Historia Mathematica Vol. 9, No. 2 (1996), 30 -42.

集合論의 無矛盾性

여 운 도 , 황 동 주(명지대 대학원)

요 약

최근 <수학기초론>이란 용어는 Burali-Forti paradox 이후 족(class)과 집합(set) 개념을 이해하려는 시도에서 출발한 20세기적 문제에 적용되고 있다.

이 글에서는 그 해결책으로 제시된 주의•주장 중 논리적인 모순을 해결하기 위한 Russel의 논리주의적 공리론에 바탕을 두고 살펴보려고 한다.

제 2장에서는 무한의 심연 속에 웅크리고 있는 집합론에서의 역설과 발생 원인에 대하여 살펴보았다.

제 3장에서는 공리론적 집합론 중에서 러셀의 유형론과 그것을 단순화시킨 현대의 유형론을 살펴보고, ZF 집합론과 ZF 집합론의 연장인 처치 집합론의 기본 공리를 살펴보았다.

I. 序論

19세기적 의미의 수학기초론은 수학적 대상물 및 아이디어의 구조와 공리정의적 성질의 연구하는 것을 뜻한다. 그러나 최근 <수학기초론>이란 용어는 Burali-Forti paradox 이후 족(class)과 집합(set) 개념을 이해하려는 시도에서 출발한 20세기적 문제에 적용되고 있다.

이 글에서는 그 해결책으로 제시된 주의•주장 중 논리적인 모순을 해결하기 위한 Russel의 논리주의적 공리론에 바탕을 두고 살펴보려고 한다. 공리적 집합론은 ZF 집합론 이외에도 여러 가지가 있을 수 있으나, 적어도 다음 조건만은 모두 갖추고 있을 필요가 있다. 첫째, 소박집합론 속에서 발견되는 모순과 같은 모순을 낳지 않는다. 둘째, 수학에서 사용되고 있는 모든 개념을 정의하는 데 충분하다. 셋째, 지금까지 알려진 수학상의 모든 정리를 그 체계 내에서 증명할 수 있다. 이 세 가지 조건을 만족하는 공리체계 중에서도 다음 것들은 특히 유명하다. (i) 러셀의 유형론(Type Theory), (ii) ZF(또는 ZFS) 공리계, (iii)

폰 노이만이 제안한 베르나이스(P.Bernays, 1888-1977), 괴델 등이 보안한 NBG 공리계(간단히 'BG 공리계'라고도 한다)와 (iv)콰인(W. V. O. Quine, 1908-)의 NF및 이것을 발전시킨 ML공리계가 있다([4], p.418).

이 글에서는 위의 네 가지 이론 중에서 러셀의 유형론(Type Theory)에서는 러셀의 유형론 과 현대의 유형론 그리고 일반 변수를 가진 유형론으로 살펴보고, 또 체르멜로 ZF(또는 ZFS) 공리계와 ZF의 모델의 연장에 관하여 살펴보겠다.

II. 집합론에서의 역설과 발생원인

1. Paradox

Paradox라는 말이 쓰이는 경우는 보통 다음과 같이 3가지 의미로 나누어 볼 수 있다. 첫째는 언 듯 보기에는 불가능하거나 또 는 혹 은 자기 모순인 것처럼 보이면서도 실제로는 그 것이 참일 경우, 보통 사전적인 의미의 "paradox"라는 말을 사용한다. 둘째로 완벽하게 옳은 추론이라고 생각되어지는 논의가 실제로는 잘못된 결론을 이끌어 내는 경우이다. 셋째로 완전하게 옳다고 추론되어지는 어떤 사실이 참이 아니면 안된다는 결론과 동시에 또 그 것은 거짓이 아니면 안된다는 결론이 이끌어 내지는 경우이다. 이러한 경우를 이율배반(antinomy)이라는 이름이 붙어 있는 paradox이다([8], p.10).

예를 들면 첫 번째는 Cantor의 이론에 따라「자연수와 정수는 같은 개수만큼 있다.」라는 것을 paradox라고 부르는 것이 바로 이 의미로 쓰인 것이다. 두 번째의 예는 유명한 Zeron의 paradox에서는 옳은 논의라고 보여지면서도 세상의 모든 물건은 움직일 수 없다고 하는 어리석은 결론을 이끌어 내고 있다. 세 번째의 예로는 잘 알려진 Epimenides의 paradox가 있다([2], p.402).

2. 역설이 발견된 역사적 배경

집합이 수학의 이론으로서 하나의 독립적인 연구 대상이 된 것은 칸토르(G. Cantor, 1845-1918)가 '무한' 개념을 사용한 집합론을 발표하면서부터이다.

그는 유한집합에서 사용하는 1대1 대응의 개념을 무한집합에 자연스럽게 적용시켰으나, 칸토르의 집합론은 칸토르가 모든 집합들의 집합과 모든 순서수의 집합에 수를 대응시키다가 발견한 모순에 대하여 수학자들은 잘 확립되어 있다고 믿었던 오래된 수학에서도 이와 비슷한 개념을 사용하고 있었다는 사실을 인식하게 되었다. 따라서, 이러한 모순들을 해결할 수 있으리라는 생각에서 파라독스(paradox)라 부르게 되었다.

3. 집합론에서의 역설

러셀은 여러 가지의 논리적 모순을 지적하고 있으며, 1908년의 논문 Mathematical Logic as based on the Theory of Types 중에서 먼저 7종의 모순을 매거하고 있다. 즉 에피메니데스(Epimenides)의 거짓말쟁이론, 리챠드(Richard)의 역설, Burali-Forti의 역설, 러셀

의 집합의 역설 등등이다. 그러나 람제이(F. P. Ramsey)에 의하여 이 7종의 모순 또는 역설은 2종으로 대별할 수 있다. 그 제1의 종류는 에피메니데스(Epimenides)의 역설이고, 제2의 종류는 러셀의 집합의 역설이다. 러셀은 제1종, 제2종의 2개의 역리를 같은 구조의 것으로 보고 있다. 그러나 이들 역설을 해결하기 위하여 유형론을 세울 때, 제2종 역설은 유형(Type)의 개념을 쓰고 제1종의 역설은 차원(order)의 개념을 쓰고 있다([5], p.149).

이곳에서는 무한의 심연 속에 웅크리고 있는 (i)모든 집합의 집합 (Cantor의 파라독스) (ii)모든 순서수의 집합(Burali-Forti의 역설) (iii)모든 농도의 집합 (iv)Russell의 역설 등을 살펴보자.

3.1 모든 집합의 집합(Cantor의 파라독스)

S를 모든 집합의 집합이라 하자. 그러면 S의 모든 부분집합은 집합 S의 원소이다.

따라서 S의 멱집합 $P(S) = 2^S$은 S의 부분집합이다. 즉, $2^S \subset S$. 그러므로 $\overline{\overline{2^S}} \leq \overline{\overline{S}}$.

그러나 임의의 집합의 농도는 그 멱집합의 농도보다 작기 때문에 $\overline{\overline{S}} \leq \overline{\overline{2^S}}$ 이다. 따라서 위의 모든 집합들의 집합의 개념은 모순을 유도한다. 이 Cantor의 이율배반은 '모든 집합의 집합'이라는 개념 속에 모순이 내재되어 있기 때문에 생긴 것이다([7], p.385).

3.2 모든 순서수의 집합(Burali-Forti의 역설)

모든 순서수(ordinal number)의 집합을 W($W = \{0, 1, 2, \cdots, w, \cdots\}$)라 하면, W도 하나의 정렬집합(well-ordered set)이다. W의 순서수를 α라 하면 W의 원(元)인 순서수는 s보다 작다. 그런데 W는 모든 순서수의 집합이었으므로 순서수 α도 또한 W의 원(元)이다. 따라서 $\alpha < \alpha$ 이므로 이것은 모순이다. 이것은 W라고 하는 '전체자'가 자기 안에 모순을 품고 있는 개념임을 보여주고 있는 것이다.

3.3 모든 농도의 집합

S를 모든 농도의 집합이라고 하자. 그러면 S의 원소인 각 농도 α에 대하여 $\alpha = \overline{\overline{A_\alpha}}$인 A_α집합 가 존재한다. 이러한 집합 전체의 합집합을 A, 즉 $A = \bigcup_\alpha A_\alpha$로 놓으면, A의 부분집합 중에는 $2^A \sim A_{\overline{\overline{2^A}}}$인 $\overline{\overline{2^A}}$ 가 존재한다. 따라서 $2^A \subset A$이므로 $\overline{\overline{2^A}} \leqq \overline{\overline{A}}$ 이다.

한편 $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{2^A}}$ 이다. 이는 서로 모순이므로 '모든 농도의 집합'이라는 명제 자체가 모순임을 알 수 있다([7], p.386).

3.4 Russell의 역설

$x \notin x$라는 성질을 갖는 집합 x 전체로 된 집합 R

$R = \{x \mid x \notin x\}$ ……… (1)

이란, 임의의 집합 x에 대해서 다음 관계

$x \in R \Leftrightarrow x \notin x$ ……… (2)

를 만족하는 집합 R을 말한다. 따라서 $x = R$일 때에도 (2)는 성립해야 한다(R도 하나의 집합임에 틀림없기 때문에 !). 즉,

$R \in R \Leftrightarrow R \notin R$ ……… (3)

그러나, $R \in R$가 '참'이라 하여도, '거짓'이라 하여도 (3)은 성립하지 않는다. 이것은 모순이다([7], p.391).

III. 집합론의 공리계의 무모순성

공리적 집합론은 ZF 집합론 이외에도 여러 가지가 있을 수 있으나, 적어도 다음 조건만은 모두 갖추고 있을 필요가 있다.

첫째, 소박집합론 속에서 발견되는 모순과 같은 모순을 낳지 않는다.

둘째, 수학에서 사용되고 있는 모든 개념을 정의하는 데 충분하다.

셋째, 지금까지 알려진 수학상의 모든 정리를 그 체계 내에서 증명할 수 있다.

이 세 가지 조건을 만족하는 공리체계 중에서도 다음 것들은 특히 유명하다.

(i) 러셀의 유형론(Type Theory).

(ii) ZF(또는 ZFS) 공리계.

(iii) 폰 노이만이 제안한 베르나이스(P.Bernays, 1888-1977), 괴델 등이 보안한 NBG 공리계(간단히 'BG 공리계'라고도 한다).

(iv) 콰인(W. V. O. Quine, 1908-)의 NF및 이것을 발전시킨 ML공리계.

그러나 보통 공리적 집합론이라고 할 때 주로 ZF 집합론과 NBG 집합론의 둘을 꼽는다. 이 두 공리계의 큰 장점은 뭐니뭐니 해도 '소박집합론'에서의 파라독스가 나타나지 않는다는 점이지만, 특히 ZF 공리계로부터는 '형식적'으로 칸토르의 직관적인 이론에 아주 가까운 결과가 이끌린다는 사실을 들 수 있다. 반면에 이 공리계(=ZF 공리계)는 집합의 개념에 대해 '임의'로 제한을 가한다는 약점이 있다. 이 약점을 보안하여 집합론의 폭을 넓혔다는 점에서 NBG 집합론 쪽이 더 앞서 있다([7], p.418).

1. 러셀의 유형론

먼저 집합론에 파라독스가 생기는 이유를 꺼내기 위해서는 이 '러셀의 파라독스'를 분석하는 일부터 시작하자. 위의 (1)에서 정의한 R가 어떤 것인가에 대해 생각해 보자.

(1)에 의하면, R는 조건 $x \notin x$를 만족하는 집합 x 전체로 된 집합, 즉 각 집합 x 에 관해서 $x \in x$ 또는 $x \notin x$ 인가를 낱낱이 살피고 나서 그 중에서 조건 $x \notin x$를 만족하는 x를 모두 골라내어 만든 것이 집합 R이다. 따라서 집합 R를 정하기 위해서는 그에 앞서 '모든 집합' x에 대해서 $x \in x$ 또는 $x \notin x$ 의 체크 과정을 거쳐야 한다. 이렇게 따지면, 집합 R 를 '모든 집합'의 일원으로 간주해서는 안된다는 결론에 도달하게 된다. '러셀의 파라독스'는 이 사실을 시사하고 있는 것이다([7], p.391).

그러나, R라는 집합을 '모든 집합' 속에 포함시키지 않는다는 것도 이상하다. 이에 관해서는 여러 가지 견해가 제시되어 있으나, 그 중에서도 다음의 네 가지가 가장 잘 알려지고 있다.

① 집합은 '만들어지는 것'이지, 처음부터 존재하는 것이 아니다.

② 집합은 그 '원소의 종류'에 따라서 여러 가지 계층으로 나누어 생각해야 한다.

③ 집합은 그것을 결정하는 '조건의 종류'에 따라서 여러 가지 계층으로 나누어 생각해야 한다.

④ 집합은 임의의 조건에 의해서 결정되는 것이 아니며, 집합을 결정하는 조건에는 어떤 제약이 필요하다([7], p.391).

러셀 자신은 ②의 입장에 따르고 있다. 그는 집합론의 파라독스가 모두 '순환논법에 관한 원칙'이라고 그가 이름 붙인 다음 규칙에 어긋나는 공통적인 이유를 지닌다고 보았다. 『어떤 집합이 있을 때, 그 집합을 씀으로써 정의될 수 있는 원소까지도 그 집합에 포함시킨 '모임'을 집합이라고 불러서는 안된다.』 이 원칙에 따르면, 모든 집합을 포함하는 '것'은 이들 집합 중의 하나로 간주해서는 안된다는 이야기가 된다. 즉, '모든 집합의 집합',이라는 표현은 사용할 수 없기 때문에 '칸토르의 파라독스'는 자동적으로 파라독스로서의 이유를 상실한다. 러셀의 파라독스는 그 자신의 원소가 아닌($x \notin x$) 모든 집합의 집합을 정의하려다가 정의하려는 바로 그 집합을 포함하는 '집합'에 언급하고 있기 때문에 이것도 '원칙'에 위배된다. 요컨대, 정의될 집합을 포함하는 집합의 개념을 쓴다는 자기언급(self-reference)적 -즉, 진술되어 있는 명제 자신에 대해 언급하는-인 성격이 파라독스를 낳는 원인이라고 러셀은 분석한다([7], p.393).

러셀과 화이트헤드(A.N.Whitehead, 1861-1947)는 기호논리학에 관한 기념비적 저작인 "The Principles of Mathematics", 속에서 집합론의 파라독스를 배제시킬 이 '원칙'을 실현하는 구체적인 형(타입)의 이론을 전개하였다.

1) 러셀의 유형론

러셀은 프앙카레의 집합에 적용되는 비단정적(impredicative) 정의의 금기를 처음으로 받아들인 사람 중의 하나이다. 그래서 그는 단정적 정의를 산출하는 형식주의를 건설하려 했다. 대략적으로 설명하면 임의의 집합에 대해서 말하는 대신, 이 형식에서는 제 1수준의 집합(set of level 1), 제 2 수준의 집합(set of level 2) 등에 대해서 말할 수 있다. 수준 1의 집합은 오직 개체의 범위에서 변하는 한정된 변수를 사용하는 공식에 의해 정의된다. 이것

은 제 1수준의 집합들의 전체성을 결정한다. 그리고 제 2수준의 집합은 개체와 그리고 임의의 제1수준의 집합 위에서 변하는 한정된 변수를 사용하는 공식에 의해 정의된다. 이러한 종류의 (러셀이 부른 바와 같이) 세분화(ramification)의 문제 는 (유리수의 집합으로 도입된)실수론의 결과에서 제 1수준의 실수, 제2수준의 실수 등이 얻어진다는 것이다. 그러나 이러한 차이를 인정한다면 해석학은 제대로 진행되지 않는다. 그래서 러셀은 특별한 장치로 환원공리(axiom of reducibility)를 도입하였는데 이것은 모든 고수준의 집합은 저수준 집합의 하나와 같은 적용범위를 갖는다고 말한다. 사실상, 이 공리는 세분화의 점들을 무효화시키고 해석학에서의 비단정적 정의를 간접적으로 허용한다. 러셀 자신도 이 단계가 프앙카레의 정의주의로 부터 나온 애초의 철학적 견해와 일치하지 않는다는 것을 인정했다. 그러나 해석학을 전개시킬 다른 방법이 없었다. 이처럼 개체의 집합인지(제 1형), 집합의 집합인지(제 2형) 등에 따라 집합을 구별하고 연속적인 형의 대상의 (제 0형의 개체와의) 포함관계를 제한하는 그의 유형론은 어쨌든 단정적 정의를 주장하도록 강요하지 않고 모순을 방지하였다. 이것은 (F.P.Ramsey 에 의한) 간단한 유형론(simple type theory)을 만들려는 이후의 운동에 의해 성취되었는데 정의에 의한 형(形)과 수준에 의하여 집합을 구별하는) 러셀의 본래의 세분화된 유형론(ramified type theory)에 반대하였다([3], p.20).

이러한 러셀의 유형론의 완성한 형은 매우 복잡하다. 그러하다는 것은 각 형(type)중에 다시 차원(order)을 나누고 있기 때문이다. 이와 같이 2단 짜임의 구조를 필요로 하는 것은 2종의 역리를 풀기 위해서이다. 즉 형에 의해서『집합의 역리』와 같은 순논리적 역리를 풀고, 차원에 의하여『에피메니데스의 역리』와 같은 언어상의 역리를 푸는 것이다.

그런데 이 2종의 역리중, 제 2의 것, 즉 언어상의 역리는 순수한 논리적인 구조를 갖는 것은 아니다. 그러므로 그것을 풀기 위하여 논리의 구조를 제한할 필요는 없는 것이고, 단지 언어의 사용에 주의하면 되는 것이다. 결국 차원의 개념은 필요한 것은 아니고, 단지 유형의 개념만으로 족한 것이다. 뿐만 아니라 유형 그것도 러셀과 같이 절대적인 것으로서 생각할 필요는 없고, 그가 말하는 상대적 유형만으로 충분하다. 또 러셀이 그 복잡한 유형론의 난점을 피하기 위하여 생각한 환원공리는 존재명제이므로 경험적 명제이다. 그러나 논리체계중에서 경험적 명제를 넣는 것은 허용되지 않는 것이다([4], p,179). 이리하여 환원공리는 차원의 난점을 구하나, 자신내에 새로운 난점을 가지는 것으로 되는 것이다. 따라서 이 공리는 배제하거나 또는 수정하지 않으면 안된다.

이러한 생각에서 러셀의 이론을 비판하고, 단순화시킨 것이 현대의 유형론이다.

2) 현대의 유형론

러셀의 유형론이 이룩한 가장 중요한 발전은 속성과 내포관계를 버리고 계급(class)과 외연관계를 중시한 것이다. 이제 매우 두드러진 발전이 매우 가까이에 있다. 우리는 비이너-쿠라토프스키(Wiener-Kuratowski)의 순서쌍 정의를 채택하여 계급에 관한 외연관계를 축소시킬 수 있다. 이것은 수학원론(Principle Mathematica)을 오늘날에도 의미 있게 해준다는 점에서 유용하다. 또한 전후 관계의 판단에 의한 계급 추상화를 정의하는 발전된 방법을 도입하여 한정사, 변수, 그리고 진리함수와 별문제인 유일한 원시적 기호 $<\varepsilon>$로써 끝마치게 되었다.

우리가 원칙적으로 관계가 아니라 개체와 계급들만을 다루어야 하기 때문에 유형이 매우 간단해졌다. 즉 O형의 개체와 그 구성원이 n형인 계급들은 n+1형이다. 변수로서 우리는 ⟨x⟩, ⟨y⟩ 등을 형을 구별하는 첨자들과 같이 쓸 수 있다. 이 이론의 핵심적 공식은 연속적인 형의 변수로부터 <ε>에 의해 건설되는데 $x^n \in y^{n+1}$의 형태를 갖는다. 그리고 나머지 공식은 한정화와 진리함수에 의하여 이러한 핵심적 공식으로부터 건설된다([7], p.20).

러셀은 형식적 해결책인 유형론과 철학적 해결책인 악순환 원리를 제시하였다(1908). 현재 러셀의 형식적 해결책을 단순한 유형론과 분기적(分岐的, ramified)유형론으로 구분해 보는 것이 보통이다. 단순 유형론은 논의의 대상 영역(universe of discourse)을 등급별로 나눈다. 즉 개체(유형 0), 개체들의 집합(유형 1), 개체들의 집합들의 집합(유형 2)… 등으로 나눈다. 따라서 개체 변수 x_0는 유형 0 에 속하고 x_1은 유형 1에 속한다. '$xy\in$'의 형식을 가진 공식은 y가 속한 유형이 x가 속한 유형보다 한 등급 높을 때만 형성 규칙(formation rule)에 어긋나지 않는다. 따라서 '$x_n \in y_n$'의 형식을 가진 공식은 형성 규칙에 어긋나며 러셀의 역설에 기본이 되는 그 스스로의 구성 요소가 아니라는 성질은 표현될 수 없다. 분기적 유형론은 '명제'(닫혀진 문장)와 '명제 함수'(열려진 문장)의 질서를 등급별로 나누어 어떤 명제(명제 함수)도 그것과 동일한 또는 더 높은 등급의 명제(명제 함수)에 '관한(about)'것일 수 없다는 제한을 가한다. '참이다'와 '거짓이다'도 그 말들이 적용된 명제의 등급에 따라 등급 지어진다. 예컨대 n등급의 명제는 $n+1$등급의 참 또는 거짓이 될 것이다. 따라서 그 스스로가 참이라고 말하는 거짓말쟁이 문장은 그 스스로의 구성 요소가 아니라는 성질이 단순 유형론에서 그러하듯이 표현될 수 없다([6], p.183).

현대의 유형론은 많은 논리학자들이 이것을 단순화하는 일에 힘을 기울이고 있고 더욱더 이 분야의 심화된 연구가 필요하다.

3) 일반 변수를 가진 유형론

많은 종류의 변수를 구별되게 표시하는 첨자를 표현하는 데 있어서, 전형적인 모호성의 관습이 유형론을 적용하여 단일분류되거나 한정된 간단한 논리로 바꿀 수 있는 효과를 가지고 있다고 가정할 수 있다. '$(\exists y)(x)(x \in y)$' 와 같이 전형적으로 모호하게 다루어지는 식은 다음과 같은 불명확한 도식적 첨자 n을 가진 도식과 같다.

$(\exists y^{n+1})(x^n)(x^n \in y^{n+1})$

이것의 일반성은 많은 공식들 중 어떤 것도 대표할 수 있다는 도식적인 일반성이다.

$(\exists y^1)(x^0)(x^0 \in y^1)$, $(\exists y^2)(x^1)(x^1 \in y^2)$, ……

그리고 그것은 전집합(universe of discourse)에서 완전히 한정화하는 데 존재하는 일반성이 아니다. '$(\exists y)(x)(x \in y)$'라는 후자의 표현을 보면, 그것은 모든 형의 대상 x를 구성원으로 갖는 계급 y가 있다는 것을 의미한다. 전형적으로 모호하게 다루어지나 이 경우는 그렇지 않다.

이러한 다중분류된 이론이 순전히 단일분류된 것으로 바뀔 때 어떻게 보일지를 고려하는 것은 충분한 이유가 있다. 왜냐하면 다중분류된 이론이 규범적인 한정된 논리를 이탈하기 때문이다. 더욱 이 첨자들은 매우 다루기 귀찮아진다. 그리고 우리가 전형적인 모호성에 의해 그것들을 사용하지 않는다면 간단한 논리로부터의 이탈이 더욱 심해진다. 왜냐하면 전형적인 모호성의 방법은 유형론의 편리한 첨자들과 일치하지 않는 공식을 의미가 없는 것으로 간주하도록 요구하기 때문이다. 그래서 이것은 '$x \in y$, $y \in x$'에서 볼 수 있는 것처럼 비록 의미가 있는 두 가지의 공식이 결합하더라도 의미가 없는 것으로 되는 효과도 가지고 있다([7], pp.21-22).

2. 체르멜로-프렌켈(Zermelo-Fraenkel)의 공리계

1) 체르멜로-프렌켈의 공리계

집합론의 파라독스를 극복하기 위해서는 먼저 이 이론을 엄밀하게 논리적인 재구성하고, 그 위에 성립하는 모든 이론이 완전한 것인지 확인해 볼 필요가 있었다. 이 '논리적 체계화'의 모델은 유클레이데스가 기하학을 체계화할 때 채용한 방법, 즉 공리로부터 연역체계를 형성하는 방법이었음은 말할 나위가 없다. 이러한 방법에 의하여 체계화된 이론이 곧 공리론 이다. 공리론의 연구가 본격적으로 다루어지기 시작한 것은 지난 19세기부터의 일이며, 그 중에서도 특히 힐버트의 <기하학의 기초>(1899)는 가장 대표적인 예로 꼽힌다. 엄격한 의미로 '공리론'이라고 부를 수 있는 것은 다음 조건을 충족해야 한다([7], p.402).

첫째로 이 이론 중에서 쓰이는 용어는 다른 용어를 써서 정의되는 파생개념과 다른 용어를 정의하는 데는 쓰이지만, 자신에 대해서는 정의되지 않는 무정의 개념의 두 종류로 나누어진다.

둘째로 파생개념이 포함된 명제는 역방향으로 정의를 따라감으로써 유한 번의 절차에 의하여 무정의 개념으로 된 명제로 바꿀 수 있다.

셋째로 이 이론 속에서 '참'이라고 주장된 명제는 다른 명제가 '참'임을 전제로 하여, 그것이 증명되는 경우와 증명이 없이 그렇게 주장되는 두 가지 경우로 나누어진다. 이 두 종류의 명제를 함께 정리라 부르고, 그 중 특히 후자를 공리라고 한다.

넷째로 공리가 아닌 정리의 증명은 유한 번의 절차에 의해서 공리만을 전제로 삼은 증명으로 변형시킬 수 있다.

이 뜻으로는 다분히 직관적인 칸토르의 집합론은 분명히 '공리적'인 것이 못된다. 그의 집합론에 '소박'이라는 형용사가 붙여진 사실이 이것을 단적으로 뒷받침해 준다. '외연성 공리', '분출공리', '선택공리', '무한공리' 등이 암암리에 쓰여지긴 하였다. 그러나 분출공리를 무제한으로 사용하면 '러셀의 파라독스'를 유발하는 집합인 $\{x|x \notin x\}$의 존재까지도 인정해야 하는 결과를 빚는다. 뿐만 아니라 집합론으로서 재건하기 위해서는 이들 공리만으로는 부족하며, 따라서 '소박집합론'의 시대에는 공리로 내세울 필요가 없었던 명제들을 새로이 공리로서 덧붙여야 한다. 그 결과 공리를 바탕으로 연역적으로 재구성된 집합으로 즉 공리적 집합론이 탄생하게 된 것이다.

이 체르멜로의 공리적 집합론은 칸토르의 '소박집합론'(素朴集合論)에 비하여 '집합이란 무엇인가?' 하는 따위의 까다로운 문제로 공연히 골머리를 앓게 하는 일이 없으며, 따라서 그 만큼 현실적 기능적이라는 장점을 지닌다. 반면에 '집합'이라는 본질적 문제에 관한 논의를 외면한 공리적 방법은 그 만큼 칸토르의 집합론에서 볼 수 있었던 사상성(思想性)이 결여되고 있다는 아쉬움도 갖게 한다.

그것은 그렇다 하고, 체르멜로의 공리계에는 거기서 다루어질 집합의 범위가 너무 좁아진다는 결함이 있다. 무한집합 Z_0, Z_1, Z_2, …가 차례로 만들어지기는 하지만, 이들 전체의 합집합의 존재를 보장하는 공리는 이 공리계 속에는 없다. 이 약점을 보완하기 위해서 프렌켈은 다음 공리를 내놓았다.

(8) 치환공리(置換公理)

『A가 집합일 때, A와 B사이에 1 대 1 대응이 성립하면, B도 집합이다.』

체르멜로의 집합론에서는 ω를 집합으로 인정하지만('무한공리'), $\omega+\omega$라는 순서수가 존재한다는 것은 이 공리계로 부터는 이끌어 낼 수 없다. '치환공리'를 이용하면 이를 다음과 같이 증명할 수 있다.

<증명> $\omega=\{0, 1, 2, \cdots\}$는 집합이고, 이것과 $\{\omega, \omega+1, \omega+2, \cdots\}$라는 '모임'사이에 1대1대응

$$
\begin{array}{lcccccc}
\omega: & 0 & 1 & 2 & \cdots & n & \cdots \\
 & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\
 & \omega & \omega+1 & \omega+2 & \cdots & \omega+n & \cdots
\end{array}
$$

(단, n은 임의의 자연수)

이 성립하므로 '치환공리'에 의하여 $\{\omega, \omega+1, \omega+2, \cdots\}$ 는 집합이다.

따라서 '합집합의 공리'에 의하여 $\bigcup_{n\in\omega}(\omega+n)=\omega+\omega$.

그러므로 $\omega+\omega$는 집합, 즉 순서수이다. <증명 끝>

마찬가지로 '치환공리'로 부터 $\omega+\omega+\omega+\cdots$ 등이 모두 순서수임을 알 수 있다. 거듭 말하지만 순서수의 이론이 자유로이 다루어지기 위해서는 체르멜로의 공리계 만으로는 불충분하고, 이것에 새로이 치환공리가 덧붙여짐으로써 비로소 가능하게 된 것이다.

이와 같이 체르멜로의 집합론에 프렌켈의 치환공리를 덧붙임으로써 만들어진 집합론을 체르멜로-프렌켈의 공리적(公理的)집합론 또는 두 사람 이름의 머리 글자를 따서 ZF집합론이라고 부른다.

그러나 보통 'ZF 집합론'이라고 할 때에는 폰 노이만(Von Neumann, 1903-1957)이 제시한 다음의 공리까지도 으레 포함해서 생각한다.

(9) 정칙성의 공리

『임의의 집합 A_1에 대하서 $A_1 \ni A_2 \ni A_3 \ni A_4 \ni \cdots$ 가 되는 무한열 A_1, A_2, A_3, A_4, …는 존재하지 않는다』

정칙성 공리로 부터 '모든 집합의 모임', '모든 순서수의 모임'등은 '클래스'이지 집합이 아니라는 것을 알 수 있다. 이런 것이 집합이라고 하면, $A \in A$가 성립하게 되어서 '정칙성의 공리'에 어긋나기 때문이다. 또 러셀의 파라독스도 무의미한 것이 된다. 왜냐하면, (1)에 의하여 모든 집합은 $A \notin A$라는 성질을 갖게 되므로, 결국

$\{x|x \notin x\} = \{x|x = x\}$가 되어서 $\{x|x \notin x\}$는 '집합 전체의 모임'을 나타낸 것으로, 집합이 아니라 '클래스'이기 때문이다.

체르멜로(Zermelo)는 이와 같은 역리가 발생하지 않도록 『집합』의 개념을 공리에 의해 규정하려고 시도한 최초의 사람이다. 그러나 이 공리라는 것이 처음부터 『집합이란 무엇이냐』라든가 『무엇이어야 하느냐』를 규정한 것이 아니라 칸토르의 집합론의 성과를 될 수 있으면 구체화는 한편, 역리를 초래하는 성질은 제한하려는 의도가 역력하였던 것으로 말 할 수 있는 것이었다. 따라서 있을 수 있는 어떠한 역리도 나타나지 않는다는 보증은 없었던 것이다. 그리고 이러한 보증은 그 후의 연구에 의해서 원리적으로 불가능하다는 것이 분명해졌다고도 말할 수 있기 때문에, 여기서 수학적 진이라는 것의 한계성을 느끼게 되는 것이다. 또한 공리에서 인정되는「집합」의 범위가 상대적인 의미에서 의외로 작아지고 있다는 점이다. 즉 Z_w에 해당하는 농도의 집합이 그의 이론에서는「집합」으로 성립되지 않는다는 사실이 머지 않아 판명되었던 것이다. 체르멜로의 공리계(公理系) 는 그후 여러 모로 개량되어서 Z_w는 물론, 그 외의 것도 포섭할 수 있는「공리적 집합」이라는 것이 성립되기는 하였지만, 역시 이와 같은 어려움이 무한이라는 개념에 항상 따라다니는 원리적인 어려운 문제라고 말할 수 있다.

2) ZF의 모델의 연장

일반적 체르멜로-프렌켈(Zermelo-Fraenkel : ZF) 집합론은 다음 두 가지 집합원리에 기초를 두고 있다.

(A) 전문화된 내포의 원리

(원시적 및 서로 모순이 되는 내포공리 체계 내에서 서로 모순 없는 공리를 최대로 택해서 집합론을 구성한다.)

(B) 크기제한의 원리

(universe와 다대일 혹은 일대일 대응을 가질 정도로 큰 족을 유도하는 공리를 피한다.)

[1]에서 처치는 전집합(universal set)을 인정하는 ZF 체계에서 universe를 확장시킬 수 있음을 보임으로써 크기의 제한 원리가 정당화될 수 없다고 주장한다. 처치에 의하면 저집합(lows set)이란 정칙성 집합과 1:1 대응되는 집합이고, 고집합(high set)은 저집합의 보집합이며, 중간집합(intermediate set)은 그 외의 집합이다. 위의 용어의 정당성을 보이기 위해

선 다음을 집합론의 기본 공리에 근거하여 보여야 한다. (1) 한 저집합의 보집합(혹은 족)은 전족(universal class)과 1:1 대응된다. (2) 어떠한 전족도 1:1 대응이 될 수 없다. (3) 강한 선택 공리를 사용하면, 집합 혹은 족인 U가 저집합이 아니면, 각 서수는 U의 부분집합과 1:1 대응을 갖는다. 고집합뿐 아니라 중간 집합도 전집합(혹은 족)와 1:1 대응을 갖지만, 그의 보집합이 고집합의 보집합보다 크다는 의미에서 중간 집합은 고집합보다 작다.

사실 고집합 처치으로부터 모순이 나온다고 보아야 할 이유는 없다. 실로 기본적으로 모순을 만드는 집합들은 러셀의 경우를 제외하곤 서수의 집합이나 정칙성 집합들이다 우리는 그들 집합으로부터 Burali-Fori의 역설이나 그의 변형을 이끌어 낼 수 있다.

처치는 집합론의 기본 공리로서 다음 A-J를 택했다.

A. 외연성 공리(Substitutivity), $y=z\supset.\ A_y\supset A_z$

B. 확장 공리(Extensionality), $x\in y\equiv_x x\in z\supset y=z$

C. 분출공리(Pair Set), $(\exists u).\ x\in u\equiv_x.\ x=y\vee x=z$

D. 합집합의 공리(Sum Set), $(\exists u).\ x\in u\equiv_x(\exists y).\ y\in z.\ x\in y$

E. 곱집합의 공리(Product Set), $y\in z\supset(\exists u).\ x\in u\equiv_x.\ y\in z\supset_y x\in y$

F. 무한공리(Infinity), $(\exists u).\ x\in u\equiv_x$ *finord*(x)

G. 선택공리(Axion of choice)

H. Aussonderung,

$wf(w)\supset(\exists u).\ x\in u\equiv_x.\ x\in w.\ A_x$($u$는 A_x에서 자유가 아님)

I. 치환공리(Replacement),

$A_{xy}\supset_{xy}[A_{xz}\supset_z y\doteq z]\supset.\ A_{xy}\supset_{xy}[A_{zy}\supset_z x=z]\supset.$

$y\in w\equiv_y(\exists x)A_{xy}\supset.\ wf(w)\supset(\exists u).\ x\in u\equiv_x(\exists y)A_{xy}$

(u는 A_{xy}에서 자유가 아님)

J. 멱집합의 공리(Power set), $wf(w)\supset(\exists u).\ x\in u\equiv_x.\ x\subseteq w$

이외에 처치는 다음의 추가 공리로 제안하고 있다.

K. Complement, $(\exists u).\ x\in u\equiv_x.\ x\notin z$

L. J-cardinal number, $wf(w)\supset(\exists u).\ x\in u\equiv_x x$ equiv $^j\ w=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$

처치 자신이 집합론의 새로운 공리를 찾는 계획을 세워 놓고도 집합론의 마지막 공리체계가 제안되지 않고 있다고 지적했듯이 금후 이 갈래의 방향으로 심화된 연구가 필요하며, 공리계의 모순 극복과 더불어 공리계의 단순화에도 더 많은 연구가 필요하다.

IV. 結論

이 글에서는 고대 그리스부터 현대에 이르기까지의 모든 것을 고찰하지 못하고, 공리계를 중심으로 러셀의 유형론과 체르멜로-프렌켈의 공리계에 한정하여 살펴보았다.

러셀의 유형론이 이룩한 가장 중요한 발전은 속성과 내포관계를 버리고 계급(class)과 외연관계를 중시한 반면, 논리체계중에 존재명제인 환원공리를 넣은 것은 논리중에 경험적 요소를 섞는 것이기 때문에 허용되지 않는 것이다. 따라서 이 공리는 배제하거나 또는 수정하지 않으면 안된다. 이러한 생각에서 러셀의 이론을 비판하고, 유형론을 단순화시킨 것이 현대의 유형론이다. 이 현대의 유형론은 많은 논리학자들이 이것을 단순화하는 일에 힘을 기울이고 있고 더욱 더 이 분야의 심화된 연구가 필요하다.

체르멜로-프렌켈(Zermelo-Fraenkel : ZF) 집합론은 내용이나 형식면에서 아주 잘 짜여져 있어서, 현대수학은 모두 이 테두리에서 구성이 가능하고, 공리나 정리를 모두 정리 식으로 나타낼 수 있다. 따라서 ZF 집합론은 그 만큼 공리계의 설정이 잘 되어 있다는 이야기가 된다. 그러나 ZF 집합론은 『집합이란 무엇이냐』라든가 『무엇이어야 하느냐』를 규정한 것이 아니라 칸토르의 집합론의 성과를 될 수 있으면 구체화는 한편, 역리를 초래하는 성질은 제한하려는 의도가 역력하였던 것으로 말할 수 있는 것이었다. 따라서 있을 수 있는 어떠한 역리도 나타나지 않는다는 보증은 없었던 것이다. 그리고 이러한 보증은 그 후의 연구에 의해서 원리적으로 불가능하다는 것이 분명해졌다고도 말할 수 있기 때문에, 여기서 수학적 진이라는 것의 한계성을 느끼게 되는 것이다.

그 후 처치 자신이 집합론의 새로운 공리를 찾는 계획을 세워 놓고도 집합론의 마지막 공리체계가 제안되지 않고 있다고 지적했듯이 금후 이 갈래의 방향으로 심화된 연구가 필요하며, 공리계의 모순 극복과 더불어 공리계의 단순화에도 더 많은 연구가 필요하다.

지금까지 집합론에서 발생되는 모순을 다루어 왔다. 수학뿐만 아니라 대체로 수학적 요소를 가지고 있는 학문에서 그 저변에 깔려 있는 (무엇이 있는지 알 수는 없지만) 문제들을 새로운 입장(수학의 발전 속의 문화적인 형태)에서 다시 한번 생각하는 것이 바람직한 것이다. 그러한 의미에서 파라독스에 관한 고찰이 필요해지는 것이 아닐까 생각한다. 그리고 적어도 그러한 일면에서 이것이야말로 수학이라는 학문의 근본적인 계기가 되는 것이 아닐까. 이러한 의미에서 집합론의 무모순성에 관한 제한된 고찰은 의미가 있다고 생각한다.

참고문헌

[1]. A. Church(1974), Set Theory with a Universal set, *Proceedings of the Tarski Symposium, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics* XXV, pp.197-308, AMS.

[2]. F.Cajori, *A History of Mathematics*, Macmillan Campany, New York.

[3]. 김상문, *수학기초론*, 민음사, 1990.

[4]. 김용운 • 김용국 공저, *집합론과 수학*, 우성출판사, 1989.
[5]. 김인수 • 정 위섭 공역 / 末木剛博 편, *기호논리학*, 학문사, 1991.
[6]. 수잔 하크 지음 / 김효명 옮김, *논리철학*, 종로서적, 1986.
[7]. 여운도, 集合論의 無矛盾性에 관한 考察, 명지대학교 교육대학원 석사학위 논문.
[8]. 오병승, 집합론의 공리계의 무모순성, 단국대학교 대학원 박사학위논문, 1984.
[9]. 콘스탄스 리드 지음 / 이일해 옮김, *힐버트*, 민음사, 1989.

수학은 순수이성이 경험의 도움없이 자신의 영역을 얼마나 성공적으로 확대시킬 수 있는지를 보여주는 가장 훌륭한 예이다.

- Immanual Kant, *Critique of Pure Reason*

시인다운 기질이 부족한 수학자는 결코 완벽한 수학자가 될 수 없다.

- Weierstrass

수학에서... 현존하는 두 가지 경향을 찾아볼 수 있다. 한편으로, 추상화를 향한 경향은 연구 대상들의 미로에 내재한 논리적 관계를 구체화 시키고 체계적이고 정연한 방법으로 대상들을 서로 관련시키려고 시도한다. 다른 한편으로, 직관적 이해를 향한 경향은 연구 대상들에 대한 좀 더 즉각적인 파악과 대상들 사이의 관계에 대한 구체적인 의미를 강조하는 생생한 접촉을 촉진한다.

- David Hilbert