
 論 文

大韓造船學會論文集
 第 33 卷 第 4 號 1996 年 11 月
 Transactions of the Society of
 Naval Architects of Korea
 Vol. 33, No. 4, November 1996

스펙트럴법을 적용한 2차원 비정상 점성유동해석

신영섭*

Application of Spectral Method to Two-Dimensional Unsteady Viscous Flow Analysis

by

Y.S. Shin*

요 약

비정상 점성유동 수치해석단계는 연속방정식을 만족시키는 공간해석단계와 시간전진단계로 구분할 수 있다. 본 연구에서는 공간해석단계의 압력 Poisson 방정식의 해를 구하는데 스펙트럴법을 이용하였다. 압력 Poisson 방정식의 최고차미분항을 Fourier 급수로 전개하면 압력 및 압력의 1차 미분항은 Fourier 급수의 적분으로 표현되므로 Gibb's 현상을 제거할 수 있어, 비주기성인 경우에도 스펙트럴법을 적용할 수 있다. 수치해법의 검증을 위하여 2차원 원형주상체 및 날개주위 비정상 점성유동을 수치해석하였고, 그 결과를 비교하여 보았다.

Abstract

The numerical step in the unsteady viscous flow analysis can be divided in the space analysis step satisfying continuity equation and the time marching step. In this study the spectral method is applied to solve the pressure Poisson equation in the space analysis step. If the highest order differential term of the pressure Poisson equation is transformed by Fourier series, pressure and its first derivatives can be expressed by the integral form of Fourier series. So Gibb's phenomena can be eliminated and the spectral method can be applied to non-periodic problems. The numerical analysis of unsteady viscous flow around 2-dimensional circular cylinder and wing is carried out and compared for verification.

발 표 : 1995년도 대한조선학회 추계연구발표회('95. 11. 9.)

접수일자 : 1996년 2월 3일, 재접수일자 : 1996년 8월 17일

*정회원, 한라공업전문대학 조선과

1. 서론

비정상 점성유동 해석단계는 크게 2단계로 나누면 공간해석단계와 시간전진단계로 구분할 수 있다. 공간해석단계에서는 연속방정식을 만족시키는 유동장을 구하는 단계로서 압력 poisson 방정식의 해를 구하는 단계이고, 시간전진단계는 이를 이용하여 다음 시간단계의 유동장을 구하는 단계이다. 비정상 점성유동해석시 대부분의 계산시간은 공간해석단계의 압력 poisson 방정식의 해를 구하는데 소요되는 데, 이의 해석방법으로서는 유한차분법(finite difference method)과 같은 국부적방법(local method)이나 스펙트럴법과 같은 직접법(direct method)을 이용할 수 있다[12].

본 연구에서는 공간해석단계시 직접법의 하나인 스펙트럴법을 이용하여 압력 poisson 방정식의 해를 구하는 수치해석을 시도하였다. 스펙트럴법은 경계조건이 주기성을 가정할 수 있고 계산영역이 사각형영역인 경우에는, 압력 poisson 방정식이 변수분리가 되므로 영역분할수가 (n, n) 일 때 $O(n^2)$ 의 계산시간이 소요되는 매우 효과적인 방법으로 알려져 있다[4],[8]. 그러나 일반적인 물체형상 및 주기성이 아닌 일반경계조건이 주어지는 경우에는 적용이 어려워, 원형주상체주위 유동을 제외하고는 일반적 문제로의 적용에 아직 없는 실정이다.

본 연구에서는 일반적 문제에 대한 스펙트럴법의 적용 가능성을 검토하기 위하여 2차원 원형주상체 주위 및 날개주위의 비정상점성유동을 수치해석하였다. 공간해석단계에서 압력 poisson 방정식을 일반좌표계로 표현하면, 편미분방정식의 계수가 함수로 표현되어 압력을 Fourier 급수로 표현하면 압력과 계수간의 상관관계(mode coupling)가 있음을 알 수 있다. 한편 비주기성 경계조건인 경우에는 압력을 Fourier 급수로 표현하면, 압력의 미분시 양단경계면에서 Gibb's 현상이 발생하게 되어 압력 poisson 방정식의 해로서 타당성을 잃게 된다[1]. 해석방법은 압력 poisson 방정식에 나

타나는 압력의 최고차미분항 즉 2차미분항을 Fourier 급수로 표현하는 방법이며, 이 경우에는 압력이 적분형태로 나타나게 되므로 Gibb's 현상을 제거할 수 있다. 계수와 압력간의 상관관계해석은 계수의 대표값을 이용하였다. 즉 계수의 평균값(0th mode)으로 압력 poisson 방정식을 표현한 후 그 이상의 모드는 우변의 강제항으로 처리하여, 축차법(iteration method)으로 해를 구하는 방법을 이용하였다. 수치해석결과 2차원 원형주상체주위 유동문제는 원형좌표계 $(r, \theta \text{ coordina} - te)$ 에서도 물체형상의 대칭성으로 인하여 압력 poisson 방정식이 변수분리가 되므로, 해를 구할 때 축차법이 필요하지 않아 $O(n^2)$ 의 계산시간으로 수치해석할 수 있음을 알 수 있었다. 그러나 날개주위 유동해석시에는 원형주상체와 달리 물체형상의 대칭성이 상실되어 변수분리가 안되므로, 이 경우에는 축차법을 이용해야 해를 구할 수 있음을 알 수 있었다. 이러한 방법을 이용하여 원형주상체 주위 및 날개주위의 유동장 및 항력을 수치해석하여 해석결과를 타결과와 비교하여 보았다. 비교 결과 비교적 일치하고 있음을 알 수 있었고, 이로부터 스펙트럴법이 일반적 문제로 적용 가능함을 확인할 수 있었다. 앞으로 3차원 및 자유표면파문제로의 확장 적용을 통하여 스펙트럴법의 계산방법에 대한 연구가 지속되어야 할 것으로 생각된다.

2. 기본 방정식

2차원 비정상, 비압축성 유동을 가정하면 무차원화된 연속방정식 및 지배방정식은 다음과 같다.

$$D \equiv \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \\ = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{R_n} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \\ = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{R_n} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (2.3)$$

여기서, u, v 는 특성속도 U_0 로, x, y 는 특성 길이 L 로, t 는 L/U_0 , p 는 ρU_0^2 으로 무차원 화되었고, R_n 은 $U_0 L/\nu$ 를 의미하며, ρ 와 ν 는 각각 유체의 밀도와 동점성계수를 의미한다.

F, G 를 다음과 같이 정의하고,

$$F \equiv \frac{1}{R_n} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial uv}{\partial y} \quad (2.4)$$

$$G \equiv \frac{1}{R_n} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v^2}{\partial y} \quad (2.5)$$

식(2.2), (2.3)을 시간에 대해 이산화하면 다음과 같다.

$$\frac{u^{n+1}}{\Delta t} = \frac{u^n}{\Delta t} + F^n - \frac{\partial p^n}{\partial x} \quad (2.6)$$

$$\frac{v^{n+1}}{\Delta t} = \frac{v^n}{\Delta t} + G^n - \frac{\partial p^n}{\partial y} \quad (2.7)$$

여기서, n 은 시간단계를 의미하며, D^{n+1} 을 0으로 하는 압력 Poisson 방정식은 식(2.6), (2.7)로부터 다음과 같이 표현된다.

$$\nabla^2 p^n = R^n \quad (2.8)$$

여기서, R^n 은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} R^n &\equiv \frac{D^n}{\Delta t} + F^n_x + G^n, \quad (2.9) \\ &= \frac{D^n}{\Delta t} + \frac{1}{R_n} \nabla^2 D^n \\ &\quad - \frac{\partial(u^n)^2}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial u^n v^n}{\partial x \partial y} - \frac{\partial(v^n)^2}{\partial y^2} \end{aligned}$$

물체적합좌표계(body fitted coordinate)로 변수 변환하면 연속방정식 및 지배방정식은 다음과 같이 표현된다[5].

$$\xi_x u_\xi + \eta_x u_\eta + \xi_y v_\xi + \eta_y v_\eta = 0 \quad (2.10)$$

$$u_t + Uu_\xi + Vv_\eta$$

$$= -(\xi_x p_\xi + \eta_x p_\eta) + \frac{1}{R_n} \nabla^2 u \quad (2.11)$$

$$v_t + Uv_\xi + Vv_\eta$$

$$= -(\xi_y p_\xi + \eta_y p_\eta) + \frac{1}{R_n} \nabla^2 v \quad (2.12)$$

여기서,

$$U = \xi_x u + \xi_y v \quad (2.13)$$

$$V = \eta_x u + \eta_y v$$

를 의미한다. 좌표변환식을 이용하면

$$\begin{aligned} \nabla^2 q &= \alpha q_{\xi\xi} + \gamma q_{\eta\eta} - 2\beta q_{\xi\eta} \\ &\quad + \delta_p q_\xi + \delta_q q_\eta \end{aligned} \quad (2.14)$$

로 표현되며,

$$\alpha = \xi_x^2 + \xi_y^2 \quad (2.15)$$

$$\beta = -\xi_x \eta_x - \xi_y \eta_y$$

$$\gamma = \eta_x^2 + \eta_y^2$$

$$\delta_p = \nabla^2 \xi$$

$$= \xi_x (-\alpha x_{\xi\xi} - \gamma x_{\eta\eta} + 2\beta x_{\xi\eta})$$

$$+ \xi_y (-\alpha y_{\xi\xi} - \gamma y_{\eta\eta} + 2\beta y_{\xi\eta})$$

$$\delta_q = \nabla^2 \eta$$

$$= \eta_x (-\alpha x_{\xi\xi} - \gamma x_{\eta\eta} + 2\beta x_{\xi\eta})$$

$$+ \eta_y (-\alpha y_{\xi\xi} - \gamma y_{\eta\eta} + 2\beta y_{\xi\eta})$$

와 같다. 식(2.14), (2.15)를 압력 poisson 방정식 (2.8)에 적용하면 다음과 같다. 편의상 시간단계표시인 위첨자 n 은 생략한다.

$$\begin{aligned} \alpha p_{\xi\xi} + \gamma p_{\eta\eta} - 2\beta p_{\xi\eta} + \delta_p p_\xi + \delta_q p_\eta \quad (2.16) \\ = \frac{D}{\Delta t} + \xi_x F_\xi + \eta_x F_\eta + \xi_y G_\xi + \eta_y G_\eta \end{aligned}$$

3. 수치해석법

3.1 주기성 스펙트럴법

일반좌표계에서 압력 poisson 방정식 (2.16)은 다음과 같으며 R 은 식(2.16)의 우변강제항을 의미한다.

$$\alpha(\xi, \eta)p_{\xi\xi} - 2\beta(\xi, \eta)p_{\xi\eta} + \gamma(\xi, \eta)p_{\eta\eta} + \delta_p(\xi, \eta)p_\xi + \delta_q(\xi, \eta)p_\eta = R(\xi, \eta) \quad (3.1)$$

원형주상체주위의 유동장해석시 O type의 좌표계를 사용하면 원주방향 ($\eta = constant$)의 해가 주기성이므로 압력을 Fourier 급수로 표현할 수 있다. 그러나 일반적인 경우에는 식 (3.1)에서와 같이 편미분방정식의 계수가 함수형태로 표현되므로 계수와의 상관관계가 나타나게 되어, 각 모드별로 압력에 관한 방정식을 얻을 수 없다. 상관관계를 제거(de-coupling)하기 위하여 $\eta = constant$ 보다는 $\xi = constant$ 방향으로 계수변화가 크다는 점을 고려하여 식(3.1)을 다음과 같이 표현한다.

$$\begin{aligned} &\alpha_o(\eta)p_{\xi\xi} - 2\beta_o(\eta)p_{\xi\eta} + \gamma_o(\eta)p_{\eta\eta} \\ &+ \delta_{\rho o}(\eta)p_\xi + \delta_{\rho o}(\eta)p_\eta \\ &= R(\xi, \eta) \quad (3.2) \\ &- [\alpha(\xi, \eta) - \alpha_o(\eta)]p_{\xi\xi} \\ &- [-2\beta(\xi, \eta) + 2\beta_o(\eta)]p_{\xi\eta} \\ &- [\gamma(\xi, \eta) - \gamma_o(\eta)]p_{\eta\eta} \\ &- [\delta_p(\xi, \eta) - \delta_{\rho o}(\eta)]p_\xi \\ &- [\delta_q(\xi, \eta) - \delta_{\rho o}(\eta)]p_\eta \end{aligned}$$

즉, $\eta = constant$ 에서 계수의 대표값을 이용하여 좌변을 구성하고, 나머지항을 우변의 강제항으로 처리하여 축차법을 이용하는 수치해석법을 의미한다. 압력 p 를

$$p(\xi, \eta) = p_k(\eta)\exp(ik\xi) \quad (3.3)$$

와 같이 Fourier 급수로 표현하고, 이것을 식 (3.2)에 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &[\alpha_o(\eta)(ik)^2 p_k(\eta) - 2\beta_o(ik) p_k'(\eta) \\ &+ \gamma_o(\eta) p_k''(\eta) + \delta_{\rho o}(\eta)(ik)p_k(\eta) \\ &+ \delta_{\rho o}(\eta) p_k'(\eta)]\exp(ik\xi) \\ &= \bar{R}(\xi, \eta) \quad (3.4) \end{aligned}$$

여기서, $\bar{R}(\xi, \eta) =$

$$\bar{R}(\xi, \eta) = R(\xi, \eta) \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} &- [\alpha(\xi, \eta) - \alpha_o(\eta)]p_{\xi\xi} \\ &- [-2\beta(\xi, \eta) + 2\beta_o(\eta)]p_{\xi\eta} \\ &- [\gamma(\xi, \eta) - \gamma_o(\eta)]p_{\eta\eta} \\ &- [\delta_p(\xi, \eta) - \delta_{\rho o}(\eta)]p_\xi \\ &- [\delta_q(\xi, \eta) - \delta_{\rho o}(\eta)]p_\eta \end{aligned}$$

를 의미한다. 식(3.5)의 $\bar{R}(\xi, \eta)$ 를 Fourier 급수로 표현한 후, 식(3.4)에 대입하면 다음과 같은 각 모드별 상미분방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} &\gamma_o(\eta) p_k''(\eta) + [-2\beta_o(ik) + \delta_{\rho o}(\eta)] p_k'(\eta) \\ &+ [\alpha_o(\eta)(ik)^2 + \delta_{\rho o}(\eta)(ik)] p_k(\eta) \\ &= \bar{R}_k(\eta) \quad (3.6) \end{aligned}$$

식(3.6)은 이산화하면 tridiagonal 행렬이 되므로, 여기에서는 [6]의 방법을 이용하여 수치해석하였다.

수치해석법을 정리하면 다음과 같다.

- i) 물체경계조건 및 무한원방경계조건을 이용하여 식(3.3)의 각모드별 $p_k(\eta)$ 의 양단 경계조건을 구한다.
- ii) tridiagonal 형태인 식(3.6)의 상미분방정식을 각 모드별로 수치해석한다.
- iii) 식(3.5)의 $\bar{R}(\xi, \eta)$ 를 계산한다.
- iv) ii), iii)의 과정을 반복하여 수렴해를 구한다.

이상의 수치해법 검증을 위하여 해석해를 알고 있는 원형주상체 및 타원주상체에 대하여 수치해석하여 해석해와 비교하였다. 먼저 원형주상체의 경우 원형좌표계 (r, θ coordinate)에서의 압력 poisson 방정식은 다음과 같다.

$$\nabla^2 p = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] p \quad (3.7)$$

식(3.7)에서와 같이 편미분방정식의 계수가 변경의 함수로 주어지므로, 압력을 θ 방향에 대하여 Fourier 급수로 표현하면 압력과 계수간의 상관관계가 없음을 알 수 있다.

즉, 축차법이 필요없음을 의미하므로 이 경우에는 분할수를 (n, n) 으로 하였을 때, 계산시간은 $O(n^2)$ 이 되는 경우에 속한다. 식(3.8)에서와 같이 물체경계($r_i=1$)에서는 Neumann 경계조건, 무한원방($r_o=5$)에서는 Dirichlet 경계조건이 주어진 경우 분할간격을 반경방향으로 등간격분할하여 수치해석하였다.

$$\begin{aligned} \nabla^2 p &= 1 & (3.8) \\ p_r &= -\frac{1}{4}(-2x, -2y) \cdot (x_r, y_r) & \text{on } r=r_i \\ p &= 0 & \text{on } r=r_o \end{aligned}$$

Table 1에는 분할수에 따른 수치해석결과를 나타내었다. $\epsilon_r = |(p_{num} - p_{anal})/p_{num}|$, $\epsilon = \max |p_{num} - p_{anal}|$ 를 의미하며, p_{anal} , p_{num} 은 각각 해석해와 수치해를 의미하며, $p_{anal} = -1/4(r_o^2 - r^2)$ 인 경우이다.

Table 1 Solution error with grid refinement in Neumann-Dirichlet boundary condition

mesh size	ϵ	ϵ_r
16 * 16	0.2285	0.4274
32 * 32	0.0584	0.2729
64 * 64	0.0147	0.1587
128 * 128	0.0037	0.0864

변수분리가 되지 않는 일반물체에 대한 수치해법 검증을 위하여 식(3.9)에서와 같이 장축/단축비가 4인($a/b=4$) 타원형주상체에 대하여 수치해석하였다. 3.1절에서와 같이 편미분방정식에 사용하는 계수의 대표값은 $\eta = constant$ 계수의 평균값을 사용하였다. 분할방법은 ξ 방향으로는 $\xi^{1.1}$ 비율로 타원의 양단을 조밀하게 분할하였고, η 방향으로는 등간격으로 하였다. 경계조건은 내부타원은 Neumann, 외부타원에는 Dirichlet 경계조건인 경우이며 해석해 $p_{anal} = \frac{1}{2} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} (\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1)$ 인 경우이다.

$+ \frac{y^2}{b^2} - 1)$ 인 경우이다.

$$\begin{aligned} \nabla^2 p &= 1 & (3.9) \\ p_\eta &= \frac{1}{2} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} (\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}) \cdot (x_\eta, y_\eta) \\ &\text{on } \frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1 \\ p &= \frac{1}{2} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} (\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1) \\ &\text{on } \frac{x^2}{8^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1 \end{aligned}$$

계수와 압력간의 모드상관관계를 축차법을 이용하여 처리하였는데, Table 2에는 축차횟수를 분할수 및 완화계수에 따라 나타내었다. 축차단계에서 $p^{(n+1)} = \omega p^{(n)} + (1-\omega) p^{(n+1)}$ 와 같이 완화계수를 도입하여 압력을 구하였고, Table 2에 나타난 축차횟수는 $\epsilon_f = 0.02$ 일 때의 값을 의미한다. 여기서 $\epsilon_f = \max |\nabla^2 p - R|$, 위점자(n)은 축차횟수를 의미한다. Table 2에서와 같이 완화계수에 따라 축차횟수가 변화하고 있음을 알 수 있는데, 축차횟수가 나타나지 않은 항은 수렴해를 구하지 못하고 발산한 경우이다. Table 2에서와 같이 완화계수를 작게 할수록 축차횟수는 감소하는 경향을 가지고 있으나 발산하는 경우가 많음을 알 수 있다. 여기서 완화계수가 작다는 것은 축차단계에서의 계산결과를 대부분 반영한다는 것을 의미하는데, 빠른 수렴도를 줄 수 있으나 동요하면서 수렴하게 되므로(over relaxation) 완화계수가 큰 값에 비해 발산하는 경우가 발생할 수 있음을 의미한다.

Table 2 Iteration number with grid refinement and relaxation factor variation

	ω	0.1	0.3	0.5	0.7	ϵ	ϵ_r
mesh size							
16 * 16		6	6	8	12	0.1568	0.0140
32 * 32			8	10	17	0.0377	0.0034
64 * 64			14	12	19	0.0124	0.0043
128 * 128				12	20	0.0053	0.0017

3.2 비주기성 스펙트럴법

3.1절에서의 스펙트럴법은 해를 주기성으로 가정하여 식을 전개하였으나, 해의 주기성 가정을 할 수 없는 일반적인 경우에는 해를 Fourier 급수로 표현한 뒤 미분을 하면 양단에서 Gibb's 현상이 나타나게 되어 타당한 미분값을 구할 수 없다. 이러한 경우에는 최고차 미분항의 주기성을 이용하여 최고차 미분항을 Fourier 급수로 표현하면, 그 외의 항은 미분이 아닌 적분에 의하여 구할 수 있으므로 Gibb's 현상을 제거할 수 있다. 3.1절에서와 같이 계수의 대표값을 이용하면 일반좌표계에서의 압력 poisson 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \alpha_o(\eta)p_{\xi\xi} - 2\beta_o(\eta)p_{\xi\eta} + \gamma_o(\eta)p_{\eta\eta} \\ & + \delta_{\rho_o}(\eta)p_{\xi\xi} + \delta_{q_o}(\eta)p_{\eta\eta} \\ & = R(\xi, \eta) \\ & - [\alpha(\xi, \eta) - \alpha_o(\eta)]p_{\xi\xi} \\ & - [-2\beta(\xi, \eta) + 2\beta_o(\eta)]p_{\xi\eta} \\ & - [\gamma(\xi, \eta) - \gamma_o(\eta)]p_{\eta\eta} \\ & - [\delta_p(\xi, \eta) - \delta_{\rho_o}(\eta)]p_{\xi\xi} \\ & - [\delta_q(\xi, \eta) - \delta_{q_o}(\eta)]p_{\eta\eta} \end{aligned} \quad (3.10)$$

최고차 미분항 $p_{\xi\xi}$ 를 Fourier 급수로 표현하면 다음과 같다.

$$p_{\xi\xi}(\xi, \eta) = p_k(\eta)\exp(ik\xi) \quad (3.11)$$

또한, ξ 방향으로 적분한 p_{ξ} , p 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} p_{\xi}(\xi, \eta) &= \frac{p_k(\eta)}{ik} \exp(ik\xi) \\ &+ p_0(\eta)\xi + a(\eta) \\ p(\xi, \eta) &= \frac{p_k(\eta)}{(ik)^2} \exp(ik\xi) + \frac{1}{2} p_o(\eta)\xi^2 \\ &+ a(\eta)\xi + b(\eta) \end{aligned} \quad (3.13)$$

식(3.11), (3.12), (3.13)를 식(3.10)에 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \alpha_o(\eta)p_k(\eta)\exp(ik\xi) \\ & - 2\beta_o\left[\frac{p_k'(\eta)}{ik} \exp(ik\xi)\right. \\ & \left. + p_0'(\eta)\xi + a'(\eta)\right] \\ & + \gamma_o(\eta)\left[\frac{p_k''(\eta)}{(ik)^2} \exp(ik\xi)\right. \\ & \left. + \frac{1}{2} p_0''(\eta)\xi^2\right. \\ & \left. + a''(\eta)\xi + b''(\eta)\right] \\ & + \delta_{\rho_o}(\eta)\left[\frac{p_k(\eta)}{ik} \exp(ik\xi)\right. \\ & \left. + p_0(\eta)\xi + a(\eta)\right] \\ & + \delta_{q_o}(\eta)\left[\frac{p_k'(\eta)}{(ik)^2} \exp(ik\xi)\right. \\ & \left. + \frac{1}{2} p_0'(\eta)\xi^2\right. \\ & \left. + a'(\eta)\xi + b'(\eta)\right] \\ & = \bar{R}(\xi, \eta) \end{aligned} \quad (3.14)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \bar{R}(\xi, \eta) &= R(\xi, \eta) \\ & - [\alpha(\xi, \eta) - \alpha_o(\eta)]p_{\xi\xi} \\ & - [-2\beta(\xi, \eta) + 2\beta_o(\eta)]p_{\xi\eta} \\ & - [\gamma(\xi, \eta) - \gamma_o(\eta)]p_{\eta\eta} \\ & - [\delta_p(\xi, \eta) - \delta_{\rho_o}(\eta)]p_{\xi\xi} \\ & - [\delta_q(\xi, \eta) - \delta_{q_o}(\eta)]p_{\eta\eta} \end{aligned} \quad (3.15)$$

을 의미한다. 식(3.14)를 미분차수별로 정리하면 식(3.16)과 같다.

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\gamma_o(\eta)}{(ik)^2} p_k''(\eta)\right. \\ & \left. + \left[\frac{-2\beta_o(\eta)}{ik} + \frac{\delta_{q_o}(\eta)}{(ik)^2}\right] p_k'(\eta)\right. \\ & \left. + [\alpha_o(\eta) + \frac{\delta_{\rho_o}(\eta)}{ik}] p_k(\eta)\right] \exp(ik\xi) \\ & + \frac{\gamma(\eta)}{2} \xi^2 p_0''(\eta) \\ & + [-2\beta(\eta)\xi + \frac{\delta_{q_o}(\eta)}{2} \xi^2] p_0'(\eta) \\ & + \delta_{\rho_o}(\eta)\xi p_0(\eta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \gamma(\eta)\xi a''(\eta) \\
 & + [-2\beta_o(\eta) + \delta_{ao}(\eta)\xi]a'(\eta) \quad (3.16) \\
 & + \delta_{po}(\eta)a(\eta) + \gamma_o(\eta)b''(\eta) \\
 & + \delta_{ao}(\eta)b'(\eta) \\
 & = \overline{R}(\xi, \eta)
 \end{aligned}$$

식(3.16)을 각 모드별로 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 & \frac{\gamma_o(\eta)}{(ik)^2} p_k''(\eta) \\
 & + \left[\frac{-2\beta_o(\eta)}{ik} + \frac{\delta_{ao}(\eta)}{(ik)^2} \right] p_k'(\eta) \\
 & + \left[\alpha_o(\eta) + \frac{\delta_{po}(\eta)}{ik} \right] p_k(\eta) \\
 & = \overline{M}_k(\eta), \quad k=1, 2, \dots \quad (3.17)
 \end{aligned}$$

$$\gamma_o(\eta)b''(\eta) + \delta_{ao}(\eta)b'(\eta) = \overline{M}_o(\eta) \quad (3.18)$$

여기서,

$$\begin{aligned}
 & \overline{M}(\xi, \eta) \\
 & = \overline{R}(\xi, \eta) - \frac{\gamma(\eta)}{2} \xi^2 p_0''(\eta) \\
 & - \left[-2\beta(\eta)\xi + \frac{\delta_{ao}(\eta)}{2} \xi^2 \right] p_0'(\eta) \\
 & - [\delta_{po}(\eta)\xi + \alpha_o(\eta)]p_o(\eta) \quad (3.19) \\
 & - \gamma(\eta)\xi a''(\eta) \\
 & - [-2\beta_o(\eta) - \delta_{ao}(\eta)\xi]a'(\eta) \\
 & - \delta_{po}(\eta)a(\eta)
 \end{aligned}$$

이며, $\overline{M}_k(\eta)$ 는 $\overline{M}(\xi, \eta)$ 의 각 모드값을 의미한다.

수치해석과정을 정리하면 다음과 같다.

i) $\eta = a_y, b_y$ 에서 Dirichlet 경계조건이 주어진 경우 식(3.13)에 경계조건을 적용하면

$$\begin{aligned}
 & \frac{p_k(\eta)}{(ik)^2} \exp(ik\xi) + b(\eta) = p(\xi, \eta) \\
 & - \frac{1}{2} p_o(\eta)\xi^2 - a(\eta)\xi \quad \text{on } \eta = b, \quad (3.20)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{p_k(\eta)}{(ik)^2} \exp(ik\xi) + b(\eta) = p(\xi, \eta) \\
 & - \frac{1}{2} p_o(\eta)\xi^2 - a(\eta)\xi \quad \text{on } \eta = a, \quad (3.21)
 \end{aligned}$$

이므로, $p_o(\eta), a(\eta)$ 를 가정하면 $p_k(a_y), p_k(b_y), b(a_y), b(b_y)$ 를 구할 수 있다.

ii) 식(3.17), (3.18)의 상미분방정식을 각 모드별로 수치해석하여 $p_k(\eta), b(\eta)$ 를 구한다.

iii) $\xi = a_x, b_x$ 에서의 Dirichlet 경계조건이 주어진 경우 식(3.13)에 경계조건을 적용하면

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} p_o(\eta)\xi^2 + a(\eta)\xi = p(\xi, \eta) \\
 & - \frac{p_k(\eta)}{(ik)^2} \exp(ik\xi) - b(\eta) \\
 & \quad \text{on } \xi = a_x \quad (3.22)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} p_o(\eta)\xi^2 + a(\eta)\xi = p(\xi, \eta) \\
 & - \frac{p_k(\eta)}{(ik)^2} \exp(ik\xi) - b(\eta) \\
 & \quad \text{on } \xi = a, \quad (3.23)
 \end{aligned}$$

이므로 $p_o(\eta), a(\eta)$ 를 구할 수 있다.

iv) i)-iii)의 과정을 반복하여 수렴해를 구한다.

경계조건이 Neumann 조건시에는 식(3.20)-(3.23)에 식(3.13)으로 주어지는 압력의 1차 미분항을 적용하여 위에서와 같은 방법으로 수렴해를 구한다.

비주기성 스펙트럴법의 수치해석법 검증을 위하여 3.1절에서 수치해석한 장축/단축비가 4인 타원형주상체에 대하여 영역을 $x=0$ 에서 2등분하여 $x<0$ 인 영역에 대하여 수치해석하였다. 식(3.26)에서와 같이 내부경계면에는 Neumann, 외부경계면에서는 Dirichlet 경계조건, 좌우경계 즉, $x=0$ 에서는 Dirichlet 경계조건이 주어진 경우이다. ξ 방향 즉, 타원체 원주방향으로는 $\xi^{1,1}$ 으로 하여 타원의 끝단을 조밀하게 분할하였고, 일반좌표계에서 $\Delta\xi=1, \Delta\eta=1$ 이 되도록 좌표변환하였다.

$$\nabla^2 p = 1 \tag{3.24}$$

$$p_\eta = \frac{1}{2} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2} \right) \cdot (x_\eta, y_\eta)$$

$$\text{on } \frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1$$

$$p = \frac{1}{2} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)$$

$$\text{on } \frac{x^2}{8^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$$

축차단계에서는 $p_o^{(n)}(\eta) = (1 - \omega_b) p_o^{(n-1)}(\eta) + \omega_b p_o^{(n-1)}(\eta)$, $a^{(n)}(\eta) = (1 - \omega_b) a^{(n-1)}(\eta) + \omega_b a^{(n-1)}(\eta)$ 로 하여, 완화계수를 도입하였다. Table 3에는 해석결과를 분할수 및 완화계수 ω_b 에 따라 나타내었으며, 축차횟수는 $\epsilon_f = 0.02$, $\epsilon_p = 0.02$ 일 때의 값을 의미한다. 여기서 ϵ_p 는 경계면에서 수치해석해와 경계조건값의 최대오차를 의미한다. Table 3에서 ω_b 가 작은 경우 축차횟수가 증가하는데 점근방법이 동요(oscillation)하면서 점근하는 이유이다. 오차값은 $\omega_b = 0.7$ 일 때의 값을 나타내었는데, ω_b 가 다른 경우에도 같은 정도의 오차값을 유지한다.

Table 3 Iteration number with grid refinement and relaxation factor variation ($\omega = 0.7$)

mesh size	ω_b 0.3	0.5	0.7	ϵ	ϵ_p
16 * 16	58	64	68	0.0843	0.0092
32 * 32	68	71	12	0.0193	0.0021
64 * 64	74	54	10	0.0083	0.0007
128 * 128	65	14	8	0.0041	0.0004

2차원 날개주위 유동해석시 사용하는 C type의 격자구조시에는 내부경계면(branchcut line)과 물체경계가 일반좌표계의 $\eta = constant$ 선에 함께 존재하게 되는데, 스펙트럴법에서는 식(3.20), (3.21)에서와 같이 Neumann 또는 Dirichlet 경계

조건중 통일된 경계조건을 사용해야 한다. Dirichlet 경계조건을 사용하는 경우에는 Neumann 경계조건으로 주어지는 물체경계조건을 Dirichlet 경계조건으로 변환하여 식(3.20), (3.21)에 적용하였다. 즉, $p_\eta = (p_2 - p_1) / \Delta \eta$ 이므로 $p_2 = p_1 + p_\eta \Delta \eta$ 로 하여 경계조건에 적용하였고, 내부경계면에서는 유동장이 연속이므로 내부경계에서 압력이 같다는 Dirichlet 경계조건으로 적용하였다. Neumann 경계조건을 사용하는 경우에는 내부경계에서 $p_\eta = (p_2 - p_1) / \Delta \eta$ 이므로 p_1 에 내부경계값을 이용하여 경계조건에 사용하였다. 수치해법 타당성을 조사하기 위하여 다음과 같은 경우에 대하여 수치해석하였다.

$$\nabla^2 p = r \quad -1 < x, y < 1 \tag{3.25}$$

$$r = 1 \quad x < 0$$

$$0 \quad x \geq 0$$

$$p_\eta = 0 \quad \text{on } -0.5 < x < 0.5, y = 0$$

$$p = 0 \quad \text{on } y = y_b, x = x_a, x = x_b$$

$$p, p_\eta \quad \text{연속조건 on } y = 0, -1 < x < -0.5, 0.5 < x < 1$$

축차단계에서 경계조건에 사용하는 압력 및 압력의 미분값을 다음과 같이 $p^{(n)} = (1 - \omega_c) p^{(n-1)} + \omega_c p^{(n-1)}$, $p_\eta^{(n)} = (1 - \omega_c) p_\eta^{(n-1)} + \omega_c p_\eta^{(n-1)}$ 로 하여 완화계수 ω_c 를 도입하였다. 수치해석과정에서 사용한 완화계수를 정리하면 ω 는 영역내 압력 poisson 방정식의 수렴해를 얻기 위하여 사용한 완화계수이며, ω_b 는 식(3.22), (3.23)에서와 같이 $\xi = a_x, a_y$ 에서의 양단경계조건을 만족시키기 위한 완화계수이고, ω_c 는 내부경계와 물체경계가 공존하는 $\eta = constant$ 에서 경계조건을 만족시키기 위하여 사용한 완화계수를 의미한다. Table 4에는 Dirichlet 경계조건을 적용한 경우 수치해석결과를 분할수 및 완화계수 ω_c 에 따라 유한차분법에 의한 해석결과와 비교하여 오차를 나타내었다. 축차횟수는 $\epsilon_p = 0.01$ 인 경우를 의미한다.

Table 4 Iteration number with grid refinement and relaxation factor variation ($\omega = 0.7, \omega_b = 0.7$)

ω_c	0.3	0.5	0.7	ϵ	ϵ_r
mesh size					
16 * 16	52	74	126	0.0033	0.0151
32 * 32	104	154	260	0.0027	0.0132
64 * 64	224	315	530	0.0023	0.0101

4. 계산 결과

수치해법의 검증은 위하여 2차원 원형주상체주위 및 날개주위에 대한 비정상점성유동을 수치해석하고 결과를 비교하여 보았다.

4.1 원형주상체주위 유동

R_n 이 200, $10^3, 10^4$ 인 층류유동에 대하여 수치 해석하였다. 원형좌표계를 사용하였고, 각 방향으로 (128,128)로 분할하였다. 물체주위에서는 정체 유동(stagnation flow)일 때의 경계층두께 이론식 ($\delta = 2.4/\sqrt{R_n}$)[9] 값을 10등분한 격자가 되도록 하고, 그 이후는 일정비율로 커지도록 분할하였으며, 원주방향으로는 등간격으로 분할하였다. 일반좌표계에서 $\Delta\xi = 1, \Delta\eta = 1$ 이 되도록 좌표 변환하였다. 무한원방은 물체반경의 15배의 반경을 가지는 원으로 하였고, 경계조건으로는 포텐셜유동의 압력 및 속도장을 이용한 Dirichlet 경계조건으로 주었으며, 초기조건은 전영역에 정상유동(uniform flow)를 주었다. 시간간격은 무차원시간으로 0.02로 하였고, Runge-Kutta 4차 방법을 이용하여 시간을 전진시켰다. 대류항 차분은 중심차분(central difference)과 풍상차분(upwinding difference)을 조합하여 $p_x = (1 - \omega_u)(p_{n+1} - p_{n-1}) / (2\Delta x) + \omega_u(p_{n+1} - p_n) / \Delta x$ 를 사용하였는데, R_n 증가에 따라 각각 ω_u 로 0, 0.2, 0.4의 값을 이용하여 수치해석하였다. $R_n = 10^4$ 에서

ω_u 가 0.3에서는 시간전진에 따라 해가 발산하여 해를 구할 수 없었는데, ω_u 에 따른 해의 발산을 제거하기 위해서는 3차이상의 차분방식이 바람직할 것으로 판단된다[2]. 3.1절에서와 같이 각시간 단계의 계산시간은 물체형상의 대칭성으로 인하여 $O(n^2)$ 이 되는 경우이다. Fig.1에는 $R_n = 200$ 일 때 무차원시간 $t = 200$ 일 때 영역내 압력분포를 도시하였다. 해석결과와 검증을 위하여 Fig.2a, b에는 시간에 따른 항력계수($C_D = Drag / 0.5\rho$

$U_o^2 D$) 및 양력계수($C_L = Lift / 0.5\rho U_o^2 D$)를 김[11]의 결과와 같이 도시하였다. 여기서, D는 원형주상체의 직경을 의미한다. $R_n = 200$ 에 대한 해석결과가 수치해석방법에 따라 항력계수값은 1에서 1.6까지의 결과를 주는 것으로 볼 때[11], 정상상태에서의 항력계수 및 양력계수값은 두 결과가 비교적 일치하고 있음을 알 수 있다. 한편 Fig.2a에서와 같이 무차원화시간 $t = 150$ 이후부터는 정상상태의 해가 나타나고 있음을 알 수 있다. Fig.3, 4에는 $R_n = 10^3$ 일 때의 결과를 같은 방법으로 도시하였고, Fig.5, 6에는 $R_n = 10^4$ 일 때의 결과를 도시하였다. 무차원시간 $t = 150$ 이후부터는 정상해가 얻어지고 있음을 알 수 있으며, R_n 증가에 따라 항력계수 (C_D)는 감소하고 있으나 진동폭은 점차 증가하고 있음을 알 수 있다. Table 5에는 계산된 항력계수 및 Strouhal 수 (nD/U_o)를 실험값[7]과 비교하였는데, 비교적 일치하고 있음을 알 수 있다.

Table 5 Drag coefficients and Strouhal number

R_n	200		10^3		10^4	
	num.	exp.	num.	exp.	num.	exp.
C_D	1.33	1.19	1.26	1.10	1.15	1.10
Strouhal no.	0.20	0.19	0.18	0.21	0.17	0.20

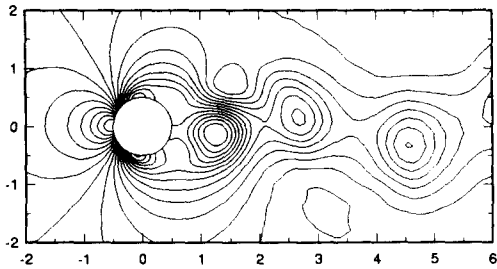


Fig.1 Pressure contour at $R_n = 200$

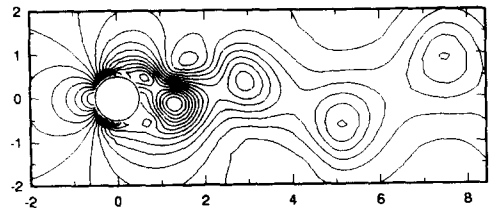


Fig.3 Pressure contour at $R_n = 10^3$

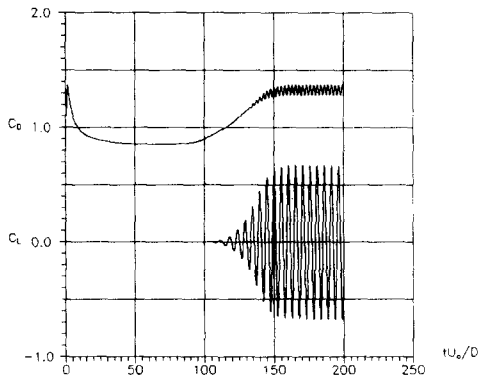


Fig.2a Time history of drag and lift coeff. at $R_n = 200$ (Present)

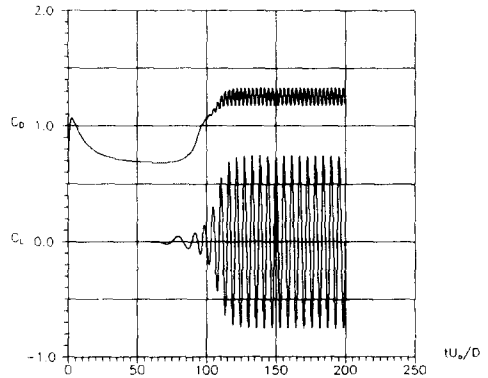


Fig.4 Time history of drag and lift coeff. at $R_n = 10^3$

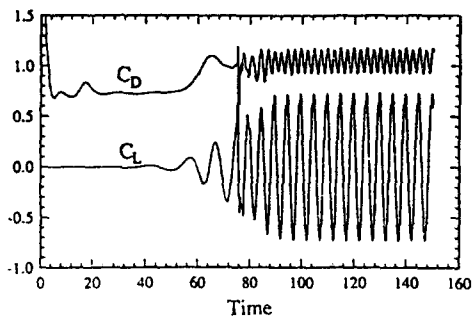


Fig.2b Time history of drag and lift coeff. at $R_n = 200$ (Kim[11])

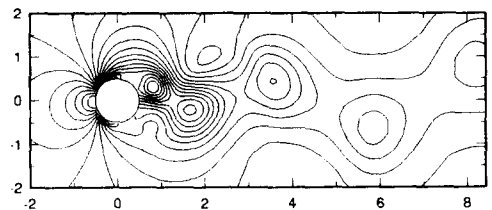


Fig.5 Pressure contour at $R_n = 10^4$

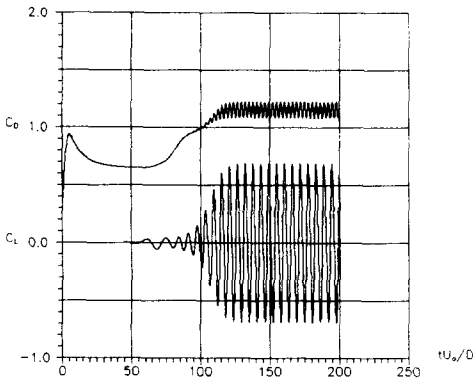


Fig.6 Time history of drag and lift coeff. at $R_n = 10^4$

4.2 2차원 날개주위 유동

NACA-0012에 있어서 $R_n = 10^4$ 인 경우에 대하여 수치해석하였다. C type 격자를 사용하였으며, 3.2절의 비주기성 스펙트럴법을 이용하여 수치해석하였다. 3.2절에서와 같이 내부경계조건은 수치해석상 비교적 안정된 Dirichlet 경계조건으로 수치해석하였다. 분할수는 (150,50)으로 하였고 일반좌표계에서 $\Delta\xi = 1, \Delta\eta = 1$ 이 되도록 좌표변환하였다. 여기서 분할방법은 대수적방법[3]을 이용하였다. Fig.7에는 날개주위 분할을 도시하였다. Fig.8에는 무차원시간 $t = 20$ 일 때의 영역내 압력 분포를, Fig.9에는 시간에 따른 항력/양력계수값을 도시하였는데, 영각 0인 경우에도 계수값이 중요함을 알 수 있다[11]. Fig.10에는 날개단면에서의 압력분포를 김 및 Mehta의 결과[10]와 비교하였는데, 비교적 일치하고 있음을 알 수 있다. 결과 차이는 영역의 분할방법 및 수치해석방법상의 차이인 것으로 판단된다. 원형주상체주위 유동과 달리 매시간단계에서 축차법을 사용하는데, 각 시간 단계에서 R_{max} 및 경계조건 5%를 만족하도록 하였다. 여기서, R_{max} 는 압력 Poisson 방정식 우변의 최대값을 의미한다. 축차횟수의 평균은 10번

정도이었고, 완화계수 ω_b 는 0.8을 사용하였다. 시간간격은 무차원시간 0.01로 하였고, 시간전진은 Runge-Kutta 4차 방법을 이용하였다. 한편 대류항차분시 upwinding factor ω_u 는 0.3으로 하였다. 경계조건은 상류에서는 정상유동(uniform flow) 및 압력 0를 후류에서는 속도장 및 압력의 미분항을 0으로 하는 경계조건을 주었다.

5. 결론

이상의 수치해석 결과를 통하여 스펙트럴법이 일반적인 문제로 확장될 수 있음을 알 수 있었다. 앞으로 3차원 및 자유표면으로의 확장을 통한 계산방법에 대한 연구가 필요한 것으로 판단된다.

후 기

이 논문은 1995년도 한국학술진흥재단의 공모 과제 연구비에 의하여 연구되었음.

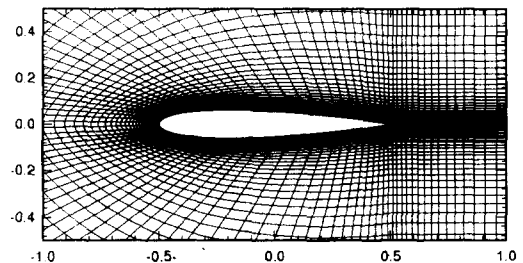


Fig.7 A partial view of grids for NACA0012

참고 문헌

- [1] Canuto, C., Quarteroni, A., Hussaini M.Y. & Zang, T.A., "Spectral method in Fluid Dynamics", Springer Series in Computational Physics, 1986.
- [2] Davis, R.W. & Moore, E.F., "A numerical study of vortex shedding from rectangles", J.F.M., Vol.116, 1982, pp 1-48.
- [3] Fletcher, C.A.J., "Computational Techniques for Fluid Dynamics", Springer Series in Computational Physics, 1991.
- [4] Hochney, R.W., "Rapid Elliptic solvers", Numerical Methods in Applied Fluid Dynamics, Academic Press, 1980, pp 1-48.
- [5] Kim, S.Y., "A Study on the Flow around a Strut Mounted on the Plate", Ph.D. Thesis, Hiroshima Univ., Japan, 1993, pp 7-16.
- [6] Press, W.H., Flannery, B.P., "Numerical Recipes", 1986.
- [7] Schlichting, H., "Boundary Layer Theory", 1979.
- [8] Schwarztrauber, P.N., "A direct method for the discrete solution of separable elliptic equations", SIAM J. Numer. Anal., Vol 11., 1974, pp 1136-1150.
- [9] White F.M., "Viscous Fluid Flow", 1974, pp 172-180.
- [10] 김 기섭, "정규격자계를 이용한 2차원 날개 단면 주위의 비압축성 난류유동의 수치해석", 한국과학기술원 박사학위논문, 1995.
- [11] 김 우진, "날개주위의 비정상 박리효과에 관한 연구", 대한조선학회 논문집 제 32 권 제 3 호, 1995.
- [12] 신 영섭, 이 기표, "직접법을 이용한 Poisson 방정식 수치해법에 관하여", 대한조선학회 논문집 제 32 권 제 3 호, 1995.

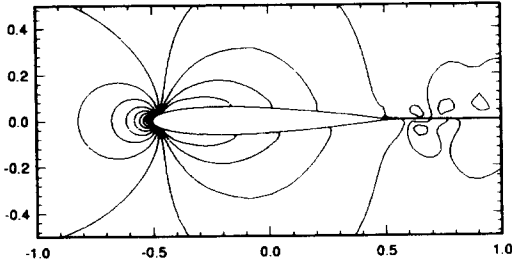


Fig.8 Pressure contour at $R_n = 10^4$

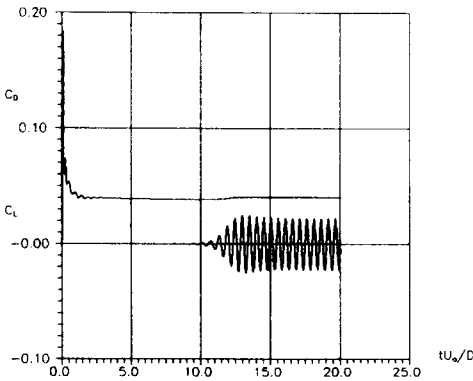


Fig.9 Time history of drag and lift coeff. at $R_n = 10^4$

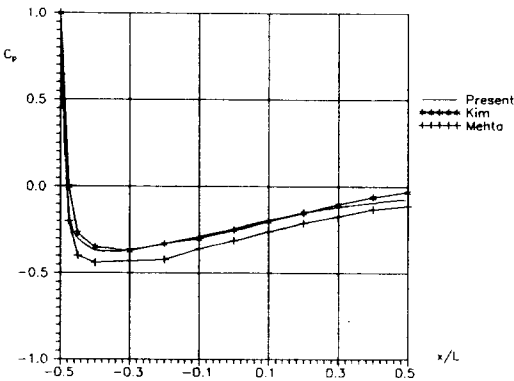


Fig.10 Surface pressure distribution for NACA0012 airfoil