과대학 음향공학연구소 연구원

1990년~1993년: 삼성전자 기술총괄 선임연구원