Journal of Historia Mathematica Vol. 9. No. 1, (1996), 58 - 69.

수학사는 교수와 학습을 증진시킬 수 있다[1)]

Shmuel Avital

광운대학교 수학과 **허 민**[2)] 옮김

중등학교 학생 대부분은 학교에서 배우는 수학을 역사가 전혀 없는 과목으로 인식한다. 교사는 이 과목에서 배워야 할 모든 내용의 정보원이 되며, 교사의 업무는 그런 지식을 학생에게 전달하는 것이다. 통상, 가르치는 과정에서는 수학의 창조 과정과 수학 문제와의 오랜 분투 과정에 대한 이해가 완전히 결여되어 있다. 대부분의 학생에게 수학은 완성된 과목이며, 해답의 옳고 그름을 결정하는 교사의 마음속에 위치하는 과목이다. 이런 상황은 수학 교육에 특히 해로우며, 대부분의 다른 과학 과목의 교육에서보다 더욱 해롭다. 수학은 본질적으로 누적되는 과목이다. 수천 년 전에 창조된 수학의 대부분은 내용과 과정에서 오늘날에도 여전히 유효하다. 학생들을 이런 발달에 노출시키면 이 과목을 활기차게 만들고 학생들에게 부드러운 과목으로 만들 수 있다.

현재의 상황을 변화시키고자 원한다면, 교사를 통해 이루어져야 한다. 통상, 중등학교 교과 과정은 수학사를 거의 고려하고 있지 않다. 교사가 이런 상황을 바꿀 수 있는 최선의 방법은 수학의 역사적 발달에 대한 적절한 언급을 통해 자신의 가르침을 풍부하게 만드는 것이다. 교사의 가르침이 학생들에게 더욱 의미 있도록 만들기 위해서, 역사를 이용해서 수학 교사를 교육시키는 것이 우리의 책무이다. 그러므로 이런 목적을 성취하는 방법을 찾는 것이 우리 앞에 놓여진 문제이다. 예비 교사와 현직 교사의 교육에 대한 연구를 통해, 교사는 자신이 배운 방법대로 학생들을 가르치려는 경향이 있다는 사실이 밝혀졌다. [8, pp. 178, 180-181]을 보라. 그러므로 우리의 목적을 성취하기 위해서는, 예비 교사들이 앞으로 가르치게 될 때 직접 적용시킬 수 있는 방법을 그들에게 제시해야 한다. 이런 탐구는 수학의 역사적 발전을 분석하고 교육적으로 매우 가치 있는 개념에 대한 조사를 유도한다. 중등학교 수학을 가르치고 배우는 과정에서 마주치는 문제들을 선별해야 하며 교사가 그런 문제들을 좀 더 잘 이해하고 대처하도록 도와줄 수 있는 수학사의 발달을 지적해야만 한다. 본 글에서는 수학의 역사적 발달에 대한 지식과 이해가 교수와 학습의 네 가지 특정한 영역에 어떻게 공

1) 이 글은 *Learn from Masters*(The Mathematical Association of America, 1995)의 pp. 3-12에 실린 Shmuel Avital의 논문 "History of Mathematics Can Help Improve Instruction and Learning"을 번역한 것이다.

2) 광운대학교 기초과학연구소

헌할 수 있는지를 논의하겠다. 그 영역들은 다음과 같다.

1. 학생의 학습의 어려움에 대한 인식을 얻기
2. 교수 방식을 개선시키기
3. 가르칠 때 문제 풀이와 문제 제기를 결합시키기
4. 수학의 창조와 학습에서 감성적이고 정서적인 요인에 관심을 유도하기

역사를 관찰해서 학습의 어려움을 이해하자

수학사에서 매우 느리게 수용된 발달을 많이 접하게 된다. 수학자들이 자신의 영역에서 중요한 발전적인 진보를 이룩했지만 그 이후의 수학자들에 의해 무시된 사례를 매우 자주 찾아볼 수 있다. 역사적인 발전 과정에서 찾아볼 수 있는 그런 영역과 유사한 영역에서 중등학교 학생들이 학습의 어려움을 경험한다고 추측하는 것이 정당하다고 믿고 있다. 세 가지 예를 나열하겠다.

1. 음수의 수용

중등학교에서 가르쳐본 경험이 있거나 교사 교육에 관련된 사람은 학생들이 음수를 이해하고 연산하는 데 어려움을 갖고 있다는 사실을 알고 있다. 학생들은 $a-b$가 $a+(-b)$와 동치이고 $(-a)(-b)=ab$이며 $-a$가 반드시 음수를 나타내지 않는다는 사실 등을 이해하는 데 어려움을 갖는다. 일반적으로, '수'에 대한 공통된 인식에서 음수는 양수에 비해, 심지어 수 0에 비해 이차적인 자리를 차지함을 발견한다. 15-16세 학생에게 다음과 같이 질문해 보자. "주어진 수에 다른 수를 더해서 그 주어진 수보다 작은 결과를 얻을 수 있는가?" 학생들에게 자신을 답을 적게 하자. 그러면 몇 명의 '천재'를 제외하고는 정답을 얻지 못할 것이다. 이를 시도해 보라. 학생들의 반응을 연구하는 것은 매력적이고 효과 있는 활동이다.

수 개념의 역사적 발달은 음수의 도입에 대한 완강한 저항을 보여준다. 방정식의 해에 대한 고대의 연구 대부분은 음수 근을 고려하지 않았다. 6세기의 인도 수학자들과 훨씬 더 이전의 중국 수학자들은 음수에 관한 모든 연산 규칙을 활용했다. 그러나 3세기 뒤의 아랍 수학자들은 인도의 수학을 분명히 알고 있었지만, 그들의 연구에서 이런 것들을 전혀 찾아볼 수 없다. 그보다 훨씬 뒤인 17세기에 프랑스 수학자 파스칼(Blaise Pascal, 1623-1662)은 음수의 도입 필요성을 전혀 느끼지 못했다. 19세기에도 영국 수학자 드 모르간(Augustus de Morgan, 1806-1871)은 0보다 작은 수를 상상할 수 없다고 생각했다. [9, pp. 252, 593]을 보라. 음수는 복소수와 함께 16세기에 약간 받아들여졌다. 카르다노(Cardano, 1501-1576)가 삼차 방정식에 대한 대수적 해법을 발표했을 때, 서로 다른 세 개의 실근을 갖는 삼차 방정식을 풀기 위해서는 반드시 복소수, 즉 음수의 제곱근을 사용해야 한다는 사실이 밝혀졌다. 19세기에 이르러서야 음수는 수 체계에서 완전히 확고한 위치를 차지하게 되었다. 이스라엘의 바이츠만(Weizmann) 과학 연구소에서 실시한 연구는, 음수의 역사적 발달에 교사를 노출시키는 것이 학교에서 이 주제에 어려움을 겪는 학생들을 그들이 이해하는 데 도움을 줄 수

있다는 추측을 일부 옹호하고 있다. [1, p. 10]을 보라.

2. 상징적 기호의 사용

수학에서 상징적 기호를 수용하고 사용하는 경우에도 유사한 상황이 발생한다. 기호의 의미를 이해하고 능숙하게 사용하는 능력을 발달시키는 데 있어서의 어려움은 학교에서 대수학의 학습에서 주요한 장애물 중 하나이다. 두 가지 요인이 관련된 것을 보인다.

(i) 몇 가지 기호는 완전히 다른 의미를 갖고 있지만 매우 유사하게 보인다. 다음 식에서 시각적인 유사성을 고려하자. $2+2$, 22, $2 \cdot 2$, 2^2 또는 a_2, $2a$, a^2. 방정식 $ax+by=c$에서 상수와 변수 사이의 차이점을 고려하자. $\cos x/\cos 2x$를 접했을 때 cos와 x를 소거해서 답 1/2을 얻는 학생에게 놀랄 필요는 없다.

(ii) 몇 가지 기호는 대단히 많은 양의 정보를 포함하고 있다. 예를 들어 식 $|x-2|$를 고려하자. 더욱 어려운 경우로, $x^2/|x|$을 간단히 하거나 값을 찾으려고 할 때 분모와 분자는 모두 양수이지만 x 자체는 음수 값을 취할 수 있음을 학생은 명심해야만 한다.

수학 기호 체계의 역사적 발달이 겪은 어려운 경로를 잘 알고 있다. 그리스 수학자 디오판토스(Diophantus, 250년경)는 연산을 위해 축약된 기호, 즉 약어를 사용했다. 그는 미지수에 대한 기호도 사용했다. 그런데 아랍 수학자들은 디오판토스와 인도의 연구를 알고 있었지만 8세기와 9세기의 그들의 문헌에서 이런 기호를 전혀 찾아볼 수 없다. 바빌로니아 사람들은 수메르 단어를 그림 기호의 형태로 사용해서 어떤 문제에 나타나는 미지수를 표현했다 [9, p.10]. 이런 기호 중 어떠한 것도 아랍 수학자 알콰리즈미(Al-Khwarizmi, 825년경)의 연구에서 찾아볼 수 없다. 알콰리즈미의 책들은 라틴 말로 번역되어 중세 유럽 수학에 영향을 미쳤었다. algebra(대수학)이라는 용어를 파생시킨 책 **이항과 소거의 과학**(Hisab Al-jabr W'al Muqabalah)은 단 하나의 수학 기호도 포함하고 있지 않다.

수학 기호 체계의 역사적 채택의 어려움은 계수와 같은 부류의 수를 나타내는 문자 사용의 느린 수용에서도 찾아볼 수 있다. 예를 들면, 수학자 클라인(Morris Kline)은 그리스 수학에 대해 다음과 같이 지적했다.

> 그리스에서는 문자들이 대수적 방법론의 효율성과 일반성을 높이는 데 어마어마한 공헌을 할 수 있다는 사실에 대한 인식이 전혀 없었다[9, p. 144].

프랑스 수학자 비에트(François Viète, 1540-1660)는 서로 다른 부류의 수에 대해 서로 다른 문자를 사용하는 데 뛰어난 공헌을 했다. 그는 상수에 대해 자음을 사용하고 변수에 대해 모음을 사용함으로써 상수와 변수를 구별하자고 제안했다. 그러나 이와 같은 일관된 표현 체계가 일반적으로 받아들여진 것은 데카르트(Renè Descartes, 1596-1660) 시대에 이르러서야 성취되었다.

적절한 기호 체계의 도입에 대한 역사적 어려움을 이해하면, 학생들이 계수와 변수 사이의 의미의 차이를 파악하도록 지도하는 데 많은 인내가 필요하다는 사실을 교사들에게 확신시키는 데 도움이 될 것이다. 대수적 증명에서 적절한 기호 체계의 사용을 이해하는 학생의

능력을 발달시키는 데 특별한 노력이 요구된다.

3. 엄밀성과 추상화

역사적 발달을 관찰함으로써 학생의 학습의 어려움을 이해하는 시도에서 셋째 주안점은 엄밀성과 추상화의 수준과 관계가 있다. 엄밀성과 추상화의 사용은 연륜만이 아니라 엄밀성이 적용되는 분야에 대한 경험에 주로 근거하는 성숙도를 요구한다. 추상화와 엄밀성은 반드시 축적된 경험에 근거하기 때문에, 성인들도 새로운 이론에 노출시킬 때는 친숙한 사실들을 통해 추상적 개념에 점차로 인도되어야 한다. 1960-1970년대의 '새 수학' 운동은, 특히 미국에서 학교 수학 연구 모임(School Mathematics Study Group, SMSG)은 주어진 영역에 대한 충분한 경험이 축적되지 않은 학생에게 엄격하고 엄밀한 언어를 부과할 수 없다는 사실에 대한 이해가 결핍된 상황에서 개혁을 시도했기 때문에 실패했다. 당시에 발생한 교과과정 변경의 가장 큰 실수 중 하나는 (개념적으로 매우 큰 도움이 될 수 있는 '집합'의 개념이 아니라) 조작적인(operational) 집합론의 도입이었다.

역사적 연구는 여러 가지 수 집합 중에서 엄밀한 공리적 구조를 갖게 된 마지막 수 집합이 자연수 집합이라는 사실을 보여준다. 이것은 사원수와 케일리(Cayley) 수보다 더 늦었다. 집합론에 대한 체르멜로-프랜켈(Zermelo-Fraenkel) 공리 체계는 훨씬 더 늦게 출현했다. 사실, 엄밀성의 개념 자체도 세월에 따라 변한다.

역사는 교수 방법을 가르쳐준다

발표된 수학 논문을 읽을 때의 근본적인 문제점은 거의 모든 논문에서 저자가 자신이 말하고 있는 개념에 이르기까지의 배경과 과정 및 실패의 경험을 무시하고 있다는 사실이다. '정의, 정리, 증명, 따름 정리 등등'과 같이 출판된 형태는 독자로 하여금 '도대체 이 저자는 이런 정의와 정리에 대한 발상을 어떻게 얻었을까?'라고 묻게 만든다. 이런 방법으로 가르칠 때 훨씬 더 큰 혼란이 야기된다.

거의 모든 과정에서 특별한 예로 시작하거나 직관적인 접근 방법을 사용해서 출발해야 한다. 대학교 교과서와 때로는 중등학교 교과서에서도 일반화된 상태로 주제가 제시되고 그 뒤에 특별한 보기가 뒤따르는 경우를 매우 자주 볼 수 있다. 배우는 학생은 새로운 내용에 노출될 때 그 내용과 관련된 준거 체계를 필요로 한다. 그런 체계는 친숙한 내용에 의해 제공된다. 예보다 먼저 등장하는 일반화는 통상 효과가 없고, 많은 학생에게 그 이후의 예로 보상할 수 없을 정도로 대단히 큰 손해를 끼칠 수 있다.

많은 역사적인 발달은 특별한 예로부터 일반화로 향했다. 이집트와 바빌로니아 수학은 거의 완전히 특별한 예들을 다루었다. 여기에 [5, p. 71]에서 인용한 하나의 예가 있다. '나는 나의 정사각형의 넓이와 모서리를 더해서 45'을 얻었다.' (바빌로니아 사람들은 60진법을 사용했기 때문에, 이것은 45/60를 의미한다). 이런 문제에 대한 풀이는 언제나 '이렇게 하라, 저렇게 하라'와 같이 지시적인 특징을 갖는다.

베르덴(van der Waerden)은 그의 책 **과학의 각성**(Science Awakening)에서 바빌로니아

수학에 대한 자신의 조사에서 일반화에 대한 단 두 가지의 예만을 찾을 수 있었다고 썼다. [12, pp. 73, 74]를 보라. 미국의 수학자이자 철학자인 와일더(R. L. Wilder)는 다음과 같이 썼다.

> 그리스 수학이 바빌로니아 수학으로부터의 자연스런 진화를 표현한다는 사실에는 전혀 의문이 없다. ... 이것은 매우 자주 단절이라고 불린 것을 야기했지만 실제로는 더 높은 수준으로의 도약에 불과했던 바빌로니아의 수의 과학과 그리스의 철학적 경향의 결합이었을 경향이 매우 높다. [13, pp. 150-151]

일반적인 명제(정리)를 최초로 도입한 그리스 수학은 바빌로니아 전통의 진화적이고 혁신적인 연속이었던 것으로 보인다. 역사에서 발생했던 것과 유사하게, 특별한 예로부터 이론적인 일반화로 이동하는 교육이 학생들로 하여금 더 높은 수준으로의 도약을 가능하게 만든다고 믿고 있다.

한편, 그리스의 유산은 이번 절의 처음에서 지적한 교육적인 일탈에 대해 어느 정도 책임이 있을 수 있다. 그리스 수학자들은, 특히 유클리드와 아르키메데스는 내용과 처음에 씨름했던 사항을 숨기고 부드럽고 매끈한 공식화를 사용했다. 이에 따라 통상 방법론(The Method)이라고 부르는 아르키메데스(기원전 287-212)가 에라토스테네스(기원전 276?-196?)에게 보낸 편지를 학생들과 예비 교사에게 공개하는 것이 유익하다. 아르키메데스는 다음과 같이 썼다.

> 나는 어떤 방법의 특징에 대해 똑같은 책에서 자세하게 설명하는 것이 적절하다고 생각했다. 이렇게 하면 수학의 일부 문제를 역학을 통해 고찰하기 시작할 수 있도록 만들었을 것이다. 이런 과정은 정리 자체의 증명보다 결코 덜 유용하지 않다고 나는 확신한다. 왜냐하면 나에게 어떤 사실들은 처음에 역학적 방법에 의해 확실하게 되었기 때문이며, 그것들은 반드시 나중에 기하학에 의해 증명되어야 하지만 소위 방법에 의한 그것들의 고찰은 실제적인 증명을 제공하지 않기 때문이다. 그러나 방법에 의해 문제의 어떤 지식을 이전에 얻었다면 그것을 사전 지식 없이 찾는 것보다 증명을 제공하는 것이 물론 더 쉽다[8, p. 13].

아르키메데스에게 역학을 통한 접근 방법은 직관적인 증명이라고 간주할 수 있는 것에 유도된다. 우리는 학생들이 소유한 지식의 양을 결코 알 수 없다. 그러므로 증명을 전달하는 가장 좋은 방법은 먼저 증명에 대한 직관적인 개관을 제시하고 다음에 증명을 제시하는 것이다. 발견적인 방법으로 개념을 생성한 뒤에, 학생은 목표를 인식하고 엄밀한 증명에 대한 준비가 이루어진다. 그 다음에 직관적인 개관을 이용해서 요약하는 것이 좋은 발상이다.

마지막으로, 역사적인 조망만이 다른 자연 과학과 달리 수학은 누적되는 과목이라는 사실의 중요성을 학생이 포착하도록 도와줄 수 있다. 수천 년 전에 발견된 결과는 오늘날에도 여전히 유효하다. 예를 들면, 제5 공준을 증명하려는 오랫동안의 역사적 노력을 섭렵한 뒤에야 비유클리드 기하학의 정당성을 입증한 수학에서의 혁명을 가장 잘 이해할 수 있다. 이런 역사를 학생이 읽게 함으로써 수학은 내부로부터 성장하고 새로운 내용은 옛 내용의 확장이

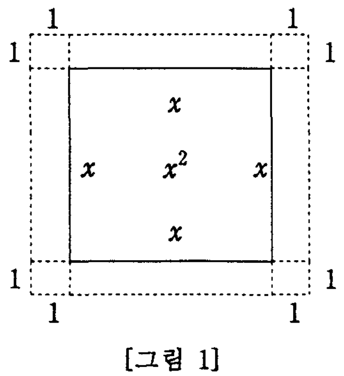
라는 사실에 대한 심오한 이해를 학생에게 제공할 수 있다.

과거의 문제를 사용하자

교사는 '역사를 가르칠 시간을 어디에서 찾을 수 있는가?'라고 질문할 것이다. '별도의 시간은 필요 없다'는 것이 최상의 답이다. 가르치고 있는 주제와 직접 관련된 역사적인 문제를 제시하면 된다. 그 문제가 어디에서 왔는지를 알려주고 학생 스스로 그것의 역사를 읽게 만들자. 그래서 단순 분수를 다룰 때는 학생에게 이집트 분수를 알려주자. '고대의 교과서'인 린드 파피루스를 언급하고, 3/5를 (서로 다른 분모를 가진 단위 분수인) 이집트 분수들의 합으로 표현하는 문제를 제시하자. 상급 학년에서 대수적 증명을 다룰 때는 주어진 분수를 이집트 분수의 합으로 변화시키는 실베스터(Sylvester) 알고리즘의 정당성을 학생이 증명해 보도록 하자. (문제 3을 보라.) 수학적 귀납법을 다룰 때는 다음과 같은 바빌로니아의 합을 학생에게 보여주자.

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2=\left[\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)\cdot 10\right](1+2+3+\cdots+1$$

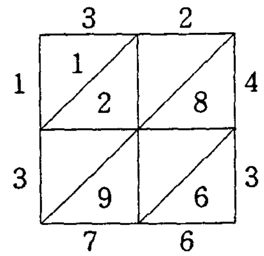
그리고 학생에게 이것의 일반화를 찾게 하고 그것을 증명하도록 하자. 삼각형의 합동을 가르칠 때는 학생들로 하여금 해변으로부터 배까지의 거리를 찾는 탈레의 방법을 발견하도록 하자. 대수 방정식의 해를 다룰 때는 학생들로 하여금 바빌로니아 사람들이 n^2+n^3에 대한 수표를 사용해서 풀 수 있었던 삼차 방정식의 형태가 어떤 것인지를 탐구하도록 하자. 역사는 교과 과정의 모든 주제와 관련이 있다. 역사적인 문제에 대한 일부 접근은 교육을 풍부하게 만들 뿐만 아니라 교육적으로 현대적인 방법보다 더 훌륭한 방법을 실제로 보여준다. 덧셈과 곱셈에 대한 이집트의 그림 문자는 각각 Λ와 Λ였다. 이 기호들은 움직이는 다리를 나타낸다. (아랍 사람들 및 히브리 사람들과 같이 이집트 사람들은 오른쪽에서 왼쪽으로 썼다.) 초등학교 교사들은 통상적인 부호 '+', '-'와 함께 방향의 변화를 나타내는 기호로서 이것들을 사용하는 발상을 좋아한다. 이 기호들은 12-13세의 학생들에게 음수의 도입을 활기 있게 만든다.



[그림 1]

수학과 주임 교사를 위한 재교육 과정에서, 나는 어떤 아랍 교사에게 알콰리즈미로부터 얻을 수 있는 몇 가지 발상을 발표하게 했다. 그 교사는 14세기의 교과서 이항과 소거의 과학의 복사본을 갖고 있었다. 그는 이차 방정식에 대한 알콰리즈미의 접근 방법을 발표했다. 그림 1은 알콰리즈미가 방정식 $x^2+4x=12$의 근을 나타내는 방법을 보여준다.

똑같은 과정에서 다른 교사는 당시에 바로 이 주제를 가르치고 있었는데, 이런 접근 방법을 학생들에게 사용해 보겠다고 말했다. 그는 일주일 뒤에 되돌아와서 다음과 같이 말했다. "나는 최초로 학생들이 '완전 제곱'에 의한 풀이를 제대로 이해하게 되었다고 느꼈다." 한 가지 예를 더 들면, 9-10세 어린이는 덧셈에서보다 곱셈에서 '받아 올림' 과정을 이해하는 데 훨씬 더 큰 어려움을 겪는다. 그림 2는 곱셈 $32\times 43=1376$을 적는 인도 체계의 예를 보여준다. 모든 곱이 완전히 쓰여 있으므로, 곱셈에서 받아 올림 과정이 필요 없다.



[그림 2]

초등학교 교사는 두 자리 이상의 수들의 곱셈을 어린이에게 가르칠 때 이런 방법이 도움이 된다고 생각한다.

1. 문제를 제기하도록 교육시키자

수학에서 중요한 활동은 문제의 제기이다. 각 성취와 각 발견은 문제의 기원을 갖고 있는데, 답을 얻었을 때 그것에는 통상 더 많은 문제가 뒤를 잇는다. 역사를 공부하면, 직전에 이루어진 것의 직접적인 연속으로 대단히 많은 문제가 발생함을 알 수 있다. "이것을 할 수 있다면, 일부 항목을 바꾸어 어떤 유사한 것을 할 수 있지 않을까?" 각의 삼등분, 정육면체의 배적, 원의 구적 등과 같은 고대의 유명한 문제를 누가 처음으로 제기했으며 어떻게 나타났는지를 알 수 없다. 자와 컴퍼스를 이용한 작도를 다루는 이 세 가지 문제가 그리스 사람들이 할 수 있었던 문제들의 부산물로 출현했다고 추측할 수 있다. 이런 해석에서 그 문제들을 다음과 같았을 것이다.

(i) 이런 도구를 사용해서 각을 이등분하는 방법을 알고 있다. 그렇다면 똑같은 도구를 사용해서 각을 삼등분할 수 있을까?
(ii) 정사각형의 넓이를 두 배로 만드는 방법을 알고 있다. 그렇다면 정육각형의 부피를 두 배로 만들 수 있을까?
(iii) 임의의 볼록 다각형의 넓이와 같은 정사각형을 작도하는 방법을 알고 있다. 그렇다면 원의 넓이와 같은 정사각형을 작도할 수 있을까?

이런 추측을 역시 고대 그리스에서 유래한 넷째 문제에도 확장시킬 수 있다. 원에 정삼각형, 정사각형, 정오각형, 정육각형을 내접시키는 방법을 알고 있다. 그렇다면 정칠각형을 원에 내접시킬 수 있을까?

똑같은 질문들을 모든 강의에서 제기할 수 있고 그래야만 하지만, 이런 문제를 접해 본 중등학교 학생을 거의 찾아볼 수 없을 것이다. 이런 것을 위해 강의 중에 별도의 시간을 할애할 필요는 없다. 학생 스스로 이런 문제를 제기하게 만들고 그런 문제에 관한 글을 스스로 찾아보도록 만들면 된다.

중요한 교육적 원리는 학생 스스로 타당한 문제를 제기할 수 있도록 교육시켜야 한다는 사실이다. 폴리아(Pólya)는 **어떻게 문제를 풀 것인가?**(How To Solve It?, [11])에서 제시한 문제 풀이에 대한 모형에서 풀이 과정의 넷째 단계로 '뒤돌아보자'를 나열했다. 이 단계에서 그는 어떤 문제를 푼 다음에는 뒤돌아보고 풀린 문제와 관계가 있는 다른 문제를 스스로 물어봐야 한다고 제안했다. 이런 문제 중 하나는 '나는 다른 어떤 문제를 물어볼 수 있을까?'이다. [11, p. xvii]을 보라. 교사는 학생들이 이 단계를 무시하고 있음을 알고 있다. 문제를 푸는 데 성공한 학생은 답 아래 밑줄을 긋고 끝을 맺는다. 문제가 수학의 역사적 발달에서 담당했던 어마어마하게 중요한 역할을 학생들에게 알려주고, 인내를 갖고 적절한 교실 분위기 속에서 관련된 문제들을 제기해야 할 것이다.

2. 답이 '존재하지 않는' 문제를 포함시키자

역사로부터 배울 수 있는 문제 제기의 중요한 또 다른 면은 그런 문제에 대한 가능한 답과 관계가 있다. 고대의 많은 문제는 답이 '존재하지 않는다.' 이것은 고대의 세 가지 작도 문제, 자와 컴퍼스를 이용한 정칠각형의 작도 문제, 다른 공리들로부터 제5 공준을 유도하는 문제 등과 다른 많은 문제에 대한 답이다. 그러나 이것은 통상적인 교과서 문제에 대해서는 참이 아니다. 대부분의 교과서 문제는 '긍정적인' 답이라고 부를 수 있는 것을 갖고 있다. 기껏해야 '이것이 가능한지 불가능한지를 증명하라' 정도의 문제를 찾아볼 수 있다. 이런 공식화는 문제의 정신을 말살시킨다. 평행선 공준이 틀림없는 공준이라는 사실을 밝히는 데 인류는 2000년 동안 대단한 노력을 기울였다. 오차 방정식을 거듭제곱근으로 일반적으로 풀 수 없다는 사실을 밝히는 데 약 300년이 걸렸다. 답이 존재하지 않는 경우가 있다고 학생들이 추측할 수 있도록 가르쳐야 하며, 그런 추측을 증명해보도록 지도해야 한다. 예를 들면, 9-10세 어린이에게 짝수 개의 약수를 가진 완전 제곱수를 물어볼 수 있다. 11세의 어린이에게 1, 3, 4, 7, 11로부터 중복을 허락해서 여덟 개의 수를 뽑아 더해서 45를 만들어 보게 할 수 있다. 12-13세의 학생에게 어떠한 세 점도 똑같은 직선 위에 있지 않는 일곱 개의 점을 각 점이 정확하게 세 개의 점과 연결되도록 평면 위에 표시하라고 요구할 수 있다. (연결하는 선들은 서로 교차할 수 있다.) 각 경우에, 답이 존재하는 다른 문제와 혼합해서, 답이 존재하지 않는다고 추측하고 그에 대한 증명을 찾기 전에 학생들로 하여금 조사해보도록 하자.

3. 탐구적인 문제도 만들자

대부분의 교과서 문제는 하나의 특정한 답을 요구하는 ('이것을 풀어라', '저것을 찾아라' 등과 같은) 완성형이다. 그렇지만 많은 역사적 문제는 탐구적인 형태이며, 이에 따라 증명

또는 풀이에 대한 조사는 뛰어난 수학을 생성했다. 예를 들면, 그런 문제 중에는 자연수 $n>2$에 대해 방정식 $x^n+y^n=z^n$은 자연수 해 x, y, z를 갖지 않는다는 페르마의 마지막 정리와 주어진 수를 초과하지 않는 소수들의 개수를 표현하는 초등 함수가 존재한다는 소수 정리가 있다. 교과서에도 학생의 탐구 기회를 좀더 많이 제공해주는 역사적인 문제들과 유사한 탐구적인 문제가 적어도 몇 개는 있어야 한다. 교과서 문제로 적절한 다음과 같은 예를 생각할 수 있다. "두 양수 중 한 수에서 1을 빼어 다른 수에 더했을 때 두 수의 곱은 어떻게 변하는가?" "어떤 약분된 분수 p/q를 두 개의 단위 분수의 합으로 나타낼 수 있는가?" 이런 문제에 대해 모든 어린이는 무엇인가를 할 수 있고, 우수한 어린이는 좀더 깊은 내용을 탐구할 수 있다.

4. 미해결 문제를 논의하자

앞에서 지적한 대로 많은 학생은 수학이 완성된 과목이고 교사가 모든 것을 알고 있다는 나쁜 인상을 갖게 된다. 이런 인상을 없애는 훌륭한 방법은 학생들에게 그들이 이해할 수 있는 몇 개의 미해결 문제를 제시하는 것이다. 통상 교과서에서 찾아볼 수 있는 유일한 미해결 문제는 4보다 큰 모든 짝수는 두 소수의 합으로 표현될 수 있다는 골드바흐(Goldbach)의 추측과 (이제 더 이상 미해결 문제가 아닌) 페르마(Fermat)의 마지막 정리이다. 중등학교 학생이 쉽게 이해할 수 있는 미해결 문제가 훨씬 더 많이 존재한다. 예를 들면, 다음과 같다. "쌍둥이 소수는 무한히 많은가?" "소수만을 생성하는 함수를 정의할 수 있는가?" "오일러 상수는 유리수인가 무리수인가?" "π^e은 초월수인가?" [9, p. 450]을 보라.

수학은 인간의 창조물이다: 수학자는 감정을 갖고 있다

초등학교와 중등학교에서 가르치는 수학과 대학교에서 가르치는 많은 수학은 '지루한 연습' 과목이라는 평판을 얻고 있다. 이런 잘못된 인상에 대해서는 주로 수학자에게 책임이 있다. 세련된 형태의 출판물은 마지막 결과를 얻을 때까지의 노력과 인내 및 성공과 실패의 경험 등과 같은 인간적인 면을 숨기고 있다. 이런 인간적인 요소를 가미함으로써 실제로는 강조함으로써 수학 과목을 활기 있게 만들 수 있다. 사라쿠사 거리를 발가벗고 뛴 아르키메데스의 이야기는 어느 정도 잘 알려져 있지만, 해밀턴(Hamilton, 1805-1865)이 이미 알려진 수 집합과 명확한 대수학을 연산 규칙을 보존시키면서 처음에는 순서 삼조로 다음에는 순서 사조로 확장하려고 수년 동안 불굴의 노력을 기울인 이야기는 교육적으로 훨씬 더 큰 교훈이 된다. [6, pp. 389-390]을 보라.

수세기 동안 뛰어난 수학자들은 제5 공준 문제를 해결하려고, 거듭제곱근으로 오차 방정식의 근을 찾으려고, 페르마의 마지막 정리를 증명하려고 반복적으로 시도했다. 이런 이야기를 잘 들려주면 수학을 학생의 가슴에 더욱 가까이 접근시킬 수 있을 것이다. 예를 들어, 제5 공준 문제를 공략하려는 볼리아이(Bolyai)에게 그의 아버지가 조언한 말을 알아보자.

> 나는 지옥에 있는 죽음의 바다의 모든 암초를 여행했으며, 언제나 돛대는 부러지고

돛은 찢긴 채로 되돌아왔다. [10. p. 33]

또, 성공의 환희를 학생에게 보여줄 수 있다. 볼리아이는 비유클리드 기하학을 전개하는 데 성공했을 때 다음과 같이 말했다.

나는 아무것도 갖지 않고 새롭고 놀라운 세계를 창조했다. [10, p. 31]

수학은 '지루한' 과목이라는 인상을 없애기 위해서, 수학의 인간적인 면을 고려함으로써 수학에 색채를 가미하고 생기를 불어넣을 수 있으며 때때로 수학자의 생애로부터 일화를 소개할 수 있다. 어떤 경우에 이런 일화는 교육적인 문제를 해결하는 데 도움을 줄 수 있다. 젊은 갈루아(Evariste Galois, 1811-1832)의 투쟁 이야기는 창조적인 젊은이가 학교에서의 문제점을 수용하고 규율상의 어려움을 극복하는 데 도움을 줄 수 있다. 노르웨이의 뛰어난 수학자 아벨(Niels Henrik Abel, 1802-1829)의 이야기는 재능 있는 어린 학생에게 역경을 극복하고 자신의 가능성을 실현시킬 수 있도록 격려해줄 수 있다. [2, pp. 555-557, 638-642]를 보라.

요약: 인류 문화의 일부로서의 수학

언어와 수학은 서로 협력하면서 발달된다. 언어는 매일 강화되므로, 모든 상황에서 인간 생활의 필수적인 부분이 된다. 수학은 그런 강화를 받지 못하기 때문에, 집중적인 교육을 필요로 한다. 이런 교육이 인류 문화의 일부로서 수학의 기본적인 공헌을 학생에게 전달할 수 있는 방법으로 우리의 교육을 체계화하는 것이 우리의 과제이다. 우리가 가르치는 주제들과 그것들의 역사적 발달을 연관시킴으로써 이런 목표를 성취할 수 있다. 우리가 알아본 대로

(a) 역사적 발달은 가능성 있는 학습의 어려움을 알려줄 수 있다.
(b) 수학에서 발견 과정을 따르려고 노력함으로써, 역사적 발달은 우리의 교수 방법을 개선시킬 수 있다.
(c) 역사적 발달은 단순히 정보의 전달이 아니라 탐구하고 고찰하는 교실 분위기를 만들 수 있도록 유도한다.
(d) 역사적 발달은 자료의 축적을 통해 도달할 수 있는 목표에 대한 연구 과정이 존재하는 문제를 사용할 수 있도록 유도한다.
(e) 역사적 발달은 답이 '존재하지 않는' 문제를 포함시키도록 알려준다.
(f) 학생들에게 미해결 문제를 알려주면, 수학은 문제와 씨름하는 즐거운 활동이 존재하는 미완성 과목이라는 사실을 알게 만든다.
(g) 역사적 발달은 학생들에게 수학을 연구하는 감성적인 면을 보여줌으로써 수학을 부드럽게 만드는 데 도움을 줄 수 있다.

고려할 또 다른 점

1. 수학자 가우스(Carl Friedrich Gauss, 1777-1855)는 통상 가우스 정수라고 부르는 복소수 전체 집합의 부분 집합을 정의했다. 이 부분 집합은 가우스 소수라고 부르는 더 작은 부분 집합을 포함하고 있다. 가우스가 이런 부분 집합을 정의하도록 유도한 것에 대한 추측을 공식화하라.

2. 급수 1+2+3+…의 부분 합들을 통상 삼각수라고 부른다. 17세기에 수학자 라이프니츠(Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646-1716)는 이런 부분 합들의 역수의 합에 대한 규칙을 찾는 문제를 제시받았다. 이 글에서 언급된 접근 방법을 사용해서 요구된 규칙에 관한 추측을 만들어라.

3. 수학자 실베스터(James Joseph Sylvester, 1814-1897)는 임의의 양의 약분된 분수 p/q를 이집트 분수들(분자가 1이고 분모가 서로 다른 분수들)의 합으로 표현하는 다음과 같은 알고리즘을 발견했다.
  (i) p/q로부터 p/q보다 크기 않은 가장 큰 이집트 분수를 뺀다.
  (ii) 나머지에 대해 똑같은 과정을 시행하고, 이와 같이 계속한다.
  이 알고리즘은 언제나 유한 개의 이집트 분수의 합에 이름을 증명하라.

4. 그리스 수학자 디오판토스의 이름은 방정식의 개수보다 변수의 개수가 더 많은 다항 방정식들에 붙어있다. 각각 두 개의 변수를 가진 두 개의 선형 방정식으로 이루어진 연립 방정식의 해를 가르치기 전에, 이런 형태의 선형 방정식들의 해를 도입하는 것이 바람직한 이유를 논의하라.

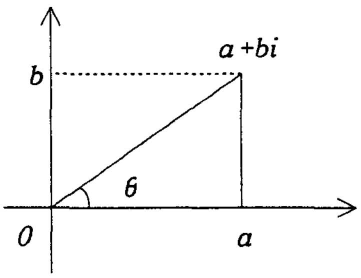
5. 기하학은 19세기 전반기에 대단한 격변을 경험했다. 이 격변은 어떤 방법에서 당시의 시대 정신과 보조를 맞출 수 있는지를 논의하라.

참고문헌

1. Arcavi, Abraham *et al*: "Maybe a Mathematics Teacher Can Profit from the Study of the History of Mathematics," *For the Learning of Mathematics* 3 (1892), 30-37.
2. Boyer, Carl B.: *A History of Mathematics*, Wiley, New York, 1968.
3. Chace, A. R. *et al*: *The Rhind Mathematical Papyrus*, Mathematical Association of America, Oberlin, Oh., 1927. (Reprinted by National Council of Teachers of Mathematics, 1979)
4. Coleridge, Ernst H.: *The Complete Poetical Works of Samuel Taylor Coleridge*, Oxford University Press, Oxford, 1967.

5. Dedron, P. and Itard, J.: *Mathematics and Mathematicians*, Open University Press, Milton Keynes, 1978. (Original French edition published 1959.)
6. Eves, Howard: *An Introduction to the History of Mathematics*, 4th ed. Saunders College Publishing, Philadelphia, 1976.
7. Heath, T. L.: *The Works of Archimedes*, Dover, New York, 1953.
8. International Commission on Mathematics Instruction: *Proceedings of 6th International Congress on Mathematical Education*, Action Group on Pre-Service Teacher Education, ICMI Secretariat, Budapest, 1988.
9. Kline, Morris: *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, New York, 1972.
10. Meschkowski, Herbert: *Non-Euclidean Geometry*, Academic Press, New York, 1965.
11. Pólya, George: *How to Solve It*, Princeton University Press, Princeton, 1973.
12. van der Waerden, B. L.: *Science Awakening*, Oxford University Press, New York, 1961.
13. Wilder, R. L.: *Evolution of Mathematical Concepts*, Wiley, New York, 1968.

오일러 공식을 이용한 피타고라스정리 증명



$a + bi = c(\cos\theta + i\sin\theta) = ce^{i\theta}$ .... ①

$a - bi = ce^{-i\theta}$ .... ②

①과 ②를 변끼리 각각 곱하여

$a^2 + b^2 = c^2$

현대 수학적 사고의 전체적인 형태가 오일러에 의해 만들어졌다고 해도 무방할 것이다. 공식이 의미하는 바가 자명해지게 하는 법이 아직 알려지지 않았었기 때문에 오일러 직전의 수학자들의 글을 이해할 수 있으려면 대단한 어려움을 겪지 않을 수 없다. 공식이 자명해지게 하는 기술을 가르친 것은 오일러가 처음이었다.

— R. 루비오