Historia Mathematica Vol. 9. No. 2, (1996). 10 - 14.

배중률에 관한 소고

한양대학교 이과대학 수학과 김 성 수

요 약

논리법칙은 유한집합에서 성립하는 수학의 정리들을 최대한 일반화시킨 것에 불과하다. 따라서 우리는 이들 논리법칙들이 아무런 고려없이 무한집합의 수학에서도 성립할 것으로 단정해서는 안된다. 집합론에서 역리가 발생하는 것은 논리학의 한 원리인 배중률이 무한집합의 수학에서는 성립하지 않음을 보여주는 것이다.

1. 서 론

"모든 진술은 참이거나 거짓 둘 중 하나이며 그 중간의 가능성이란 있을 수 없다"라는 논리학의 한 원리인 배중률은 동일률 그리고 모순률과 함께 논리학의 삼대 기본법칙중 하나로 알려져있다. 이들 삼대 기본법칙 뿐 아니라 아리스토텔레스(Aristoteles)를 기원으로 하는 형식논리학의 모든 법칙들은 너무나 당연한 것같이 보이므로 20세기 이전까지에는 수학에서 뿐 아니라 이 세상 어떤 곳에서도 하나의 예외도 없이 성립하는 만고불변의 진리쯤으로 여겨졌었다.

의심 많고 엄격하기로 유명한 근대 서구 철학자들 역시 이들 논리학의 법칙들의 타당성을 의심하지는 않았다. 오히려 그들은 이들 법칙들이 너무나 당연하므로 혹시 이로부터는 공허하거나 사소하지 않는 의미 있는 결과를 얻을 수 없는 것은 아닌지에 대해서 깊이 사색하였다. 칸트(I. Kant)를 비롯한 근대 서구 철학자들은 형식논리의 유용성에 대해서 호의적이지 않았던 것으로 보인다. 그들의 견해로는 형식논리에 의한 추론은 인간 오감에 의한 경험에 관계없이 항상 옳지만 순수하게 형식논리의 추론만으로는 새로운 지식을 전혀 얻을 수 없었다. 즉 그들은 형식논리만을 이용한 추론은 선험적이지만 분석적이라고 생각하였다. 이에 상대되는 추론은 인간 오감을 통한 경험을 기초로 하는 경험적 추론 그리고 논리 이외에 직관 혹은 제 삼자를 필요로 하는 종합적 추론인데 경험적 추론은 종합적 추론의 일부분이기는 하지만 똑같지는 않다고 생각하였다.

칸트는 수학적 지식은 선험적인 것이지만 (분석적이지 않고) 종합적인 것이라고 생각하

였다. 예로서 "삼각형의 두 변의 길이의 합은 나머지 한 변의 길이 보다 크다"라는 수학적 명제를 생각하여보자. 우리는 하나의 삼각형을 골라 두 변을 이어붙힌 후 나머지 한 변과 길이를 비교해보면 위 명제가 적어도 그 경우에는 맞는다는 것을 알게 될 것이다. 만약 다른 모양의 삼각형 몇 개에 대해서로 위와 같은 실험을 해본다면 우리 각자는 나름대로의 이유로 인해서 위 명제가 아마 사실일 것이라는 생각을 하게 될 것이다. 그러나 신중한 사람이라면 그러한 이유로 해서 위 사실을 목숨을 걸 정도로 믿지는 않을 것이며 계속해서 여러 가지 모양의 삼각형에 대해서 더 실험을 해 볼 필요가 있다고 생각할 것이다. 그러나 위 명제의 수학적 증명을 충분히 이해한 사람이라면 경우가 달라진다. 그에게는 더 이상의 실험이 필요 없게 되고 목숨을 걸 수 있을 정도로 100% 확신을 갖게 된다. 따라서 우리는 수학적 지식이 경험에 의존하지 않는 선험적인 것임을 알 수 있다. 수학적 지식이 종합적이라는 논의는 훨씬 복잡하고 우리의 논의와는 직접적인 관련이 없으므로 생략한다.

그런데 무슨 연유로 해서 직관주의자라고 불리는 일군의 수학자들은 이렇게 당연하게 여겨졌던 논리학의 한 법칙인 배중률을 의심하게 되었을까? 이를 위해서는 부라우어가 처음으로 배중률을 거부하였던 20세기 초 수학계의 상황을 회상해 볼 필요가 있다.

2. 비유클리드 기하의 출현

19세기는 인류의 시야가 보다 넓어지므로 서 인간이성이 서서히 그의 한계를 드러내기 시작한 시기였다. 19세기 중반 러시아의 로바체프스키(N. Lobacevski)와 헝가리의 보야이(J. Bolyai)가 각기 독립적으로 유클리드(Euclid)의 평행선 공리를 그 것과는 모순되는 다른 명제 "직선 위에 있지 않은 한 점을 지나며 그 주어진 직선과 만나지 않는 직선은 두 개 이상 존재한다"로 대체하여 말안장기하라고 불리는 비유클리드 기하를 발표하였다. 후에 리만은 평행선 공리를 "직선 위에 있지 않은 한 점을 지나며 그 주어진 직선과 만나지 않는 직선은 존재하지 않는다"로 대체하여 타원기하라고 불리는 또 다른 형태의 비유클리드 기하를 발표하였다. 이들 비유클리드 기하가 유클리드 기하만큼은 무모순이라는 것은 뽀앙까레(H. Poincare)에 의해서 후에 증명된다. 결국 유클리드 기하학은 유일한 참인 기하학으로서의 위치를 잃게 되었다.

비유클리드 기하의 출현 이전의 수학자나 철학자들은 다음과 같은 이유로 해서 의미 있는 기하학은 단 하나밖에 없으며 그것이 유클리드 기하라고 생각했었다. 그들은 거짓인 명제로부터 어떠한 불합리한 명제를 이끌어 낼 수 있음을 알았다. 그래서 그들은 쉽게 다음과 같이 생각을 하였다. 만약 주어진 공리체계가 참인 사실을 표현하고 있지 않다면 그로부터 쉽게 불합리한 결과를 얻어내게 될 것이므로 참이 아닌 공리체계로부터는 무모순 적인 학문체계를 얻을 수 없다. 그들에게 있어서는 참이 아닌 공리체계로부터 의미 있거나 응용력을 갖는 결과를 얻는다는 것은 상상도 할 수 없는 것이었다. 그런데 유클리드 기하는 이천 년이 넘는 동안 어떠한 불합리한 결론도 산출하지 않았을 뿐 아니라 뉴턴(I. Newton)의 운동 삼법칙과 만류인력의 법칙과 어울려 우주의 신비를 차근차근 풀고 있지 않았었던가. 결국

그들에게 있어서는 유클리드 기하는 필연적이며 영구불변의 사실을 연구하는 유일한 기하였었다.

오늘날 유클리드 기하 뿐 만 아니라 비유클리드 기하도 각기 응용성을 갖고 연구되어 지고 있다. 우리는 여기서 다음과 같은 교훈을 얻을 수 있다: 서로 양립할 수 없는 몇 개의 체계가 동시에 무모순일 수 있고 이로부터 각각 의미 있는 연역체계가 만들어지기도 한다. 그러나 이는 우리가 너무나 쉽게 잊곤 하는 교훈이다.

3. 칸토르와 집합론

수학자들은 비유클리드 기하학의 출현으로 수학의 무모순 문제를 심각하게 고려하지 않을 수 없게 되었다. 수학은 분야가 많은 있는 학문이다. 따라서 수학에 모순이 없음을 보이려면 대수, 해석학, 기하, . . . 등등이 모두 무모순임을 보여야 한다. 뿐만 아니라 각각의 분야는 서로 연관되어 있다. 예를 들면 대수가 무모순임을 보이기 위해서는 먼저 해석학과 기하가 무모순임이 알려져 있어야 한다. 1874년이래 이십 여 년간 칸토르(G. Cantor)가 연구한 집합론은 이러한 어려움을 해결하여 주었다. 수학의 전 분야가 집합론의 틀 위에서 전개될 수 있음이 밝혀진 것이다. 즉 수학의 모든 정리는 집합론으로 표현되어 질 수 있고 이들의 증명은 집합론의 공리로부터 얻을 수 있음이 밝혀졌다.

집합론은 칸토르가 여러 가지 실수의 부분집합을 연구하는 중에 생각해낸 것으로 알려지고 있다. 칸토르는 어떤 실수의 부분집합은 실수집합 전체와 일대일 대응이 되지만 어떤 부분집합은 무한집합이면서도 실수집합 전체와는 일대일 대응될 수 없음을 주목하였다. 그는 이 성질로부터 무한집합들도 여러 가지 크기를 가지고 있다고 결론을 내렸다. 그는 무한집합의 크기를 농도라고 불렀는데 수 편의 논문을 통해서 무한히 여러 가지의 농도가 있음을 발표하였다. 자연수 집합은 가장 작은 농도를 갖는 무한집합이다. 유리수 집합, 대수집합은 자연수 집합과 같은 농도를 갖지만 실수집합은 이보다 큰 농도를 갖는다. 특히 대수집합이 실수집합보다 크기가 작다는 것은 그 당시 흥미 있는 결과로 받아 졌었다. 19세기 중반 루우빌(J. Liouville)에 의해서 대수가 아닌 초월수의 존재가 밝혀졌는데 그후 유명한 상수가 초월수인지 아닌지를 밝히는 것이 그 당시 수학계의 이슈였던 것으로 전해지고 있다. 1873년 에르미트(C. Hermite)가 처음으로 e가 초월수임을 보였고 9년 후에 린데만(F. Lindemann)이 π가 초월수임을 보였는데 칸토르의 결과는 실수중 거의 모든 수가 초월수임을 보여주니 칸토르의 무한론은 굉장히 강력한 결과로 받아들여지게 된 것이다.

그러나 얼마 되지 않아 집합론에서 여러 가지 역리가 발견되었다. 그중 하나는 칸토르 자신이 발견하기도 하였다. 역리가 발견된 사실과 함께 중요한 또 다른 사실은 그 당시 칸토르의 스승인 크로네커(L. Kronecker)를 비롯하여 일군의 수학자들로부터 집합론은 이러저러한 이유로 거절당하고 있었다는 것이다. 일반적으로 일군의 수학자로부터 그의 타당성이 의심받고 있는 차에 역리가 발견되었다면 그 학문은 폐기되어져 마땅할 일이다. 그러나 여기에 역사의 아이러니가 있다. 또 다른 일군의 수학자들이 집합론을 열렬히 옹호하고 나선

것이다. 그들은 "칸토르가 우리에게 이끌어준 집합론의 낙원에서 결코 쫓겨나는 일은 없을 것이다"라고 외치면서 역리를 교묘하게 피하려 여러 궁리를 하였던 것이다. 아마도 그들은 고전수학의 일부분을 포기하는 일없이 수학의 무모순을 증명해 보이려는 거대한 꿈을 실현해줄 수 있을 것 같이 보이는 유일한 돌파구인 집합론이 붕괴되는 것을 지켜만 보고 있을 수는 없었을 것이다.

우리는 여기서 2절에서 말한 교훈을 상기하려 한다. 거짓인 명제를 공리로 하는 기하도 아름다운 체계를 이룰 수 있고 응용될 수도 있듯이 집합론이 쓸만한 결과 몇 개를 주었다고 결코 우리를 낙원으로 인도한 것은 아니다. 왜 집합론에서 역리가 발생하였는지, 무엇이 잘못인지를 확실하게 하여야지 역리를 피해 보겠다고 괜히 엉뚱한 문제를 들고 나와서는 안될 것이다. 부라우어(L.E.J. Brouwer)의 표현에 의하면 법을 어겼으면 유죄이지 법을 고친다고 무죄가 되는 것은 아니다.

4. 직관주의 수학

부라우어는 집합론의 역리는 논리법칙을 무한집합의 경우에도 무조건적으로 적용하므로서 발생하였다고 생각하였다. 그에 의하면 아리스토텔레스에서부터 전해 내려오는 논리법칙은 유한집합에서 성립하는 수학의 정리들을 최대한 일반화시킨 것에 불과하다. 다시 말하면 논리는 수학의 일부일 뿐이지 결코 수학의 기초가 될 수 없다. 그런데 칸토르와 그의 동조자들은 이 제한된 기원에 대한 생각을 잊고, 논리학을 모든 수학의 위에 있고 이것에 앞서서 생긴 어떤 것으로 오판하여, 끝끝내는 아무 정당성도 없이 논리법칙을 유한집합의 문제에서와 마찬가지로 무한집합의 문제에도 적용하였다. 따라서 이러한 원죄로부터 집합론에 패러독스가 발생하는 것은 그와 그의 견해에 동조하는 직관주의자들에게는 너무나 당연한 결과였다.

부라우어는 논리학의 삼대 기본법칙 중 하나인 배중률이 무한집합을 다루는 경우에 무조건적으로 성립하는 것은 아니라고 보았다. 예를 들면 그는 "π를 소수로 표현할 때 7이 무한번 나타난다"라는 문장은 의미 있는 문장이긴 하지만 참일수도있고 거짓일수도있을 뿐 아니라 결정불가능할 수도 있다고 생각했다. 따라서 그들은 이중부정이 스스로 상쇄되는 원리의 타당성을 부정하였다. 왜냐하면, 이중부정이 스스로 상쇄되는 원리는 명제의 증명가능성과 명제의 부정의 증명불가능성이 동치임을 주장하는 것이데 배중률이 성립하지 않으면 이는 더 이상 참이 아니기 때문이다. 그러나 집합론에서 이 원리 역시 아무 제약없이 무조건적으로 사용하고 있다.

그렇다면 어떻게 해서 부라우어와 그의 동조자들은 배중률이 무한집합에서는 항상 성립하는 것은 아니라고 생각하게 되었는가? 이는 에디슨(T. Edison)의 에피소드를 예로 들어 설명하는 것이 효과적이다. 우리는 "1 + 1 = 2"임을 잘 알고 있다. 혹시 이 역시 만고불변의 진리쯤으로 생각하는 독자도 있을 수 있겠다. 그러나 어린 에디슨은 "1 + 1 = 1"이 되게끔 하는 경우를 우리에게 보여 주었다. 1이니 2니 +니 하는 것들이 수학 책에서만 의미를 갖고 있는 것이 아니다. 그들은 일상적인 의미를 갖고 있으며 일상적인 용어로 매일매일 사용

되고 있다. 그러나 어떠한 일상적인 용어도 완벽하게 고정된 의미를 갖고 있지 않다. 우리는 물 한 방울, 물 두 방울 . . . 이렇게 물 방울을 세고 싶어지기도 하며 물 한 방울에다 물 한 방울을 떨어뜨리는 것을 더하는 것이라고 말할 필요가 생기기도 한다. 각각의 경우에는 어떠한 어려움도 발생하지 않을 듯 싶어 보인다. 그러나 두 경우를 종합하면 에디슨이 보인 것과 같이 "1 + 1 = 2"는 더 이상 참이 되지 못한다. 과일가게에서는 항상 "1 + 1 = 2"가 성립하였을 것이다. 그러므로 과일가게 주인은 "1 + 1 = 2"라는 정리를 생각해 낼 수도 있을 것이다. 그러나 이 세상은 과일가게 주인이 생각하고 있는 것 보다 훨씬 크고 기묘한 것일 수 있다. 이처럼 잘 이해하고 있다고 생각되는 개념도 적용대상을 넓히면 기존개념의 적용한계를 발견하고 이를 새롭게 이해하여야 할 필요를 알게 된다. 이를 집합론에 비추어 본다면 존재개념(따라서 결국 배중률)이 그러한 처지에 있음을 알게 된다. 우리는 "존재한다"라는 개념을 혼돈없이 잘 사용할 수 있는 것처럼 과신한다. 사실 자연수 하나하나의 존재성에 대해서는 어려울 게 없다. 그러나 자연수의 전체로서의 존재의 경우는 어떠한가. 직관주의 수학자였던 베일(H. Weyl)은 다음과 같이 말하고 있다: 부라우어는 모든 자연수의 전체로서의 존재를 믿을 증거가 없다는 것을 명백히 하였다. 자연수중 아무리 큰 녀석을 잡더라도 그보다 큰 자연수들의 열은 무한을 향하여 열려있다. 그것은 영원히 만들어져 가는 상태로 남아있으며, 어떤 완성된 존재가 아니다. 이점을 잘못 생각하여 자연수 전체가 동시에 존재한다고 생각하고있는 것이 역리가 발생하게 하는 진정한 원인이다. 부라우어는 이로부터 우리의 눈을 뜨게 하였으며, 고전수학이 인식을 초월한 절대를 믿음으로써, 확실성에 기초한 참된 진술로부터 얼마나 멀리 떨어져 갔는가를 우리에게 보여주었다.

참고문헌

[1]. S. Barker, *Philosophy of Mathematics*, Prentice-Hall, 1964.

[2]. A. Heyting, *Disputation, in the Philosophy of Mathematics* (ed. P. Benacerraf and H. Putnam), Prentice-Hall, (1983), 66-77.

[3]. Mathematical Society of Japan, *Encyclopedic Dictionary of Mathematics* (ed. K. Ito), MIT Press, 1987.

[4]. 한 병호, *수학이란 무엇인가*, 진리세계사, 1989.

> 가장 넓은 의미에서, 수학은 모든 형태의 형식적이고 필연적이며 연역적인 추론의 전개이다.
>
> - Alfred N. Whitehead, *A Treatise on Universal Algebra*(1960)