Journal of Historia Mathematica Vol. 9. No. 1, (1996), 70 - 82.

수학의 방법론[1)]

R. Brown and T. Porter
아주대학교 수학과 **방 승 진** 옮김

도 입

이 글은 1993년 11월 세빌(Seville)대학의 기하·위상 연구부의 학생과 교수들에게 필자 브라운(R. Brown)이 강연한 것을 기초로 하고 있다. 여기에서 발표된 문제들은 여러 해 동안 웨일즈 대학(Univ. of Wales)에서 토론과 논의가 거듭되어 온 주제였으며 이로써 왜 이것이 공동 논문인지 설명해 준다.

강연의 목적과 이런 주제에 대해 토론하는 이유는 학생들이 공부하고 있는 과목에 대한 성취감과 아울러 목표한 것에 대한 이해와 자신감을 주기 위한 것이었다. 그리하여 그들로 하여금 이러한 목표와 성취감을 친구들과 친지들에게 설명할 수 있게 하려 함이었다. 성취도가 무엇이든 간에 자신감이 배우려는 과목에 대하여 즐거움을 느낄 수 있게 하므로 이 글의 주된 어조는 학생들에게 연설하는 것이다. 이와 같은 물음에 연설한 사람은 우리만 있는 것은 아니다. 뮈르(A. Muir)박사(시립대학)는 몇 년 동안 '수학은 어떻게 연구하는가' 를 위한 모임을 조직하였고 미국에도 유사한 모임이 있다. 이런 토론의 대부분은 데이비스와 허쉬(Davis, Hersh), [1*, 2]가 쓴 책에 논의되어 있다.

학생들이 몇 종류의 답을 명료하게 말하는 데 도움이 되는 몇 가지 일반적인 질문으로 시작하자. 관계된 교육기관의 수준을 막론하여 모든 수학교사들에게 묻고 싶다. 수학자로 만들려면 여기에 주어지거나 제안된 이런 질문들의 답을 할 수 있게 전문적인 토론과 평가를 어느 정도 포함시켜야 하는가?

수학자들에 대한 몇 가지 기본적인 이슈

1) 수학은 중요한가? 만일 그렇다면 무엇을 위하여, 어떤 맥락에서, 그리고 왜 그러한가?
2) 다른 과목들과 비교할 때 수학의 본질은 무엇인가?
3) 수학 공부의 목적은 무엇인가?

---

1) The Mathematical Gazette No.485(1995) pp.321-334에 있는 R. Brown 과 T. Porter 가 쓴 The Methodology of Mathematics의 번역논문이다.

4) 수학의 방법론은 무엇인가? 수학이 나아가는 방법은 무엇인가?
5) 수학에서 연구는 계속되는가? 만약 그렇다면 얼마나 연구되는가? 수학의 넓은 의미의 목표 혹은 주된 목표는 무엇인가? 수학을 통해 얻는 가장 중요한 성과는 무엇인가? 수학 연구를 수행함에 있어 어떻게 해야 하는가?
6) 훌륭한 수학이란 무엇인가?

아마도 어떤 이들은 이런 질문들이 핵심을 벗어나고 있으며 시간 낭비이고 진정한 수학자가 생각해야 할 것이 아니라고 할는지 모른다. 이에 대하여 앨버트 아인슈타인(1916)[3]의 말을 인용하고자 한다.

'통상적으로 말하는 재능 있는 과학자가 어떤 지식의 이론에 스스로 관심을 갖게 되기까지 어떻게 하는가? 자기 자신의 분야에서 더 가치 있는 연구가 이루어지지는 않았는가? 나는 이런 질문을 많은 동료 학자들에게서 듣는다. 혹은 오히려, 이들 중 많은 경우 그들이 느끼는 그대로이다.

나는 이런 의견에 동감하지 않는다. 내가 가르칠 때 만났던 능력 있는 학생들- 즉, 민첩성뿐 아니라 독립성과 판단력으로 다른 사람보다 특출한 학생들을 회고해 볼 때- 이들은 지식 이론에 생동감 있는 관심을 가진다는 것을 알 수 있었다. 이들은 과학의 목표와 방법에 관한 토론을 시작하기 좋아하며 이 주제가 그들에게 중요하다는 의견을 고집스럽게 옹호하려는 완고함을 뚜렷이 보여 주었다.

이것은 그다지 놀랄 만한 것은 아니다. 왜냐하면 내가 돈을 번다든가 야망을 이루려 하는 어떤 피상적인 이유 때문도 아니고 두뇌 경기라는 승부의 즐거움 때문도 아니지만 과학을 하려 했을 때 다음과 같은 물음들이 과학의 사도로서의 나를 정열적으로 흥미롭게 하였다. 내가 헌신하려는 과학에 의해 도달되는 목표는 무엇인가? 어느 정도까지 그 목표의 일반적 결과가 "참"일까? 본질적인 것은 무엇이며, 무엇이 단지 발전의 우발적 도래에만 기반을 두고 있는가?

사물의 질서를 잡는 데 유용하다고 알려진 개념들은 우리로 하여금 너무 커다란 권위로 작용하므로 이들이 어떻게 세상에 나왔는지를 잊어버리고 어쩔 수 없는 사실로 받아들인다. 그래서 이들은 "개념적 필요", "선험적 상황" 등등으로 이름 붙여지는 것이다. 과학 진보의 길이 이런 실수 때문에 오랜 기간동안 자주 막혀 왔다. 따라서 친숙한 개념들을 분석하는 능력을 기르고, 이들을 정당화하고 쓸모 있게 하려 할 때 해야 하는 조건들, 그리고 이 서서히 발전하는 이 조건들의 발달 방식을 알리는 것이 단지 바보 같은 일은 아닌 것이다 …'

위의 질문을 생각하는 데는 권위와는 다른 수많은 질문이 생기게 된다. 우리와 함께 제기된 이런 질문들에 대해 토론하던 영국의 수학 교수는 이 토론을 통하여 학생들로 하여금 수학의 방법에 대해 생각해 보게 할 수 있을 거라고 하였다. 마치 처음 대하는 일처럼 그는 덧붙이기를, 인류와 다른 동물과는 잘 알려진 차이가 있으며, 인간들은 자신이 하는 것이 무엇인가를 생각하는 능력을 갖고 있고 이 능력으로 인해 많은 인간의 활동에 유익한 영향을 준다는 것이다. 이런 생각의 일면에는 가치판단이라는 개념 즉, 다시 말하면 다른 동물들이

공유하지 못한, 아니면 최소한 크게 보았을 때 그들과는 의사 소통이 되지 않는 어떤 방식이 있기 때문에 나눌 수 없는 재능과도 같은 것이다.

활동에 대한 생각은 일반적으로 효과를 증가시키는 유용한 방법인데, 마치 우리가 가장 중요한 것, 기본이 되는 것이 무엇이며 방법상 어떻게 해야 가장 저지르기 쉬운 오류를 범하지 않으면서 활동을 할 수 있는 지를 분석해 낼 수 있는 것과 같다. 이런 바탕에서 수학 활동에 대해 생각해 보는 것이 이치에 맞을 것이다. 우리는 항상 활동의 가치를 생각으로는 알고 있다.

이런 질문들에 대해 깊이 생각하는 또 다른 이유는 예술에 있어서 교육의 일면과 비교하기 위함이다. 예술과 디자인 교육이 학생들의 흥미와 자유로움을 유발하는 데 있어 과학교육보다 상당히 앞선다고 하는 주장이 제기되어 있음을 들은 적이 있다. 그래서 이런 교육자들은 어떻게 일을 진척시키는지 살펴볼 필요가 있는 것이다. 다음은 디자인 코스를 위해 주어진 목적이다.

1. 학생들에게 우수 디자인의 원리를 가르친다.
2. 자유로움과 창의성을 북돋워 준다.
3. 학생들로 하여금 일련의 실제적인 기술을 습득하게 하여 근무시 훌륭한 디자인 이론들을 응용할 수 있게 한다.

여기에서 수학 교과과정이 얻을 수 있는 무엇이 있는가? 무엇보다도 "디자인"이란 단어를 "수학"이란 말로 대체할 수 있을 정도로 일련의 수학의 목적에 부합하는가? 그렇지 않다면, 왜 그렇지 않을까?

단치히(T. Dantzig)[4]의 책에서 따온 또 다른 인용문을 보자:

> '이 책은 수학에 관한 것이다. 이 책은 기호와 형식을 다루며, 기호나 형식의 배경에 있는 아이디어들을 다룬다. 저자는 우리의 현행 학교 교과과정이 그 문화적 맥락을 무시하고 단순히 기술상의 뼈대만 남긴 채 우수한 정신은 몰아내 버렸다고 생각한다. 이 책의 목적은 이런 문화적 맥락을 복구하여 완전히 인간적인 이야기로서의 수학 혁명을 제시하는 것이다.'

인용 글에 보다 높은 수준의 수학 교육의 관점에서 무엇인가 있는가? 이 책은 1930년대에 처음 쓰여진 것이다. 그 때 이후로 그가 제기한 점들을 다루는데 크게 진보하였는가?

이제 질문들을 하나 하나씩 다루어 보기로 하자.

수학의 중요성은 무엇인가?

우리의 일상생활에서 보면 수학이 얼마나 많은 부분을 차지하고 있는지에 대하여 일반적으로 인식되고 있지 않다. 수학의 어떤 부분은 상당히 오래된 것이다. 즉, 우리는 수, 그래프, 덧셈과 곱셈을 매일 사용한다. 이런 것들의 발명이 굉장한 발견이었음을 잊기 쉽다. 로마 숫자가 아라비아 숫자로 대체되고 따라서 좋은 부기 방식의 가능성이 생기자 14세기 베니스의 번영이 이루어졌다고 한다. 수학에서의 선례의 중요성을 지적하는 것도 흥미 있을

것이다. 아라비아 기수법의 요점은 수 0을 사용한다는 것이다. 처음에는 빈 상자에 있는 사물들의 수를 센다는 것이 어리석어 보였을 것이다. 놀라운 것은 수 0이 자리를 표시하는 부호로서 쓰이는 적당한 기수법에서는 이런 것이 무척이나 중요하다는 것이다. 0의 개념이 없었기에 수세기 동안 수학의 발전이 늦춰졌다.

보다 높은 수준에서 보면, 오류 수정 부호 수학이 없었더라면 보이저 2호로부터 목성의 아름다운 사진들을 받아 볼 수 없었을 것이다. 이런 수학은 원격 통신과 컴퓨터의 다방면에서 특히 콤팩트 디스크 연주기에 있어 기본이 되는 것이다. 이런 최근의 응용에 대하여 재미있는 이야기가 있다[5]. 콤팩트 디스크에 대한 표준안을 놓고 소니와 네덜란드 회사인 필립스 사이의 협상은 최고 경영진에 의해 이루어졌다. 일본인들은 필립스의 오류 수정안이 자기네 것보다 열악하다고 생각했고, 결국 일본 안이 받아들여졌다. 당황한 경영진은 아인드호벤(Eindhoven)으로 돌와와서 과학 담당 이사에게 소위 '부호 이론'이라는 분야의 전문가가 많지 않다고 하며 진짜 전문가를 유럽에서 찾아내겠다고 하는 것이다. 놀랍게도 대답은 "아인드호벤에 있습니다."였다! 그가 바로 네델란드 수론가 밴 린트(Van Lint)였다.

암호 수학이 없었더라면 세계를 가로지르면서 수십억 달러가 관련된 현 수준의 전자 이체가 가능하지 못하였을 것이다. 현재, 카테고리론과 수학구조론의 수학은 차세대의 프로그램과 소프트웨어의 디자인을 위한 미래의 논리학과 대수학에 새로운 통찰력을 주고 있다.

기계공학, 통계학, 물리학에서의 수학의 대대적인 응용은 상식이다. 수학의 역할이 슈퍼컴퓨터의 사용으로 강화되고 있다고 믿어진다. 슈퍼 컴퓨터는 수학적, 개념적 공식화에 기여할 수 있다고 여겨지지는 않는다. 전자공학은 계산을 그렇게 빠르고 정확하게 하는 것에 대해 놀라워하고 있다. 예를 들어 신체 스캐너는 빛의 위치를 수없이 변화시켜 신체에 투과시켰을 때 강도의 변화만이 유일한 측정량인 X-레이의 관측으로부터 밀도가 일정하지 않은 입체를 재구성하는 방법을 기술하는 19세기 수학을 응용하고, 현실화시킨 것이다. 기본 입자들의 대폭발 이론도 수학 없이 가능하지 못했을 것이다.

수학의 본질은 무엇인가?

미스터리가 있다. 노벨상 수상자인 위그너(E. Wigner)는 "자연 과학에서의 수학의 비이성적인 효율성"[8]이라는 유명한 수필을 썼다. 우리에게 핵심이 되는 단어는 '비이성적인'이라는 말이다. 그는 수학의 사용이 아홉 자리 유효 숫자까지 실험과 일치하는 예측을 가능케 할 수 있었음에 놀라움을 표시하고 있다. 어떻게 이런 놀라운 정확성이 가능할까?

수학이 성공할 수 있었던 것을 완벽하게 '설명'하려면 현재 가능한 것 이상의 심리학, 두뇌의 구조와 작용에 대한 이해가 더 필요한 것 같다. 더 나빠지면, 이런 연구들의 발전에는 아마도 반드시 새로운 종류와 타입의 수학이 필요할는지 모른다. 여전히 수학의 범위와 한계를 분석하는 것이 중요하다. 이런 분석이 학생들에게 수학을 교육하고 평가하는 부분으로 필요하게 되는 것은 지당한 일이다. 이런 것들을 모르는 학생이 무슨 소용 있을까?

위 수필 중 몇 개의 인용문을 보자.

'자연과학에 있어서 수학이 대단히 유용하다는 것은 신비스런 어떤 것과 비슷하며, 그것에 대한 합리적인 설명은 불가능하다.'

'수학은 이런 목적을 위하여 발명된 개념과 법칙의 기교적인 연산의 과학이다.'[이런 목적

이란 기교적인 연산이다 ...]
'주된 강조점은 개념의 발명에 있다.'
'수학 개념의 형성에 쓰이는 사고의 깊이는 이 개념들이 쓰인 기교에 의해 후에 정당화된다.'
'자연법칙이 수학의 언어로 쓰여졌다는 명제는 정확히 300년 전에 생겼다 [이것은 갈릴레오의 업적이다] ; 지금은 이전 어느 때보다 더 이 말이 들어맞는다.'
'내가 아는 바 수학개념이 물리학에서 꽃피운다는 것에 대한 설명에 근접한 것을 살펴보자면, 우리가 아름다운 것으로 인정하는 유일한 물리이론인 아인슈타인의 명제라는 사실이다. 너무나 많은 재치들을 이끌어 내는 수학 개념들은 심미성을 가지고 있다고 주장한다.'

이에 대해 논의하려면 수학을 다른 과목과 비교해 보고 그 과목의 연구 목적이 무엇이며, 중요성이 무엇인가라는 질문과 연계해 보는 것도 흥미로운 일이 될 것이다.
몇몇 동료 과학자들에게 그들이 그 과목을 연구하는 이유에 대해 질문을 던진다고 가정해 보자. 대답은 다음과 같을 것이다.

천문학자: 천문학에서는 우주의 시작과 수십억 년의 시간의 흐름, 뿐만 아니라 머나먼 거리의 공간까지도 연구한다. 어떤 것도 이보다 매혹적이 아닐 것이다. 세계에 여러 종류의 천체 망원경이 있고 연구비도 있지만 충분하지는 않다.

물리학자: 물리학에서는 물질의 기본 요소에 대해 연구한다. 어느 것도 이보다 흥미롭지는 않을 것이다. 예를 들어 물리학이 없다면 천문학도 없었을 것이다. 그러므로 좀 더 많은 우수한 학생들이 물리학을 공부해야 하며, 정부는 많은 돈을 우리에게 투자해야 한다.

화학자: 화학에서는 분자들을 우리에게 쓰임새 있도록 만든다. 그러므로 화학은 우리 일상생활의 일부이다. 화학에 의해 발견된 지식의 이해없이는 별의 연구, 생물학의 이해, 행성들의 형성에 대한 연구도 없었을 것이다. 따라서 많은 최우수 학생들이 화학을 공부해야 하며, 정부는 좀 더 많은 돈을 우리에게 투자해야 한다.

생물학자: 생물학은 생명에 대한 것이다. 생명이 무엇인가? 어떻게 생명이 생겼는가? 어떻게 생명이 우리와 세계 사이에서 작용하는가? 우리는 모두 생명에 관심을 갖고 있다. 그러니 좀 더 많은 학생들이 생물학을 공부해야 하며, 정부는 좀 더 많은 돈을 우리에게 투자해야 한다.

공학자: 공학은 우리의 환경을 제어하여 우리를 위한 일들을 하는 물건들을 만든다. 공학 없는 현대 문명은 상상할 수 없다. 좀 더 많은 학생들이 공학을 공부해야 하며, 정부는 좀 더 많은 돈을 우리에게 투자해야 한다.

물론 이 이야기에는 주인공이 너무 많다. 또한 우리의 관심사를 지나치게 재정적인 문제와 연관하여 강조하였다. 아직도 재정이 그 활동에 붙여지는 중요성의 척도이기도 하다.

이제 수학자에게로 돌아와서, 수학자들에게 그들의 이야기와 사물들의 체계 속에서 자리를 차지하기 위한 경쟁을 하며 살아남아야 하는 정당성에 대해 물어 보자. 아주 유명한 수학자에게조차 명확한 답을 듣지 못하는 것도 있을 수 있는 일이다. 예를 들어 페르마의 마지막 정리(불행하게도, 1993년이 되어서야 그 문제의 '풀이'가 가능했던 이 대단한 일도 잘 못 알려져 왔다)로 인해 발전이 이루어졌다는 것이 중요한 업적으로 믿어졌다. 그러나 이런 풀이가 사람들을 몰리게 하거나 돈이 생기도록 하는가? 왜 그래야만 하는가? 확실히, '풀이'는 업적이지만, 그것의 일반적인 의미는 무엇인가? 왜 그렇게 많은 노력들을 그것을 위해 기울이는가? 단지 기록을 깨는 것과 같은 것인가? 이런 질문들에 대한 답은 있으나, 질문들은 오랫동안 풀리지 않던 문제에 대한 명백한 답이라는 영예를 바라고 던진 질문은 아닌 듯하다.

이런 질문들이 어리석은 것은 아니다. 자원은 제한되어 있다. 어느 사람이나 흥미도 제한적이다. 수학을 지원해 줄 만한, 그리고 사람들로 하여금 수학을 공부하게끔 설득할 만한 보다 확신에 찬 대답이 필요하다. 다음과 같은 것은 어떤가?

수학자: 수학은 패턴과 구조, 그리고 패턴과 구조를 가지고 하는 논리적인 분석과 계산을 연구하는 학문이다. 생존의 필요에 의해 촉발된 세계의 이해, 그리고 존재하는 것을 알고자 하는 욕구에 대한 우리의 탐구에서는, 추상적 의미에서 구조의 과학과 이 구조들에 대하여 무엇이 참이고, 무엇이 흥미 있는지를 아는 방법이 필요하다. 수학은 결국 기초가 되는 것이며 다른 모든 과목들에게 필요한 것이다. 이것이 여러분에게 관심을 바라는, 그리고 우리의 연구에 대한 지원을 요청하는 주장의 일부이다.

이런 주장의 또 다른 면은 우리의 연구에서 발견되는 새로운 패턴과 구조에 있어서 매혹과 경이로움, 놀라운 관계이다. 수학은 역시 겸손함도 준다. 우리는 명백히 간단하고 명확한 명제를 제외한 것들의 참을 결정하는 것이 얼마나 어려운가를 안다. 괴델(Gőodel)이 결정 불가능의 결과에서 보여준 것처럼 참인 것 모두가 증명되는 것은 아니라는 수학적 참의 한계를 알고 있다. 모든 것을 풀 수 있는 종합적인 이론과 같은 최종 답을 쓰는 수학자를 발견하지는 못할 것이다. 오히려 우리에게 세상을 보는 새로운 관점과 탐구할 풍요로움을 주는 놀라움만 발견하게 될 뿐이다. 경험상 이런 것들이 나타나리라 예상할 수 있다. 수학자에게 세계는 당신이 상상하는 것보다 이상할 뿐 아니라 현재 당신이 상상할 수 있는 것보다 이상하다. 우리의 일은 이런 이상함을 탐구해 내는 것이다.

수학 연구의 대상은 무엇인가?

이것은 이미 어느 정도 답이 주어졌다. 수학은 사물을 연구하지는 않지만 사물 사이의 관계를 연구한다. 이러한 관계의 묘사를 '개념'이라고 한다. 그러므로 도시들 사이의 거리에 대하여 논의한다고 할 때, 도시들 자체보다는 덜 '현실적'으로 느껴진다. 그럼에도 불구하고 사물들 사이의 관계와 이런 관계들에 대한 이해는 세계에서의 우리의 영향력과 세계와의 상호작용에 필수적이다. 이런 의미에서 수학은 언어의 형태를 가진다. 개념을 다루는 능력, 관계를 다루는 능력은 진보적 가치를 가져야 했었고 아마도 계속되고 있을 것이다.

이런 관점에서 수학의 성과가 일반적으로 어떤 유명한 문제의 풀이를 찾는 것으로 유지된다는 점은 의아스럽다. 물론 이런 풀이는 해결자에게 명성과 부를 가져다주며, 혹은 적어도

수학자의 세계안에서는 확실한 명성을 가져다준다. 그러나 수학과 그 응용의 역사를 살펴볼 때 수학의 지속적인 가치와 매일 매일의 사용을 가능하게 하는 것은 수학의 언어, 방법 그리고 개념들임을 알 수 있다. 우리는 일찍이 이런 예를 언급했었다. 좀 더 고등 수준에서는 이런 언어 예를 들어 군과 힐베르트 공간의 언어가 없었다면 기초 입자 물리도 상상할 수 없었을 것이다.

이런 수학화를 통하여 엄밀한 취급이 주어졌던 몇몇 위대한 개념은 다음과 같다 :

수, 길이, 넓이, 부피, 변화율, 무작위성, 계산과 계산가능성, 대칭, 운동, 힘, 에너지, 곡률, 공간, 연속성, 무한, 연역법

새로운 개념을 만드는데 일가견이 있는 그로쎈딕(A. Grothendieck)의 말에 의하면, 흔히 어떤 수학이 만드는 문제는 '어둠속에서 새로운 개념을 끌어내오는 것'[7]이라 한다. 이런 새로운 개념들은 우리가 무엇을 해야 하고 어떤 방법을 택해야 하는지 알려주어 어려운 것을 쉽게 만들어 주는 것이다.

더 중요한 것은 수학을 통하여 수학구조와 결합시킨 개념들을 다루고 정의하는 방법인 것이다. 이런 구조와 패턴들은 개념과 구조적 행동 사이의 관계를 알려준다. 전에 말했듯이 수학 연구의 대상은 패턴과 구조이다. 이런 패턴과 구조는(다음에 논의되는 개념인), 추상적이다.

수학의 방법론은 무엇인가?

널리 연구되지 않고 드문 주제로 다시 돌아오자. 폴 에도스(Paul Erdős)는 말하기를 수학은 커피를 정리로 바꾸는 수단이라고 했다. 그러나 아마도 이런 말이 초심자에게는 큰 도움이 되지 못한다. 데이비스(P. Davis)와 허쉬(R. Hersh)의 책[1,2] "수학적 경험"과 "데카르트의 꿈" 특히 첫 번째 책의 '내부의 논쟁' 장에서(pp. 170~209) 논의된 몇 가지 이슈들을 살펴보자. 이것은 많은 주제를 다루었다.

(i) 기호

기호와 기초적인 개념을 사용하는 것은 수학의 특징 중 하나이며 대중들을 내쫓아 버리게 하였다. 사람들은 x와 y가 나오기 전까지는 수학을 할 수 있었다고 말한다. 법칙에 따라 기호를 다루는 것은 아직도 수학의 중요한 기교의 일부이다. $x+2=4$에서 $x=2$라고 추론하지 못하면서도 경제학을 마스터하기를 원하는 사람들을 가르쳐야 함을 알게 되었다. 이것 때문에 경제학의 개념을 이해하는 데 어려움을 겪는다. 말로써 전달하기 어려운 매우 복잡한 관계는 기호로 표시될 수 있다. 기호가 고등 개념의 표시법으로 사용되고 기호 조작의 법칙이 개념에 대한 법칙을 모델화하는 데 사용됨에 따라, 기호를 쓰는 경제학은 점차 발전되어 간다.

과장하여 말하면 수학사는 표시법 발전의 역사라고 한다. 이것은 수학을 돕고 길을 인도할 버팀목과 비유를 필요로 하는 지성의 한계성을 반영한다.

어떤 기호는 그 자체가 비유이다. 예를 들자면 $\langle$, $\rangle$, $\leq$, $\geq$, $=$, $\rightarrow$, $\neq$, $\perp$, $\subseteq$, $/$, $\emptyset$, $\int$, $\measuredangle$ 등등이다. 다른 것들은 강한 관련을 요구하며, 그래서 우리는 이

들을 비유로서 사용할 수 있다. 기호들은 화이트헤드(A. N. Whitehead)의 말을 빌리면 '경제성과 정확성'을 가지고 표현할 수 있다. 특별한 기호의 사용은 수학자들이 그것에 익숙해지고 새 표기법을 찾아내게 되는 것처럼 시간에 따라 바뀌는 것이다.

어떤 경우에는 수학자들의 게으름 탓에 기호의 표기법이 새로운 이론을 낳기도 한다. 예를 들어 ($a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + \cdots + a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x$ 형의 표현식은 시간이 지남에 따라 Ax로 줄어들었고 이 약어의 올바른 조작을 하기 위하여 행렬 법칙이 발견되었다. 우리가 연구하는 부분의 핵심에 근접한 예를 들기 위해 필자 브라운(R. Brown)은 수학에서 선형 표기법이 인쇄의 필요성에 근거해 볼 때 필연성인지 혹은 역사적인 결과인지에 대해 수년간 관심을 기울여 왔었다. 이런 어학적인 관점에서의 분석은 새로운 종류의 '고차원 대수'에 이르게 했는데, 기호들이 단순히 왼쪽의 기호들과 오른쪽의 기호들만 관련되어 있는 게 아니라 위와 아래 수학 구조들, 혹은 지면 바깥쪽에 있는 것과 관련이 있다.

(ii) 추상화

이것은 수학의 필수적인 부분이자, 역시 대중이 수학을 이해하기 어렵게 만드는 부분이기도 하다. 위에서 말했듯이, 수학 구조는 추상적이며, 수학 구조들 사이의 관계에 의해 정의된다. 이들은 비감각적으로 생각되어진다. 추상화로 얻는 이득은 적어도 세 측면이 있다.

(a) 추상적 이론은 수많은 예에 대한 우리의 지식을 조직화해주어 이들의 공통 특징을 쉽게 습득하게 해준다. 다양하게 대치할 수 있는 하나의 이론만이 필요하다. 이런 조직화는 사물들 사이가 아닌 사물들의 행동과 관계들 사이의 유추를 탐색하게 된다. 이런 유추, 다양함들을 대신할 만한 추상적 이론을 발견하는 것은 수학에서 중요한 방법이다.

(b) 이론이 한번 사용 가능하게 되면 새로운 예로 적용해 보게 된다. 이렇게 되면 '저것은 나에게 ... 을 생각나게 하는구나!'하는 즐거움을 맛보게 된다. 이를 위해 성립된 이론의 부분이 사용되는 새로운 예가 페이지를 넘길 때 있게 된다.

(c) 추상적 이론은 더 간단한 증명을 하게 해 준다. 이것은 놀랍지만 보통 사실로 밝혀졌다. 추상적 이론은 골자가 되는 것은 가려낼 수 있게 해준다. 정리나 사실이 일반 상황에서 혹은 특수한 상황에서만 사실인지를 아는 것은 흥미있는 일이다. 추상적 이론은 가능한 엉뚱한 일면을 제거할 수 있게 해준다.

(iii) 일반화와 확장

이것은 추상화와 공통의 특징이 있기도 하나 흔히 다르게 적용된다. 따라서 (3, 4, 5) 직각삼각형의 일반화가 피타고라스 정리이고, 확장된 것은 페르마 마지막 정리이다. 즉, 방정식 $x^n + y^n = z^n$은 $n \geq 3$일 때 양의 정수해 x, y, z가 없다. 이것은 최근에 해결되었다.

(iv) 증명

증명이라는 개념의 엄밀함이 수학의 독특한 특징이다. 이것이 수학이 공학, 보안, 물리학 등등에서 필수 불가결한 이유이기도 하다.

수학에서 증명, 타당성의 개념은 일반적인 질문 - 연구 영역에서 타당성의 개념은 무엇인가?의 일면이다. 사회과학, 경제학, 화학, 생물학, 교육학, 법률, 문학 등등 각 분야에서도 타당성의 개념은 있으며, 이런 개념을 대조하고 사용하는 것도 특히 흥미 있을 것이다.

수학에서 유효한 논법으로 받아들일 수 있는 것이 무엇이냐는 질문은 아직 논쟁과 논의가

이루어지고 있는데 특히 무척 긴 증명을 하면서(예를 들어 15000쪽 [8]), 그리고 시각화, 실험, 계산을 위해 컴퓨터를 사용하는 가운데 논의가 이루어지고 있다.

(v) 수학적 대상의 존재

한 위대한 수학자는 수학 교육의 주요 문제는 수학적 대상의 현실성을 가르치는 것이라고 주장했다. 현실성이란 무엇인가? 어떤 방법으로 사물들이 존재하는가?

이런 질문은 많은 수리 철학자에게 주된 관심거리였으나, 흥미는 점점 비중이 줄어 들어가는 것 같다. 수학은 흔히 과정에 관한 것이다. 수학적 구조가 존재하느냐 하는 질문은 체스 게임이 존재하는지에 대해 물어보는 것과 같다. 확실히 체스 게임은 테이블과 의자가 있는 식으로 그렇게 존재하지는 않지만 그럼에도 불구하고 어떤 생활에 영향을 미치고 돈벌이 경쟁에서 이기게 해준다.(체스로 돈을 버는가? 대답은 확실하다. 그렇다. 예를 들어 세계 챔피온과 체스 도구를 만드는 사람에게는 그러하다.) 수학적 개념과 진행되는 방법들의 관계는 근육운동과 리듬을 기억하는 것이 수학적 업무의 중요한 면이라는 식으로 지칭된다.

수학의 많은 부분이 반복과정과 방법의 효과를 깨닫고 이해하는 것과 관련이 있다. 수학자들은 마치 방정식의 한 변에서 다른 변으로 이항하는 것처럼 주위에 움직이는 사물을 이해하고 상상하거나 공간에서 패턴을 바꾸는 데 뛰어나다. 그들은 무엇이 일어나는가를 이해시키려고 손과 팔을 사용한다. 수학자들이 말하는 대상과 아이디어는 이따금씩 그러한 기억되는 다양한 과정들의 연결이다. 글 쓸 때 이런 아이디어들의 표현을 있는 그대로거나 빈약한 상태로 대조시키기 일쑤여서 이런 대상과 아이디어들을 사용하고 응용하는 것을 배우기는 어렵다. 한편 개개인으로 하여금 이런 대상과 아이디어를 해석하고 내면화하는데 가장 적절하게 할 수 있게 한다.

(vi) 무한

무한을 다루거나 무한 연산을 포함하도록 상상력을 넓히는 것은 수학을 하는 재미의 하나인 동시에 스캔들이기도 하다. 이런 무한한 대상은 존재할까? 놀라운 것은 비현실적일 수도 있는 이런 무한한 대상들이 유한한 실제의 대상을 입증하는 데 사용될 수 있고 이것은 다시 이 주제의 풀리지 않는 신비이기도 하다. 예를 들어 이런 무한한 대상이 핵을 장치하거나 항공기 착륙 체계의 안전성을 입증하는데 사용된다고 보는가? 그러한 증명에는 어떠한 신뢰도가 있는가? 이런 것들이 진짜 이슈이다.

수학 연구는 계속되고 있는가?

실제적인 검증을 원하는 사람들은 1940년에 시작된 이래로 수학 리뷰우지(Mathematical Reviews)에서 일어난 변화에 주목해야 한다. 이 월간 잡지는 수학 논문 초록을 게재한다. 대충 말하자면 몇몇 단락만으로 다섯 쪽의 논문을 채울 정도이다. 이 기간동안 늘어난 쪽수는 열 한배 정도이다. 현재 매달 수학논문초록이 400쪽에 달하는 대형판으로 출판되고 있다. 오늘날은 정말로 양적, 질적으로 수학의 황금기이다.

이런 연구의 목적은 다양하다. 하나는 이미 잘 정의된 특별한 형태의 구조에 대한 지식의 확장이다. 또다른 하나는 적절하게 보였거나 보여왔던 것과 같이 새로운 구조 연구의 도입이다. 구조들 사이에는 새로운 관계가 있다. 구조를 설명할 구조를 찾아, 특별한 구조들이 자기들끼리 행동하여 다른 구조들과 관련되는 방식을 이해하도록 단순화시키는 것이 요망된다.

이 방면의 초보자나 일반 대중이 이해하기 어려운 것은 수학연구가 어떻게 진행되는가 하는 것이다. 여기에서 우리는 일을 해나가는 4가지 방법을 제시하면서 몇 가지 지침을 주고자한다. 분명히 더 많은 방법이 있을테고 각 개개인의 연구자들은 결국 성공하기 위해 자신의 전략을 생각해내야 한다. 수학 연구를 시작하기 전에 얼마나 많이 알아야 하는지를 알기도 쉽지 않다. 이 특별한 질문에 대한 유명한 답은 '모두 아니면 아무것도 아니다.' 였다.

방법 1: 표준적인 방법은 표준적인 형의 문제에 적용하라.

표준적인 방법에 충분히 숙련되어 있다는 전제하에 이것은 성공을 보장한다. 이 방법은 아마 성공적인 모든 연구 과제의 일부일 것이다. 실제로 수학연구의 공통 방법은 이미 생각한 문제로 귀착시키는 것이다. 원래의 문제가 너무 어려울 때의 표준적인 전략은 새로운 문제를 만드는 복잡성을 첨가하기 전의 표준형이 되도록 문제를 단순화시킨다. 쉬운 것만 할 수 있다는 일반적인 전제가 있다. 그러므로 문제를 쉽게 보이는 형으로 바꾸는 것도 방법이다. 불확실하면 먼저 쉬운 것부터 해보라. 표준적인 방법을 응용하는 데 연습을 하여 익숙해진 사람들은 어느날 어느 누구도 생각지 못했던 문제에 자신의 기술을 응용할 수 있고 이로 인해 새롭고 중요한 결과에 이를 수 있음을 깨닫게 될 것이다. 수학자들의 교육의 대부분은 선정된 분야에서의 연구에 적합한 기술과 지식을 습득하는 데 관련이 있다.

방법 2: 지식의 미개척 분야에 있는 유명한 문제를 공략하라.

이것은 지식의 정점에 있는 유명한 문제로의 전략이다. 만일 성공한다면 당신은 유명해진다는 것이 유리한 점이다. 당신의 성공률을 계산하는 것은 더욱 어려울 것이다. 아마도 새로운 아이디어가 필요할 것이다. 이것은 젊은이에게 가장 야심찬 방법으로 보인다. 그러나 울람(S. Ulam)이 1964년 필자(R. Brown)와의 대화에서 이 방법은 야심찬 젊은이에게 크게 어필할 수 있지만 결국은 다른 사람의 문제를 푸는 것이므로 아무리 집중해도 가장 개인적이고 개성있는 종류의 수학을 만들 수는 없으리라 제시했다. 그러나 우리는 대개 지식의 경계부분에서 작은 문제들, 성공술이 더 커서 노력을 그렇게 많이 들이지 않아도 되는 문제를 공략한다. 무엇이 이루어졌고, 어떤 테크닉이 적용되며, 완벽히 해내야 하는게 무엇인지 알아낼 때까지 거의 완벽하게 연구해야 할 것이다.

성공여부를 확실히 아는 문제: 답이 가부인 문제를 다루어 보는 것도 도움이 된다. 반면에 수학자들은 성공 가능성이 많은 것과 적은 문제를 다룰 수 있는 전략을 세워 둘 필요가 있다.

방법 3: 다른 분야의 지식들을 연관시켜라.

이 방법으로 다른 분야의 시작 부분에 대하여 배우고, 그들 사이의 관계도 알게 된다. 따라서, '최고의 수학자'가 흔히 정상을 쌓아가려고 마음을 빼앗기고 있는 사이 이 정상들 사이의 갭을 채워라. 이 방법의 이점은 두 분야 사이의 무언가를 배운다는 것이다. 이는 박사학위 논문을 위한 좋은 방법이 될 것이다. 왜냐하면 지도교수는 자세한 부분을 연구해 보지 않고도 관계를 쉽사리 알 수 있기 때문이다. 수학의 일반적 통합성을 진척시킬 것이다. 또 다른 이득은 당신으로 하여금 갭을 메꾸는 데 도움을 주고 앞으로 진행될 일들을 예상하게 해주는 작지만 유용한 결과들을 증명하는 아이디어를 얻게 해 준다.

방법 4: 지나치게 이상적인 연구

반드시 존재해야 하며 수학의 특징이기도 한 수학의 몇 가지 아이디어가 있다. 수학을 이루어야 하는 일종의 바탕이 되는 것들에 대해 몇 가지 힌트가 있다. 문제가 되는 것은 적절

한 수학에는 정의, 예, 명제, 정리, 증명, 계산, 그리고 앞에 있지 않는 것이 요구된다. 그래서 이들은 오랜 시간에 걸쳐 모아져야 한다. 이것이 어떤 순서에 의해서 되어야 하며, 이런 일이 얼마나 중요한 것일까? 이런 것들도 이론이 성립되기 전까지는 심사되기 힘들고 마치 비너스 아나다이아민(Venus Anadyamene)처럼 바다 속에서 완전히 형성되어 떠오르는 이론도 아닌 것이다. 하나의 이론은 수년간의 여정을 거쳐 누적되고 일련의 탐색 작업의 중요성에 대한 인식도 긴긴 행로에 있어 동기를 부여하는 게 필요하다.

수십 년간, 이런 종류의 연구뿐 아니라 다른 연구들도 이루어지고 있다. 저자(R. Brown)가 1960년대 중반에 고차원 대수의 이론을 만들어 냈다. 이 대수에서는 기호들이 일직선 상의 왼쪽 오른쪽에 있는 기호들과 관련있을 뿐 아니라 위와 아래 또는 쪽으로 있는 기호와 관련이 있다. 기하에 더 밀접하게 관련된 대수가 목적이었고 좀 더 일반적인 형의 합성을 하게 해 주는 것이다. 이 대수가 몇 개의 공식화와 새로운 정리의 증명, 자연히 새로운 계산법을 유도하는 것을 예상했었다. 이것은 이 연구에 참여한 많은 사람들에 의해 결국 옳다고 입증되었다. 그러나 오랫동안, 예를 들어 5년간 이런 생각들이 반드시 작용해야 한다는 것을 암시하는 상황이 펼쳐짐을 말해 줄 뿐이었다. 그림과 기하에 대응하는 대수를 표현해 줄 구조물이 빈약하다는 것이 문제였다. 이 구조물은 서서히 만들어졌으며 일단 '맞는' 방식으로 생각하기만 하면 자연스럽고 꼭 맞는 방법임을 알게 되는 것이 훨씬 더 놀라운 일이 되었다. 따라서 이미 인용된 위그너(Wigner)가 제안했던 것처럼 적절한 이론에 대한 심미학적 기준이 충족되었고 그 이론은 이런 이론을 촉발시킨 시각보다 더 훌륭하게 되었다.

역설적으로 연구에 있어 성공의 비밀은 어떻게 실패를 성공적으로 관리하느냐이다. 만일 당신이 절대로 실패하지 않는다면 당신 자신에게 주어진 임무는 너무나 쉽기 때문이다. 흥미로운 연구는 위험이라는 요소를 내포한다. 일이 잘못되었을 때의 상황에 대처할 전략을 세워둬야한다. 문제는 증명하기에 너무 어려울 수도 너무 쉬울 수도 있기 때문이다. 다음에 오는 것은 무엇인가? 무엇보다도 실패의 이유를 대한 분석하고, 이 문제를 해결하는 데 필요한 이유와 실패 원인을 비교하는 것이 앞으로의 연구를 위한 교훈이 될 것이다.

훌륭한 수학이란 무엇인가?

여기에서 이것에 대한 최종적 대답을 하고 싶지는 않으나 우리 모두는 우리가 찾고자 하는 면 중 몇 가지를 추구하고 확립해야 한다. 잡지의 편집자인 우리들은 진실로 일상의 논거에 의해 이 물음에 대한 판단을 내려야만 한다. 새 수학논문에 대해 우리는 질문을 던진다. 결과가 새로운 것인가? 현재의 참고 문헌보다 얼마나 앞서 갔는가? 논문은 명확하고 잘 쓰여졌는가? 그 방면에 있어서의 최근의 업적과 저자는 명확한 유사성을 갖고 있는지, 그리고 그 방면에서의 자신의 결과와 관련은 있는가? 결과는 얼마나 놀라운 것인가? 방법은 얼마나 세련되었는가? 새롭게 도입된 방법은 있는가? 소위 최고의 수학이라고 하는 것들의 일부는 예전에 어려웠던 것을 쉽게 만드는 새로운 아이디어와 개념을 도입하는 것이다.

이것은 수학이 어려워 보이고 그 때문에 마치 찬물 목욕을 하는 것처럼 당신에게 좋은 일이라고 느끼는 것과는 정반대이다. 좋은 수학은 아마도 쉬워야 한다. 흔히 우리는 이렇게 하는 방법을 모른다. 아마도 놀라운 전환을 통한 놀라운 결론과 명백히 간단한 논쟁의 결합은 우리가 최고로 좋아하는 것이다.

우려되는 것은 많은 젊은 수학자들이 논쟁이 되고 있는 '훌륭한 수학'에 대한 개념조차 없이 교과 교육을 받는다는 것이다. 그러나 인간 활동에 있어 사회적으로나 개인을 위하여 인간 활동의 가치를 묻는 물음이 존재한다. 어떤 과목을 가르칠 때 반드시 그 과목의 전문적인 가치의 무언가를 반영시켜야 한다. 예를 들어 전문 지식인에게는 대답만 하는 데 그쳐서는 안되고 가능하다면 만족스런 설명까지도 하는 것이 중요하다.

따라서 우리는 학생들에게 훌륭한 해설의 개념을 알려주고 이들에게 문제 해결 경쟁만 시키지 말고 수학적 원리와 응용을 해설하고 제시하도록 하는 이점들을 주장한다. 우리는 상당히 교훈적인 수학적 게시물을 만드는 연구를 수행했다. [9,10]

결 론

더 이상 연구할 기초 수학이 없다는 관점이 있다. 이 견해는 물리학이 끝났고 기본 문제는 이미 해결되었다고 말하는 사람들의 생각에 필적한다.
우리는 이와는 반대로 수학이 혁명, 조용하지만 틀림없는 혁명을 경험하고 있다고 느낀다. 여기에는 두 가지 면이 있다.

먼저 계산상의 혁명이다. 수 계산, 그래픽 계산에 대하여 이런 혁명은 잘 알려져 있다. 덜 알려진 것은 기호와 공리를 조작할 수 있는 컴퓨터 소프트웨어와 자동 추론을 수행할 수 있는 소프트웨어 등이다. 이론상 이런 것들은 수학자로 하여금 현재 할 수 있는 것보다 수백만배 더 계산하고 추론하는 능력을 주고, 이전에는 다루기 힘들었던 시스템의 컴플렉서티를 다룰 수 있는 능력도 준다. 많은 연구가 진행 중임에도 불구하고 수학 교육에 대한 이런 것들의 전망되는 효과는 적절하게 이해되거나 평가되어야 한다. 연구의 효과는 이미 상당해졌고 그 영향면에서도 커지는 경향이다.

좀 더 민감한 것은 개념적인 혁명이다. 구조의 연구로서 수학에 강조점을 두는 것은 카테고리론, 구조의 수학적 대수적 연구에서 수학화를 하게 한다. 카테고리론은 수학에서의 기초적 개념, 예를 들어 논리학과 집합론등에 새롭게 접근하였다. 그리고 수학의 훈련은 전통적으로 구해졌던 한 가지 바탕뿐 아니라 대안이 될 만한 환경과 구조물까지 필요하다는 아이디어를 높이 사게 하였다. 이런 아이디어들은 컴퓨터 과학의 발전에 중요한데, 예를 들어 데이터 구조에 있어 새로운 접근법 등이다.

수학의 즐거움 중 하나는 서로 상호 작용하는 다양한 단계 중에 작용하는 방법이라는 것이다. 따라서 수학적 구조의 대수적 연구는 그 자체가 새로운 수학 구조로 이끌었다. 이런 구조들 중 일부는 수학과 물리에 있어서 뛰어난 응용이 이루어 졌다.

그럼에도 불구하고 수학에 있어 여전히 현존하는 위험성이 있다. 일반적으로 수학자가 성취한 것과 수학의 중요성에 대한 칭찬이 부족하다. 이것의 일부는 수학자들이 학생, 일반

인, 정부와 기업에게 넓게 자신들의 과목을 규정하고 설명해 주는데 실패한 데서 기인한다. 수학에서 연구를 계속해야 한다는 각성 없이도 학생은 수학에서 좋은 학점을 받을 수도 있다.

컴퓨터에 대한 늘어나는 신뢰는 또 다른 위험을 안고 있는 데 이것은 마치 관여된 과정이나 조작되도록 의도된 개념의 이해 없이도 답을 주는 블랙박스로서 컴퓨터를 생각하는 것이다. 따라서 컴퓨터의 범위와 한계 모두 이해하는 데 실패할 수 있으며, 아마 수학적 기초는 무시되어 발전될 수 없고, 컴퓨터는 소프트웨어 디자인에 의해 제한적으로만 사용되어지기도 한다. 일부 기계 제작사는 소프트웨어 팩키지를 조절하는 공학자를 선호하여 수학 연구부서 없이 지내고 있다. 이것이 상품의 안전성과 신뢰도를 보장하며, 가장 진보된 수학 개념을 사용할 수 있게 해주는가?

이런 위험을 피하려면 우리가 이야기 꺼낸 물음들에 대한 이해와 격려가 필요하다.

수학자들의 개념적 선견지명을 과학적이고 기술적인 응용에 있어 실현되도록 전환시키는 과정을 가속시키는 방법이 있을 수 있다. 이 방법을 찾기 위해, 사회에서 수학자들의 업적을 진실로 이해해 주어야 하고 우리가 몸담고 있는 사회에서 역할을 수행하는 방법을 이해해야 한다. 우리가 사랑하는 과목을 위하여 이런 이해를 개발해야 할 방법을 찾는 것이 우리의 책임이다.

참고문헌

1. P. Davis and R. Hersh, The Mathematical experience, Penguin (1981).
2. P. Davis and R. Hersh, Descartes' dream, Penguin (1988).
3. A. Einstein (1916) Quoted in Mathematical Intelligencer, 12 (Spring 1990) p. 31.
4. T. Dantzig, Number: the language of science, (second edition), Macmillian (1954). 5. J. van Lint, (1994) Private communication.
6. E. P. Wigner, The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences, Comm. in Pure Appl. Math. (1960). reprinted in Symmetries and reflections: scientific essays of Eugene P. Wigner, Bloomington Indiana University Press (1967).
7. A. Grothendieck (1985) Private communication.
8. S. Gorenstein, The enormous proof, Scientific American (December 1985)
9. Bangor Maths Exhibition Group, Mathematics and knots, Exhibition for the Pop Maths Roadshow, 1989 (16 A2 boards), also brochure, published by Mathematics and Knots (1989).
10. R. Brown and T. Porter, Why we made a mathematical exhibition, in The Popularisation of Mathematics (ed. G. Howson and P. Kahane), Cambridge University Press (1992) pp. 51-64.