
 論 文

大韓造船學會論文集
 第 33 卷 第 2 號 1996年 5月
 Transactions of the Society of
 Naval Architects of Korea
 Vol. 33, No. 2, May 1996

Mindlin판 특성함수를 이용한 직사각형 후판의 진동해석

이종분*, 김극천**

Vibration Analysis of Rectangular Thick Plates Using Mindlin Plate Characteristic Functions

by

J. M. Lee* and K. C. Kim**

요 약

직사각형 Mindlin판 유추계의 고유진동 및 동적응답의 해석에 대하여 종래의 방법들 보다 정확도 및 계산효율을 향상시킬 수 있는 방법을 추구하였다.

Mindlin 판이론에 입각하여 탄성구속경계조건에 대해 정식화 하고, Timoshenko 보합수로부터 시작하는 Kantorovich 방법을 원용하여 Mindlin 판특성함수를 도출했다. 이 Mindlin판 특성함수에 기초하여 등방성후판 및 직교이방성후판에 대해서 반복적 Kantorovich 방법에 의해 고유해를 구하는 방법을 제시했다. 이 방법은 정확도 및 계산효율면에서 종래의 다른 근사해법보다 그 우월성이 인정되며, 특히 중복고유치를 갖는 경우 명확한 고유치 및 고유모드를 얻을 수 있다. 또 모드해석방법에 의한 동적응답계산에 있어서도 보다 더 정확한 결과를 얻을 수 있다.

Abstract

An iterative Kantorovich method is presented for the vibration analysis of rectangular isotropic and orthotropic thick plates. Mindlin plate characteristic functions are derived in general forms by the Kantorovich method initially starting with Timoshenko beam functions consistent with the boundary conditions of the plate. Through numerical calculations of natural pairs, i.e. natural frequencies and corresponding modes, and dynamic responses of

발 표 : 1995년도 대한조선학회 추계연구발표회('95. 11. 10)

접수일자 : 1996년 2월 5일, 재접수일자 : 1996년 4월 23일

* 정회원, 현대중공업(주) 선박해양연구소

** 정회원, 서울대학교 조선해양공학과

appropriate models, it has been confirmed that the presented method is superior to the Rayleigh-Ritz analysis or the FEM analysis in accuracy and computational efficiency.

1. 서 론

선체 및 해양구조물 등 대형구조체를 구성하는 국부구조계에는 등방성 후판 및 복판패널 등 직교 이방성 후판유추구조 등이 있다. 이들은 전단변형 및 회전관성의 효과가 매우 크므로 이들 효과가 합당하게 고려될 수 있는 해석방법이 요구된다. 이들 국부구조계에 대한 진동해석의 경우 4변 단순지지인 경우를 제외하고는 엄밀해를 구하기가 어려우므로 일반적으로 Mindlin 판이론에 기초한 근사해법이 많이 사용된다.

Dawe[1](1978)는 Mindlin판이론을 적용한 유한 띠모델을 이용하여 한 쌍의 맞변이 단순지지인 직사각형 등방성후판에 대해 고유진동수를 산정했고, Dawe등[2](1980)은 고전적 경계조건을 갖는 등방성 Mindlin판의 고유진동에 대해 진동과형가정함수로서 Timoshenko보합수를 이용하는 Rayleigh-Ritz 해석방법을 제시했다. Aksu등[3] (1987) 및 Al-Kaabi등[4](1990)은 유한차분법에 의해, Mizusawa[5] (1993)는 곡면띠방법을 이용하여 직사각형 Mindlin판의 진동해석을 수행했다. Chung등[6](1993)은 Timoshenko보합수 성질을 갖는 직교 다항식을 도출하고, Rayleigh-Ritz방법에 의해 4변 탄성구속 직교이방성 Mindlin판의 진동해석을 수행했다. Srinivas등[7](1970)은 단순지지된 직교이방성후판에 대해 3차원 탄성이론에 의거하여 진동해석을 수행했다.

Bhat등[9](1993)은 Kantorovich방법의 반복적 적용에 의한 직사각형 박판의 고유진동해석을 검토했고 또 다양한 수치계산예를 통하여 고차로 갈수록 Rayleigh-Ritz방법의 경우 보다 정확도가 높음을 확인했다.

본 연구에서는 Mindlin판 및 Mindlin판유추구조계의 고유진동 및 모달해석에 기초한 동적응답의 해석에 대하여 종래의 방법들 보다 정확도를 향상시킬 뿐만 아니라 계산효율도 향상시킬 수 있는 방법이 추구되었다. 즉 Timoshenko보합수로

부터 출발하는 Kantorovich방법을 원용하여 Mindlin판 특성함수(Mindlin plate characteristic function)를 도출하고, 이에 기초한 고유진동해석 및 동적응답계산 방법을 제시했다. 정식화 및 해법의 타당성, 정확도 및 계산효율 관점에서의 유용성 등은 등방성후판 및 직교이방성후판 등에 대한 일련의 수치계산예를 통해 검증되었다.

2. Mindlin판 특성함수 도출

2.1 등방성 후판

Fig.1-(a)와 같은 등방성 후판이 Fig.1-(b)와 같이 탄성구속된 경우에 대해 Mindlin판이론을 적용하여 정식화한다.

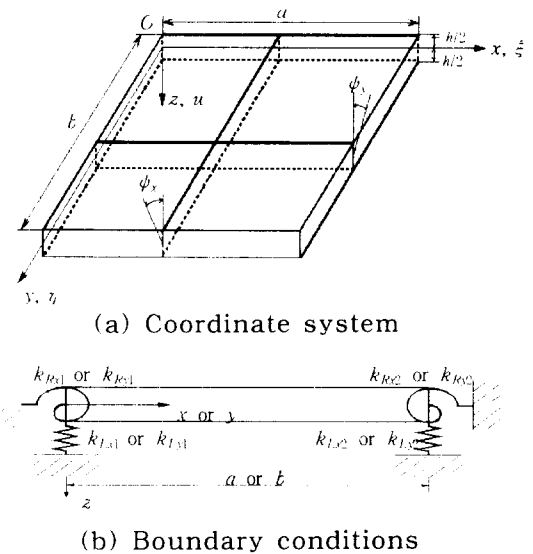


Fig.1 Coordinate system and boundary conditions of a rectangular Mindlin plate.

우선, 무차원 파라미터를 다음과 같이 정의한다.

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{b}, \quad \alpha = \frac{a}{b}, \quad S_D^2 = \frac{KGha^2}{D}$$

$$\begin{aligned}
 K_{Lx1} &= \frac{k_{Lx1}a}{KGh}, & K_{Lx2} &= \frac{k_{Lx2}a}{KGh}, \\
 K_{Ly1} &= \frac{k_{Ly1}a}{KGh}, & K_{Ly2} &= \frac{k_{Ly2}a}{KGh}, \\
 K_{Rx1} &= \frac{k_{Rx1}a}{D}, & K_{Rx2} &= \frac{k_{Rx2}a}{D}, \\
 K_{Ry1} &= \frac{k_{Ry1}b}{D}, & K_{Ry2} &= \frac{k_{Ry2}b}{D}
 \end{aligned} \tag{1}$$

여기서 a, b 는 각각 판의 x, y 방향의 길이, h 는 판두께, G 는 전단탄성계수, $D (= Eh^3/12(1-\nu^2))$ 는 판의 단위길이당 굽힘강성이고, E 는 인장탄성계수, K 는 전단수정계수, k_{Lx1}, k_{Lx2} 및 k_{Rx1}, k_{Rx2} 는 각각 $x=0, x=a$ 에서의 병진 및 회전스프링 상수, k_{Ly1}, k_{Ly2} 및 k_{Ry1}, k_{Ry2} 는 각각 $y=0, y=b$ 에서의 병진 및 회전스프링 상수이다.

계의 변형에너지 V 와 운동에너지 T 산식은 다음과 같다[12].

$$\begin{aligned}
 V = \frac{D}{2a} & \left[\int_0^1 \int_0^1 \left\{ \left(\frac{\partial \psi_\xi}{\partial \xi} \right)^2 + a^2 \left(\frac{\partial \psi_\eta}{\partial \eta} \right)^2 + 2\nu a \frac{\partial \psi_\xi}{\partial \xi} \right. \right. \\
 & \cdot \left. \frac{\partial \psi_\eta}{\partial \eta} + \frac{1-\nu}{2} \left(a \frac{\partial \psi_\xi}{\partial \eta} + \frac{\partial \psi_\eta}{\partial \xi} \right)^2 \right. \\
 & + S_D^2 \left[\left(\frac{1}{a} \frac{\partial w}{\partial \xi} - \psi_\xi \right)^2 + \left(\frac{1}{b} \frac{\partial w}{\partial \eta} - \psi_\eta \right)^2 \right] \Big] d\xi d\eta \\
 & + \int_0^1 \left\{ \frac{a^2}{b^2} (K_{Ly1} [w|_{\eta=0}]^2 + K_{Ly2} [w|_{\eta=1}]^2) \right. \\
 & + a^2 (K_{Ry1} [\psi_\eta|_{\eta=0}]^2 + K_{Ry2} [\psi_\eta|_{\eta=1}]^2) \Big\} d\xi \\
 & + \int_0^1 \left\{ \frac{1}{a^2} (K_{Lx1} [w|_{\xi=0}]^2 + K_{Lx2} [w|_{\xi=1}]^2) \right. \\
 & + (K_{Rx1} [\psi_\xi|_{\xi=0}]^2 + K_{Rx2} [\psi_\xi|_{\xi=1}]^2) \Big\} d\eta \tag{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T = \frac{\rho ab}{2} & \int_0^1 \int_0^1 \left\{ \frac{h^3}{12} \left(\frac{\partial \psi_\xi}{\partial t} \right)^2 + \frac{h^3}{12} \left(\frac{\partial \psi_\eta}{\partial t} \right)^2 \right. \\
 & \left. + h \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right\} d\xi d\eta \tag{3}
 \end{aligned}$$

여기서 $\psi_\xi(\xi, \eta, t), \psi_\eta(\xi, \eta, t)$ 및 $w(\xi, \eta, t)$ 는 Fig.1-(a)에 보인 바와 같이 차례로 판의 xz, yz 면의 굽힘회전각 및 횡방향처짐변위이고, ν 는 Poisson비, ρ 는 재료의 질량밀도이다.

운동방정식과 경계조건식을 얻기 위해 Hami-

lton 원리

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt = 0 \tag{4}$$

를 적용한다. 조화운동, 즉

$$\begin{aligned}
 w(\xi, \eta, t) &= W(\xi, \eta) e^{i\omega t} \\
 \psi_\xi(\xi, \eta, t) &= \Psi_\xi(\xi, \eta) e^{i\omega t} \\
 \psi_\eta(\xi, \eta, t) &= \Psi_\eta(\xi, \eta) e^{i\omega t}
 \end{aligned} \tag{5}$$

을 가정한다. 진동과형은 Dawe등[2]이 Mindlin판에 관한 일련의 연구에서 $\Psi_\xi(\xi, \eta)$ 의 η 축방향의 변화는 $W(\xi, \eta)$ 의 η 축방향의 변화와 매우 유사하고, 또 $\Psi_\eta(\xi, \eta)$ 의 ξ 축방향의 변화는 $W(\xi, \eta)$ 의 ξ 축방향의 변화와 매우 유사하다고 했다. 본 연구에서도 이를 수용하여 다음과 같이 가정한다.

$$\begin{aligned}
 W(\xi, \eta) &= X(\xi)Y(\eta) \\
 \Psi_\xi(\xi, \eta) &= \Phi(\xi)Y(\eta) \\
 \Psi_\eta(\xi, \eta) &= X(\xi)\Theta(\eta)
 \end{aligned} \tag{6}$$

변위장에 대한 변분을 취하면 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned}
 \delta W &= \delta X Y + \delta Y X \\
 \delta \Psi_\xi &= \delta \Phi Y + \delta Y \Phi \\
 \delta \Psi_\eta &= \delta X \Theta + \delta \Theta X
 \end{aligned} \tag{7}$$

먼저 Mindlin판의 서로 마주보는 두 변과 동일한 경계조건을 갖는 Timoshenko 보합수를 판의 η 방향의 진동과형함수 $Y(\eta), \Theta(\eta)$ 라고 가정한다.

$Y(\eta), \Theta(\eta)$ 는 Timoshenko보합수의 일반해와 경계조건으로 부터 산정된다. 양단탄성구속된 Timoshenko보에 대한 일반해는 Chung등[11]의 결과에서 축력과 중간 구속조건을 배제하므로써 다음과 같이 표현되며

$$Y(\eta) = \frac{b}{\hat{\alpha}^2 + \hat{\beta}^2} \left\{ \left[\frac{1 - \hat{b}^2 r^2 i^2}{i^2 \hat{b}^3 \hat{\alpha}} \sinh(\hat{\alpha} \hat{b} \eta) \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1 - \hat{b}^2 r^2 \hat{t}^2}{\hat{t}^2 \hat{b}^3 \hat{\beta}} \sin(\hat{\beta} \hat{b} \eta) \Big] \Theta(0) \\
 & + [\cosh(\hat{\alpha} \hat{b} \eta) - \cos(\hat{\beta} \hat{b} \eta)] \frac{\Theta'(0)}{\hat{b}^2} + [(\hat{\alpha}^2 + r^2) \\
 & \cdot \cosh(\hat{\alpha} \hat{b} \eta) + (\hat{\beta}^2 - r^2) \cos(\hat{\beta} \hat{b} \eta)] \frac{Y(0)}{b} \\
 & + \left[\frac{-1 + \hat{t}^2 \hat{b}^2 (\hat{\alpha}^2 + r^2)}{\hat{t}^2 \hat{b}^3 \hat{\alpha}} \sinh(\hat{\alpha} \hat{b} \eta) \right. \\
 & \left. + \frac{1 + \hat{t}^2 \hat{b}^2 (\hat{\beta}^2 - r^2)}{\hat{t}^2 \hat{b}^3 \hat{\beta}} \sin(\hat{\beta} \hat{b} \eta) \right] \frac{Y'(0)}{b} \Big\} \quad (8)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Theta(\eta) = & \frac{1}{\hat{\alpha}^2 + \hat{\beta}^2} \left\{ \left[\frac{\hat{t}^2 \hat{\alpha}^2 \hat{b}^2 + 1 + \hat{t}^4 \hat{b}^2}{\hat{t}^2 \hat{b}^2} \right. \right. \\
 & \cdot \cosh(\hat{\alpha} \hat{b} \eta) + \frac{\hat{t}^2 \hat{\beta}^2 \hat{b}^2 - 1 - \hat{t}^4 \hat{b}^2}{\hat{t}^2 \hat{b}^2} \cos(\hat{\beta} \hat{b} \eta) \Big] \Theta(0) \\
 & + \left[\left(\frac{\hat{\alpha}}{\hat{b}} + \frac{\hat{t}^2}{\hat{b} \hat{\alpha}} \right) \sinh(\hat{\alpha} \hat{b} \eta) + \left(\frac{\hat{\beta}}{\hat{b}} - \frac{\hat{t}^2}{\hat{b} \hat{\beta}} \right) \right. \\
 & \cdot \sin(\hat{\beta} \hat{b} \eta) \Big] \Theta'(0) + \left[\frac{1}{\hat{b} \hat{\alpha}} \sinh(\hat{\alpha} \hat{b} \eta) \right. \\
 & \left. - \frac{1}{\hat{b} \hat{\beta}} \sin(\hat{\beta} \hat{b} \eta) \right] \frac{Y(0)}{b} - \left[\frac{1}{\hat{t}^2 \hat{b}^2} \cosh(\hat{\alpha} \hat{b} \eta) \right. \\
 & \left. - \frac{1}{\hat{t}^2 \hat{b}^2} \cos(\hat{\beta} \hat{b} \eta) \right] \frac{Y'(0)}{b} \Big\} \quad (9)
 \end{aligned}$$

경계조건식은 다음과 같다[11].

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{b} Y = & \frac{1}{K_{Ly1}} \frac{1}{b} Y' - \frac{1}{K_{Ly1} K_{Ry1}} \Theta' \quad \text{at } \eta=0 \\
 \Theta = & \frac{1}{K_{Ry1}} \Theta' \\
 \frac{1}{b} Y = & - \frac{1}{K_{Ly2}} \frac{1}{b} Y' - \frac{1}{K_{Ly2} K_{Ry2}} \Theta' \quad \text{at } \eta=1 \\
 \Theta = & - \frac{1}{K_{Ry2}} \Theta' \quad (10)
 \end{aligned}$$

(8), (9) 및 (10)에서의 무차원 파라미터는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \hat{b}^2 = & \frac{\rho A b^4 \omega^2}{EI}, \quad r^2 = \frac{\rho I}{\rho A b^2}, \quad \hat{t}^2 = \frac{EI}{KAGb^2}, \\
 K_{Ly1} = & \frac{k_{Ly1} b^3}{EI}, \quad K_{Ly2} = \frac{k_{Ly2} b^3}{EI}, \\
 K_{Ry1} = & \frac{k_{Ry1} b}{EI}, \quad K_{Ry2} = \frac{k_{Ry2} b}{EI} \quad (11) \\
 \left\{ \begin{matrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{matrix} \right\} = & \left[\frac{1}{2} (\mp \lambda_1 + \lambda_2) \right]^{1/2}, \quad \lambda_2 > \lambda_1 \quad (12)
 \end{aligned}$$

$$\lambda_1 = (\hat{t}^2 + r^2), \quad \lambda_2 = \left[(\hat{t}^2 - r^2)^2 + \frac{4}{\hat{b}^2} \right]^{1/2}$$

여기서 A 및 I 는 각각 단면적 및 단면2차모멘트이다.

앞에서 산정한 Timoshenko보합수를 판의 η 방향 진동과형가정함수로 이용하면 그 방향의 변분은 $\delta Y = 0 = \delta \Theta$ 이 되고, Hamilton 원리를 적용하면 다음과 같은 $X(\xi)$ 및 $\Phi(\xi)$ 에 대한 경계치문제가 얻어진다[12].

지배방정식 :

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 \Phi}{d\xi^2} + \beta_1 \Phi + \frac{\gamma_1}{a} \frac{dX}{d\xi} = & 0 \quad (13) \\
 \frac{1}{a} \frac{d^2 X}{d\xi^2} + \frac{\beta_2}{a} X + \gamma_2 \frac{d\Phi}{d\xi} = & 0
 \end{aligned}$$

경계조건식 :

$$\begin{aligned}
 \frac{d\Phi}{d\xi} + \nu \alpha^2 \frac{A_2}{a} X - K_{Ry1} \Phi = & 0 \\
 \frac{1}{a} \frac{dX}{d\xi} + \left(\frac{1-\nu}{2} B_4 - \frac{S_D^2}{a^2} B_2 \right) \Phi \\
 - \frac{K_{Ly1}}{a^2} \frac{B_2}{a} X = & 0 \quad \text{along } \xi=0 \quad (14)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d\Phi}{d\xi} + \nu \alpha^2 \frac{A_2}{a} X + K_{Ry2} \Phi = & 0 \\
 \frac{1}{a} \frac{dX}{d\xi} + \left(\frac{1-\nu}{2} B_4 - \frac{S_D^2}{a^2} B_2 \right) \Phi \\
 + \frac{K_{Ly2}}{a^2} \frac{B_2}{a} X = & 0 \quad \text{along } \xi=1 \quad (15)
 \end{aligned}$$

여기서

$$\begin{aligned}
 \beta_1 = & \Omega^2 - S_D^2 + \frac{1-\nu}{2} \alpha^2 (A_1 - G_{11} + G_{10}) \\
 \gamma_1 = & \frac{1+\nu}{2} \alpha^2 A_2 + S_D^2 - \frac{1-\nu}{2} \alpha^2 (G_{21} - G_{20}) \\
 \beta_2 = & \Omega^2 \left(B_1 + 12 \left(\frac{a}{h} \right)^2 \frac{B_2}{a^2} \right) + S_D^2 (B_4 - B_1 \\
 & + B_5 - B_6 - H_{21} + H_{20} + H_{31} - H_{30}) \\
 & + \alpha^2 (B_3 - H_{11} + H_{10} - K_{Ly1} T_0 - K_{Ly2} T_1 \\
 & - K_{Ry1} S_0 - K_{Ry2} S_1) \\
 \gamma_2 = & \frac{1+\nu}{2} B_4 - \frac{S_D^2}{a^2} B_2 - \nu (H_{31} - H_{30}) \quad (16)
 \end{aligned}$$

(16)에서 Ω^2 은 무차원 진동수파라미터로서

$$\Omega^2 = \frac{\rho a^2 h^3 \omega^2}{12D} \quad (17)$$

이고, 기타상수들의 정의는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{b^2} \int_0^1 Y^2 d\eta, & B &= \frac{1-\nu}{2} \int_0^1 \Theta^2 d\eta + \frac{S_D^2}{a^2} A \\ A_1 &= \frac{1}{A} \frac{1}{b^2} \int_0^1 Y \frac{d^2 Y}{d\eta^2} d\eta, \\ A_2 &= \frac{1}{A} \frac{1}{b_1} \int_0^1 Y \frac{d\Theta}{d\eta} d\eta, \\ B_1 &= \frac{1}{B} \int_0^1 \Theta^2 d\eta, & B_2 &= \frac{A}{B}, \\ B_3 &= \frac{1}{B} \int_0^1 \Theta \frac{d^2 \Theta}{d\eta^2} d\eta, \\ B_4 &= \frac{1}{B} \frac{1}{b} \int_0^1 \frac{dY}{d\eta} \Theta d\eta, & B_5 &= \frac{A}{B} A_1, \\ B_6 &= \frac{A}{B} A_2, \\ G_{10}, G_{11} &= \frac{1}{A} \frac{1}{b^2} [Y \frac{dY}{d\eta}]_{\eta=0,1}, \\ G_{20}, G_{21} &= \frac{1}{A} \frac{1}{b} [Y\Theta]_{\eta=0,1}, \\ H_{10}, H_{11} &= \frac{1}{B} [\Theta \frac{d\Theta}{d\eta}]_{\eta=0,1}, \\ H_{20}, H_{21} &= \frac{A}{B} G_{10,11}, \\ H_{30}, H_{31} &= \frac{A}{B} G_{20,21}, \\ S_0, S_1 &= \frac{1}{B} [\Theta]_{\eta=0,1}^2, \\ T_0, T_1 &= \frac{1}{B} \frac{1}{b^2} [Y]_{\eta=0,1}^2 \end{aligned} \quad (18)$$

Laplace 변환방법을 원용하면 경계치 문제의 일반해는 다음과 같이 귀착된다.

$$\begin{aligned} \Phi(\xi) &= \frac{1}{p_1^2 + p_2^2} \left\{ [(p_2^2 \cosh p_2 \xi + p_1^2 \cos p_1 \xi) \right. \\ &+ (p_2 \sinh p_2 \xi + p_1 \sin p_1 \xi) K_{Rxl} + (p_2 \sinh p_2 \xi \\ &+ p_1 \sin p_1 \xi) K_{Rxl} + (\cosh p_2 \xi - \cos p_1 \xi) \\ &\cdot (\beta_2 - \gamma_1 \gamma_2 + \gamma_1 (\frac{1-\nu}{2} B_4 - \frac{S_D^2}{a^2} B_2)) \\ &+ (\frac{\sinh p_2 \xi}{p_2} - \frac{\sin p_1 \xi}{p_1}) \beta_2 K_{Rxl}] \Phi(0) \\ &+ [(p_2 \sinh p_2 \xi + p_1 \sin p_1 \xi) (-\nu \alpha^2 A_2) \\ &+ (\cosh p_2 \xi - \cos p_1 \xi) (-\gamma_1 \frac{K_{Lxl}}{a^2} B_2) \\ &+ (\frac{\sinh p_2 \xi}{p_2} - \frac{\sin p_1 \xi}{p_1}) (\beta_2 \gamma_1 - \beta_2 \nu \alpha^2 A_2)] \frac{1}{a} X(0) \left. \right\} \\ X(\xi) &= \frac{a}{p_1^2 + p_2^2} \left\{ [(p_2^2 \cosh p_2 \xi + p_1^2 \cos p_1 \xi) \right. \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} &+ (p_2 \sinh p_2 \xi + p_1 \sin p_1 \xi) \frac{K_{Lxl}}{a^2} B_2 \\ &+ (\cosh p_2 \xi - \cos p_1 \xi) [\beta_1 + \gamma_2 \nu \alpha^2 A_2 - \gamma_1 \gamma_2] \\ &+ (\frac{\sinh p_2 \xi}{p_2} - \frac{\sin p_1 \xi}{p_1}) \beta_1 \frac{K_{Lxl}}{a^2} B_2] \frac{1}{a} X(0) \\ &+ [(p_2 \sinh p_2 \xi + p_1 \sin p_1 \xi) (\frac{S_D^2}{a^2} B_2 - \frac{1-\nu}{2} B_4) \\ &+ (\cosh p_2 \xi - \cos p_1 \xi) (-\gamma_2 K_{Rxl}) + (\frac{\sinh p_2 \xi}{p_2} \\ &- \frac{\sin p_1 \xi}{p_1}) (\beta_1 \gamma_2 - \beta_1 (\frac{1-\nu}{2} B_4 - \frac{S_D^2}{a^2} B_2))] \Phi(0) \left. \right\} \end{aligned} \quad (20)$$

여기서

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \pm (\beta_1 + \beta_2 - \gamma_1 \gamma_2) \\ &+ ((\beta_1 + \beta_2 - \gamma_1 \gamma_2)^2 - 4\beta_1 \beta_2)^{1/2} \}^{1/2} \end{aligned} \quad (21)$$

단,

$$((\beta_1 + \beta_2 - \gamma_1 \gamma_2)^2 - 4\beta_1 \beta_2)^{1/2} > (\beta_1 + \beta_2 - \gamma_1 \gamma_2)$$

일반해 (19), (20) 및 경계조건식 (14), (15)로부터 고유치문제가 형성되고, 이로 부터 무차원 진동수파라미터 Ω_i , 및 해당 고유함수 $X(\xi)$ 및 $\Phi(\xi)$ 가 구해진다.

앞에서 구한 $X(\xi)$ 및 $\Phi(\xi)$ 를 ξ 방향의 진동 파형함수로 이용하고 유사한 과정을 거치면 다음과 같이 $Y(\eta)$ 및 $\Theta(\eta)$ 에 대한 경계치 문제가 얻어진다.

지배방정식 :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Theta}{d\eta^2} + \beta_1^* \Theta + \frac{\gamma_1^*}{b} \frac{dY}{d\eta} &= 0 \\ \frac{1}{b} \frac{d^2 Y}{d\eta^2} + \frac{\beta_2^*}{b} Y + \gamma_2^* \frac{d\Theta}{d\eta} &= 0 \end{aligned} \quad (22)$$

경계조건식 :

$$\begin{aligned} \frac{d\Theta}{d\eta} + \frac{\nu}{a^2} \frac{A_2^*}{b} Y - K_{Ryl} \Theta &= 0 \\ \frac{1}{b} \frac{dY}{d\eta} + (\frac{1-\nu}{2} B_4^* - S_D^* B_2^*) \Theta &= 0 \end{aligned}$$

$$- K_{Ly1} \alpha^2 \frac{B_2^*}{b} Y = 0 \quad \text{along } \eta = 0 \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Theta}{d\eta} + \frac{\nu}{\alpha^2} \frac{A_2^*}{b} Y + K_{Ry2} \Theta &= 0 \\ \frac{1}{b} \frac{dY}{d\eta} + \left(\frac{1-\nu}{2} B_4^* - S_D^2 B_2^* \right) \Theta \\ + K_{Ly2} \alpha^2 \frac{B_2^*}{b} Y &= 0 \quad \text{along } \eta = 1 \quad (24) \end{aligned}$$

여기서

$$\begin{aligned} \beta_1^* &= \frac{\Omega^{*2}}{\alpha^2} - \frac{S_D^2}{\alpha^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{1}{\alpha^2} (A_1^* - G_{11}^* + G_{10}^*) \\ \gamma_1^* &= \frac{1+\nu}{2} \frac{1}{\alpha^2} A_2^* + \frac{S_D^2}{\alpha^2} - \frac{1-\nu}{2} \frac{1}{\alpha^2} (G_{21}^* - G_{20}^*) \\ \beta_2^* &= \frac{\Omega^{*2}}{\alpha^2} \left(B_1^* + 12 \left(\frac{a}{h} \right)^2 B_2^* \right) + \frac{S_D^2}{\alpha^2} (B_4^* - B_1^* + B_5^* \\ &\quad - B_6^* - H_{21}^* + H_{20}^* + H_{31}^* - H_{30}^*) + \frac{1}{\alpha^2} (B_3^* - H_{11}^* \\ &\quad + H_{10}^* - K_{Lx1} T_0^* - K_{Lx2} T_1^* - K_{Rx1} S_0^* - K_{Rx2} S_1^*) \\ \gamma_2^* &= \frac{1+\nu}{2} B_4^* - S_D^2 B_2^* - \nu (H_{31}^* - H_{30}^*) \quad (25) \end{aligned}$$

(25)에서 Ω^{*2} 는 무차원 진동수파라미터로서

$$\Omega^{*2} = \frac{\rho a^2 h^3 \omega^2}{12D} \quad (26)$$

이고, (23), (24) 및 (25)에서 상첨자 * 를 가진 상수들은 (18)에서 $Y(\eta)$ 및 $\Theta(\eta)$ 대신 $X(\xi)$ 및 $\Phi(\xi)$, η 대신 ξ , b 대신 a , B^* 의 표현에서 S_D^2/a^2 대신 S_D^2 을 대치한 결과이다.

(22)의 일반해와 경계조건식 (23), (24)로 부터 무차원 진동수파라미터 Ω_i^* , 및 해당 고유함수 $Y(\eta)$ 및 $\Theta(\eta)$ 가 구해진다.

결과적으로 상기에서 구한 ξ 방향과 η 방향에서 구해진 고유함수로 구성되는 Mindlin판 특성함수가 (6)에 의해 얻어진다.

2.2 직교이방성 후판

직교이방성 후판의 변형에너지 V 와 운동에너지 T 는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2a} \left[\int_0^1 \int_0^1 \left\{ D_x \left(\frac{\partial \psi_\xi}{\partial \xi} \right)^2 + \alpha^2 D_y \left(\frac{\partial \psi_\eta}{\partial \eta} \right)^2 \right. \right. \\ &\quad + \alpha (\nu_y D_x + \nu_x D_y) \frac{\partial \psi_\xi}{\partial \xi} \frac{\partial \psi_\eta}{\partial \eta} + D_{xy} \left(\alpha \frac{\partial \psi_\xi}{\partial \eta} + \frac{\partial \psi_\eta}{\partial \xi} \right)^2 \\ &\quad + \frac{S_{Dx} D_x}{a^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} - a \psi_\xi \right)^2 + \alpha^2 \frac{S_{Dy} D_y}{b^2} \\ &\quad \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial \eta} - b \psi_\eta \right)^2 \Big] d\xi d\eta + \alpha^2 D_y \int_0^1 \left(\frac{K_{Ly1}}{b^2} [w|_{\eta=0}]^2 \right. \\ &\quad + \frac{K_{Ly2}}{b^2} [w|_{\eta=1}]^2 + K_{Ry1} [\psi_\eta|_{\eta=0}]^2 \\ &\quad + K_{Ry2} [\psi_\eta|_{\eta=1}]^2 \Big) d\xi + D_x \int_0^1 \left(\frac{K_{Lx1}}{a^2} [w|_{\xi=0}]^2 \right. \\ &\quad + \frac{K_{Lx2}}{a^2} [w|_{\xi=1}]^2 + K_{Rx1} [\psi_\xi|_{\xi=0}]^2 \\ &\quad \left. + K_{Rx2} [\psi_\xi|_{\xi=1}]^2 \right) d\eta \quad (27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{\rho ab}{2} \int_0^1 \int_0^1 \left\{ \frac{h^3}{12} \left(\frac{\partial \psi_\xi}{\partial t} \right)^2 + \frac{h^3}{12} \left(\frac{\partial \psi_\eta}{\partial t} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + h \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right\} d\xi d\eta \quad (28) \end{aligned}$$

여기서

$$\begin{aligned} D_x &= \frac{E_x h^3}{12(1-\nu_x \nu_y)}, \quad D_y = \frac{E_y h^3}{12(1-\nu_x \nu_y)}, \\ D_{xy} &= \frac{G_{xy} h^3}{12}, \quad S_{Dx} = \frac{K_x h G_{xz} a^2}{D_x}, \\ S_{Dy} &= \frac{K_y h G_{yz} b^2}{D_y}, \quad K_{Rx1} = \frac{k_{Rx1} a}{D_x}, \\ K_{Rx2} &= \frac{k_{Rx2} a}{D_x}, \quad K_{Ry1} = \frac{k_{Ry1} b}{D_y}, \\ K_{Ry2} &= \frac{k_{Ry2} b}{D_y}, \quad K_{Lx1} = \frac{k_{Lx1} a^3}{D_x}, \\ K_{Lx2} &= \frac{k_{Lx2} a^3}{D_x}, \quad K_{Ly1} = \frac{k_{Ly1} b^3}{D_y}, \\ K_{Ly2} &= \frac{k_{Ly2} b^3}{D_y} \quad (29) \end{aligned}$$

(29)에서 E_x , E_y 및 ν_x , ν_y 는 각각 x , y 방향의 인장탄성계수 및 Poisson비, G_{xy} , G_{yz} 및 G_{xz} 는 차례로 xy , yz 및 xz 면의 전단탄성계수, K_x 및 K_y 는 x 및 y 방향의 전단수정계수, h 는 판두께이다.

직교이방성후판에 대한 Mindlin판 특성함수 도출과정은 등방성 후판의 경우에 준한다.

3. 진동해석

고유진동해석

4변이 병진 및 회전에 대해 탄성구속된 직사각형 등방성후판 및 직교이방성후판에 대하여 반복적 Kantorovich 방법에 의거한 고유진동해석 과정은 다음과 같다.

(m, n) 진동형에 대한 고유진동수와 진동파형을 얻기 위해서는 우선 η 방향의 진동파형가정함수로써 판의 경계조건과 동일한 경계조건을 갖는 Timoshenko 보합수의 n 차 진동형 $Y_n^{(0)}(\eta)$, $\Theta_n^{(0)}(\eta)$ 를 가정한다. 이로부터 얻어지는 ξ 방향의 연립상미분방정식과 경계조건식을 만족하는 근 $\Omega_{mn}^{(1)}$ 및 이에 해당하는 진동파형 $X_m^{(1)}(\xi)$, $\Phi_m^{(1)}(\xi)$ 를 (13), (14), (15)로부터 얻을 수 있다. 이렇게 구한 ξ 방향의 진동파형 $X_m^{(1)}(\xi)$, $\Phi_m^{(1)}(\xi)$ 을 그 방향의 진동파형가정함수로 사용하고 유사한 과정을 거치면 η 방향에서의 근 $\Omega_{mn}^{*(1)}$ 및 이에 해당하는 진동파형 $Y_n^{(1)}(\eta)^{(1)}$, $\Theta_n^{(1)}(\eta)^{(1)}$ 를 얻을 수 있다. 이런 과정을 첫번째 과정에서 구한 근의 차를 비교한다. 즉

$$|\Omega_{mn}^{(1)} - \Omega_{mn}^{*(1)}| < \varepsilon \quad (30)$$

여기서 ε 는 상대적 차의 수렴기준이다. (30)이 만족되면 $\Omega_{mn}^{(1)}$ 또는 $\Omega_{mn}^{*(1)}$ 가 (m, n) 진동형의 고유진동수파라미터이고, 이에 해당하는 진동파형은 $X_m^{(1)}(\xi)$, $\Phi_m^{(1)}(\xi)$, $Y_n^{(1)}(\eta)$, $\Theta_n^{(1)}(\eta)$ 를 사용하여 (6)에 의해 얻을 수 있다. 만약 (30)이 만족되지 않으면 $Y_n^{(1)}(\eta)$, $\Theta_n^{(1)}(\eta)$ 로 시작되는 두번째 반복과정을 실행한다. 이런 과정은 (30)이 만족될 때 까지 반복된다.

충격하중에 대한 응답

판에 횡방향 하중 $q(\xi, \eta, t)$ 가 작용될 때 응답

은 전개정리에 의해 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} w(\xi, \eta, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} p_{mn}(t) \\ \psi_{\xi}(\xi, \eta, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\Psi_{\xi})_{mn} p_{mn}(t) \\ \psi_{\eta}(\xi, \eta, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\Psi_{\eta})_{mn} p_{mn}(t) \end{aligned} \quad (31)$$

여기서 W_{mn} , $(\Psi_{\xi})_{mn}$ 및 $(\Psi_{\eta})_{mn}$ 은 각기 (m, n) 진동형의 진동파형이고, $p_{mn}(t)$ 는 주좌표계이다.

댐핑이 없다고 가정하고 초기조건이 영이면 $p_{mn}(t)$ 는 임펄스응답을 이용한 콘볼루션적분을 원용하여 다음과 같이 산정된다.

$$p_{mn}(t) = \frac{1}{\omega_{mn}} \int_0^t N_{mn}(\tau) \sin \omega_{mn}(t - \tau) d\tau \quad (32)$$

여기서

$$N_{mn}(t) = \frac{ab}{a_{mn}} \int_0^1 \int_0^1 W_{mn}(\xi, \eta) q(\xi, \eta, t) d\xi d\eta$$

이고, ω_{mn} 은 (m, n) 진동형의 고유원진동수, a_{mn} 은 모드질량으로서 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} a_{mn} = ab \int_0^1 \int_0^1 \left\{ \rho h W_{mn}^2 + \frac{\rho h^3}{12} (\Psi_{\xi})_{mn}^2 \right. \\ \left. + \frac{\rho h^3}{12} (\Psi_{\eta})_{mn}^2 \right\} d\xi d\eta \end{aligned} \quad (33)$$

4. 수치계산에

반복적 Kantorovich 방법을 원용하여 도출된 Mindlin판 특성함수를 이용한 진동해석의 정확도, 계산효율 등 유용성을 검증하기 위하여 고유진동해석 및 충격에 대한 응답해석에 관한 일련의 수치계산을 수행하였다.

고유진동해석

한변의 길이가 a 이고, 두께/길이 비 $h/a = 0.1$ 인 정사각형 등방성후판을 택하였다. 고전적 경계조건으로서 Fig.1-(b)에 보인 경계조건의 특수한 경우로서 4변 단순지지 SSSS 4변고정 CCCC, 인접한 두변은 고정, 나머지 두변은 자유

인 CCFE 및 회전탄성지지 ($K_L's = \infty$, $K_R's = 10$)에 대해 저차 6 개의 mode에 대하여 고유진동수 파라미터 $\omega \sqrt{2(1+\nu)\rho a^2}/E$ 및 절선양태를 Table 1 에 나타내었다. 동 표에는 비교목적으로 진동수파라미터 및 절선양태에 대해서 SSSS인 경우는 엄밀해, 그 밖의 경계조건에 대해서는 Rayleigh-Ritz 방법 및 유한요소해석의 결과도 함께 나타내었다. 수치계산에 있어서 상대적 차의 수렴기준 ϵ 은 1×10^{-5} 으로 택하였고, 전단수정계수 K 에 대해서는 Dawe등[2] 및 Chung등[6]이 채택한 것과 같이 SSSS 때 $\pi^2/12$, CCCC 때 0.8601, CCFE 및 $K_L = \infty$ & $K_R = 10$ 일 때 5/6를 취했고 Poisson비 $\nu = 0.3$ 으로 취하였다.

Table 1 Frequency parameters, $\omega \sqrt{\frac{2(1+\nu)\rho a^2}{E}}$, and nodal patterns of isotropic thick square plate : $\frac{h}{a} = 0.1$

(a) SSSS

Method		Order						
		1	2	3	4	5	6	
Present work	No. of iteration ¹⁾	1	0.9335	2.2245	2.2349	3.4403	4.1539	4.1793
		2	0.9300	2.2176	2.2176	3.4018	4.1440	4.1440
Mindlin solution			0.9300	2.2176	2.2176	3.4018	4.1440	4.1440

Order	1	2	3	4	5	6
Mindlin sol. & present work						

1) Relative difference convergence criterion is 1×10^{-5} .
 2) (m, n) indicates half wave number in the ξ - and the η -direction.

(b) CCCC

Method		Order						CPU time [sec] ⁵⁾
		1	2	3	4	5	6	
Present work	No. of iteration	1	1.6057	3.0592	3.0782	4.3301	5.0570	5.1099
		2	1.5987	3.0491	3.0491	4.2838	5.0580	5.0580
Rayleigh-Ritz ⁴⁾			1.5931	3.0409	3.0464	4.2851	5.0258	5.0771
F E M ³⁾			1.5977	3.0661	3.0661	4.3113	5.0916	5.1354

Method		Order					
		1	2	3	4	5	6
Present work							
		(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)	(1,3)	(3,1)
Rayleigh-Ritz & F E M							
						(1,3)-(3,1)	(1,3)+(3,1)

- 3) Using Timoshenko beam function up to the 5th order in each direction.
- 4) ANSYS(Ver 5.0) : 10×10 , total elements, SHELL93(8-node shell element).
- 5) IBM PC 486

(c) CCFE

Method		Order						CPU time [sec]
		1	2	3	4	5	6	
Present work	No. of iteration	0.3425	1.1848	1.2154	2.1441	2.7984	2.8192	2.8
		0.3340	1.1670	1.1670	2.1079	2.7663	2.7663	
Rayleigh-Ritz		0.3249	1.1468	1.1606	2.0937	2.7291	2.7863	24.6
F E M		0.3260	1.0877	1.2149	2.0707	2.7187	2.8433	-

Method		Order					
		1	2	3	4	5	6
Present work							
		(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)	(1,3)	(3,1)
Rayleigh-Ritz							
						(1,3)-(3,1)	(1,3)+(3,1)
F E M							
			(1,2)-(2,1)	(1,2)+(2,1)		(1,3)-(3,1)	(1,3)+(3,1)

(d) $K_L = \infty$ & $K_R = 10$

Method		Order						CPU time [sec]
		1	2	3	4	5	6	
Present work	No. of iteration	1	1.3126	2.6277	2.6427	3.8054	4.5520	4.5691
		2	1.3046	2.6194	2.6194	3.7920	4.5272	4.5272
Rayleigh-Ritz			1.3029	2.6164	2.6186	3.7920	4.5171	4.5325
F E M ³⁾			1.3067	2.6487	2.6487	3.8536	4.6121	4.6234

Method		Order					
		1	2	3	4	5	6
Present work							
		(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)	(1,3)	(3,1)
Rayleigh-Ritz							
						(1,3)-(3,1)	(1,3)+(3,1)
F E M ³⁾							
			(1,2)-(2,1)	(1,2)+(2,1)		(1,3)-(3,1)	(1,3)+(3,1)

반복적 Kantorovich 방법을 원용한 진동해석방법의 직교이방성후판에 대한 유용성 검증을 위하여 Srinivas등[7]이 3-D 탄성론으로 해석한 바 있는 4변 단순지지 정사각형 직교이방성후판에 대한 결과를 Table 2에 보였다.

Table 2 Comparison of natural frequencies, $\omega h \sqrt{\rho/c_{11}}$, of a simply supported orthotropic plate : $h/a=0.1$, $c_{11} = 23.2 \times 10^6$ lbf/in²

Method \ Mode	Present work		Based on 3-D elasticity theory [7]
	No. of iteration		
	1	2	
(1,1)	0.0476	0.0474	0.0474
(1,2)	0.1040	0.1032	0.1033
(2,1)	0.1187	0.1187	0.1188
(2,2)	0.1704	0.1692	0.1694
(1,3)	0.1909	0.1884	0.1888
(3,1)	0.2177	0.2177	0.2180
(2,3)	0.2521	0.2469	0.2475
(3,2)	0.2630	0.2619	0.2624
(1,4)	0.3002	0.2959	0.2969
(4,1)	0.3311	0.3311	0.3319
(3,3)	0.3364	0.3310	0.3320
(2,4)	0.3566	0.3463	0.3476
(4,2)	0.3703	0.3695	0.3701

$E_x = 20.83 \times 10^6$ lbf/in², $E_y = 10.94 \times 10^6$ lbf/in²
 $G_{xy} = 6.10 \times 10^6$ lbf/in², $G_{xz} = 3.71 \times 10^6$ lbf/in²
 $G_{yz} = 6.19 \times 10^6$ lbf/in², $\nu_x = 0.44$, $\nu_y = 0.23$
 $K_x = K_y = 5/6$, $\epsilon = 1 \times 10^{-9}$,
 $c_{11} = 23.2 \times 10^6$ lbf/in²

충격하중에 대한 응답

Mindlin판 특성함수에 기초한 모드해석방법을 이용하여 등방성후판에 대한 충격응답을 구했다. 계산에 사용된 판의 특성은 한변의 길이가 1.60 m, 두께 0.08 m, $E=210$ GPa, $\nu=0.3$, $\rho=7850$ kg/m³, $K=5/6$ 인 정사각형판이다. 충격하중은 다음과 같은 사각펄스를 택했다.

$$F(t) = \begin{cases} F_0, & 0 \leq t < T_a \\ 0, & t \geq T_d \end{cases} \quad (44)$$

Fig.2는 $F_0 = 100$ kN 인 충격하중이 판의 중

양에 작용할 때 작용점에서의 응답스펙트럼을 구

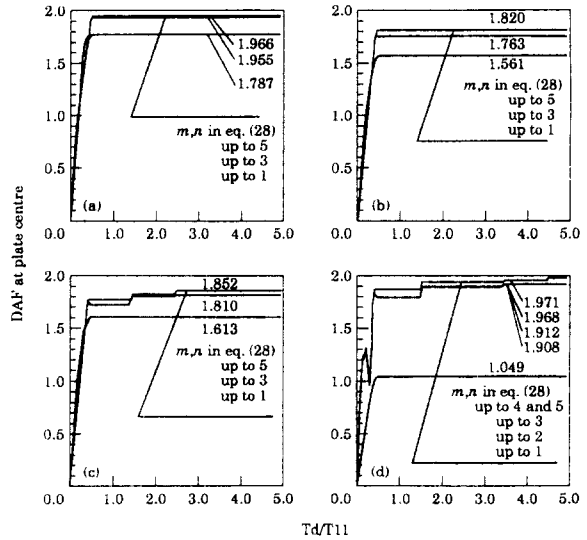


Fig.2 Shock response spectra at the shock application point, the plate center : (a)SSSS. (b)CCCC. (c) $K_L = \infty, K_R = 10$ (d)CCFF.

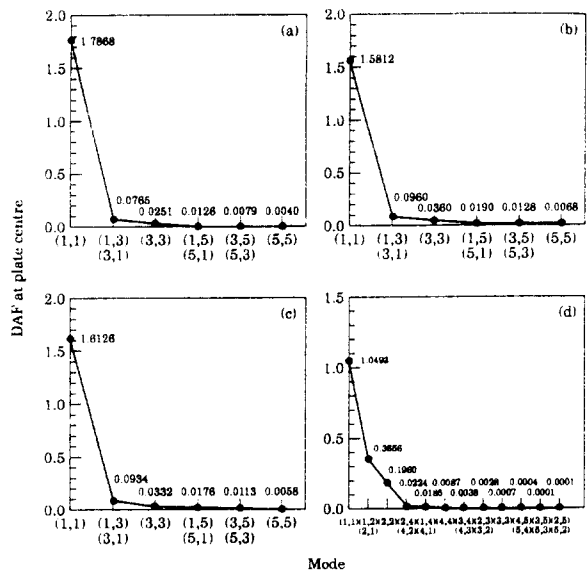


Fig.3 Modal contributions to DAF at the shock application point, the plate center:(a)-(d) as Fig. 2

했으며, 동적증폭율(dynamic amplification factor ; DAF)을 구하기 위한 정적처짐으로서는 SSSS때 0.3039mm, CCCC때 0.160mm, $K_L = \infty$ & $K_R = 10$ 때 0.2016mm, CCFE 때 0.3513mm이다. 이 값은 SSSS인 경우는 엄밀해, 그 밖의 경우는 유한요소해석(ANSYS)에 의한 계산결과가 사용되었다.

Fig.2에서 T_{11} 은 판의 기본고유주기, T_a 는 충격이 가해진 시간, (m, n) 은 모드지수이다. 참고로 사각펄스가 가해졌을 때 각 진동형의 판 중앙 DAF에 대한 기여도를 Fig.3에 보였다.

5. 고찰 및 결론

반복적 Kantorovich방법의 결과는 대체로 2회 반복 계산했을 때 상대적 차의 수렴기준을 만족한다. SSSS인 경우는 Mindlin의 엄밀해와 정확히 일치하고 그 밖의 경계조건에 대해서도 다른 근사 방법과 거의 일치함을 알 수 있다. 계산시간도 Rayleigh-Ritz방법과 비교해서 CCCC때 1/3, CCFE 때 1/9, $K_L = \infty$ & $K_R = 10$ 때 1/5 정도 가 소요된다.

Table 1-(b),(c) 및 (d)에서 보는 바와 같이 고유치로서 중근이 존재하는 경우에 상대적 차의 수렴기준 $\epsilon = 1 \times 10^{-5}$ 범위 안에서 고유진동수와 라메타가 정확히 일치하는데 유한요소해석 및 Rayleigh-Ritz방법의 경우는 약간 다른 값을 주기도 한다. 진동과형에 있어서도 중근이 존재하는 경우에 반복적 Kantorovich 방법은 x - 또는 y -축에 평행한 절선양태를 보이지만 다른 방법은 이들의 합성과형을 보인다.

직교이방성후판에 대한 계산결과는 2회 반복계산했을 때 $\epsilon = 1 \times 10^{-5}$ 이 만족되었고 Srinivas 등의 계산결과와의 부합성이 매우 양호하다.

Fig.2에 보인 바와 같이 $(m, n)=(5,5)$ 까지 취했을 때 DAF는 충분히 수렴되었으며, 특히 $K_L = \infty$ & $K_R = 10$ 및 CCFE에서는 각 모드 기여도의 위상차에 의한 영향이 잘 나타나 있다. Fig.3으로부터 각 진동형의 판중앙 DAF에 대한

기여도에 있어서 각각의 진동형은 1 자유도계와 같은 경향을 가지지만 이 중에서 지배적인 것은 기본고유진동형이며 그 이외의 진동형은 고차로 갈수록 상대적인 기여도가 현저하게 감소함을 알 수 있다.

결과적으로 Mindlin판 특성함수에 기초하여 등방성후판 및 직교이방성후판에 대하여 반복적 Kantorovich방법에 의해 고유해를 구하는 방법은 정확도 및 계산효율면에서 종래의 다른 근사해법보다 그 우월성이 인정되며, 특히 중복고유치를 갖는 경우 명확한 고유치 및 고유모드를 얻을 수 있다. 또 모드해석방법에 의한 동적응답계산에 있어서도 보다 더 정확한 결과를 얻을 수 있다.

참고 문헌

- [1] Dawe, D.J., "Finite Strip Models for Vibration of Mindlin Plates", Journal of Sound and Vibration, Vol.59, No.3, 1978.
- [2] Dawe, D.J. and Roufaeil, O.L., "Rayleigh-Ritz Vibration Analysis of Mindlin Plates", Journal of Sound and Vibration, Vol.69, No.3, 1980.
- [3] Aksu, G. and Al-Kaabi, S.A., "Free Vibration Analysis of Mindlin Plates with Linearly Varying Thickness", Journal of Sound and Vibration, Vol.119, No.2, 1987.
- [4] Al-Kaabi, S.A. and Aksu, G., "Free Vibration Analysis of Mindlin Plates with Parabolically Varying Thickness", Computers & Structures, Vol.34, No.4, 1990.
- [5] Mizusawa, T., "Vibration of Rectangular Mindlin Plates by the Spline Strip Method", Journal of Sound and Vibration, Vol.163, No.2, 1993.
- [6] Chung, J.H., Chung, T.Y. and Kim, K.C., "Vibration Analysis of Orthotropic Mindlin Plates with Edges Elastically Restrained against Rotation", Journal of Sound and Vibration, Vol.163, No.1, 1993.
- [7] Srinivas, S. and Rao, A.K., "Bending, Vibration and Buckling of Simply Supported Thick Orthotropic Rectangular Plates and Laminates", International Journal of Solids

- and Structures, Vol.6, 1970.
- [8] Bhat, R.B. and Mundkur, G., "Vibration of Plates Using Plate Characteristic Functions Obtained by Reduction of Partial Differential Equation", Journal of Sound and Vibration, Vol.161, No.1, 1993.
- [9] Bhat, R.B., Singh, J. and Mundkur, G., "Plate Characteristic Functions and Natural Frequencies of Vibration of Plates by Iterative Reduction of Partial Differential Equation", Journal of Vibration and Acoustics, ASME, Vol.115, 1993.
- [10] Kantorovich, L.V. and Krylov, V.I., Approximate Methods of Higher Analysis, P. Noordhoff Ltd, Groningen, Netherlands, 1964.
- [11] Chung, J.H., Joo, W.H. and Kim, K.C., "Vibration and Dynamic Sensitivity Analysis of a Timoshenko Beam-Column with Elastically Restrained Ends and Intermediate Constraints", Journal of Sound and Vibration, Vol.167, No.2, 1993.
- [12] 이종문, Mindlin판 특성함수를 이용한 직사각형 후판 및 복합재료적층판의 진동해석, 서울대학교 대학원 박사학위 논문, 1995.