Journal of Historia Mathematica Vol. 9. No. 1, (1996), 42 - 49.

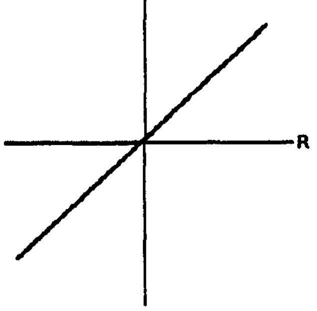
위상 기하학 (Topological Geometry)

중앙대학교 **임 장 환**

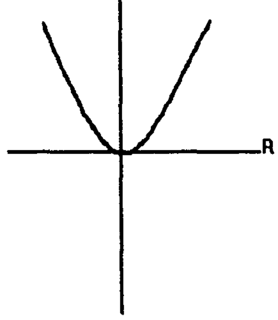
1. 서 론

위상 기하학을 처음으로 생각한 사람은 현재 독일 Tübingen대학의 교수로 있는 H. Salzmann이다. 여기에 관한 그의 첫 논문은 "Über den Zusammenhang in topologischen projektiven Ebenen, Math. Z. 61, 489 - 494" 인데, 이 논문이 발표된 이후 지금까지 위상 기하학(Topological geometry)은 기하학 분야에 확고한 위치를 차지하고 있다. D. R. Hughes, F.C. Piper의 Projective Planes의 부록(287쪽)에서도 "독일 학계에서 위상 사영평면에 대한 연구가 주목할 만한 발전을 보이고 있다"라고 기술하고 있다. 책으로 처음 소개되기는 사영 기하학의 명저인 G. Pickert의 Projektive Ebenen의 10장에서 Topologische Ebenen라는 제목으로 다루고 있다. 현재까지의 위상 사영기하학의 연구를 종합하여 1995년도에 H. Salzmann 외 여러 명의 공동저자들에 의해 "Compact Projective Planes"라는 책으로 출간되었다.

Descartes(1586-1650)는 Euklid기하학에 좌표계를 도입함으로써 기하학에 새로운 장을 열었다. 그러면 H. Salzmann의 어떠한 생각이 위상 기하학이라는 새로운 세계를 구축할 수 있는지 간단한 보기를 들어 직관적으로 생각해보자.



[그림 1]



[그림 2]

([그림 1]: 벡터공간 R^2상에서 1-차원 아핀 부분공간을 직선 집합으로 하는 아핀 평면, [그림 2]: 좌표평면 R^2상에서 위 곡선식은 $f(x)=|x|^{a}$, $x\geq0$, $f(x)=\alpha|x|^{d}$, $x\leq0$, $0<\alpha\leq1<d$ 이고, 이 직선식을 평행이동하여 얻은 직선과 수직선을 직선 집합으로 하는 아핀 평면(shift plane)이다. 위에 두 아핀평면이 기하학적 동형일 조건은 $\alpha=1, d=2$ 이다.)

먼저 좌표평면 $R^2=\{(x,y): x,y\in R\}$ 에서 직선 집합:

$$L=\{l : l=\{(x, mx+n) : x\in R\}\ m,n\in R \text{ or } l=\{x\}\times R \text{ for a fixed } x\in R\}$$

을 생각해보자[그림 1]. 이것을 보통 쌍으로 다음과 같이 표시하고 $P=(R^2, L)$, 점과 직선관계(incidence structure)라고 부른다. 위의 점과 직선계 $P=(R^2, L)$를 아핀 평면이라고 부른다: 즉, 다음과 같은 공리를 만족한다:

(1) 서로 다른 두 점은 유일한 직선으로 연결할 수 있고,
(2) 한 직선과 그 위에 있지 않은 한 점이 주어지면, 이 점을 지나는 평행한 직선이 존재한다(평행선 공리).

(1),(2) 조건은 자세히 보면 (1)은 점과 직선과의 함수로 바꾸어 쓸 수 있고, (2)조건도 하나의 직선과 이 직선 위에 있지 않은 한 점에서 평행한 직선으로 보내는 함수로 생각할 수 있다. 여기서 (1)번 조건만 다시 함수로 표시하면

$$\vee : R^2\times R^2-\Delta_p\rightarrow L : (p,q)\rightarrow p\vee q \text{ 이고,}$$

여기서 $\Delta_p=\{(p,p) : p\in R^2\}$이다.

그러면 이제는 위상적인 관점에서 관찰해보자. R^2는 위상공간이고, 따라서 집합 $R^2\times R^2-\Delta_l$도 유도된 위상(induced topology of $R^2\times R^2$)을 생각할 수 있고, 그러면 당연히 직선집합 L에도 위상을 생각해서 $\vee : R^2\times R^2-\Delta_p\rightarrow L : (p,q)\rightarrow p\vee q$를 연속된 함수로 생각해 볼 수 있다는 생각을 H. Salzmann은 했고, 정확히 말하면 Hausdorff-convergence위상을 L에 부여함으로써 다른 기하학 연산자도 연속이 됨을 그는 알았다. 여기서 점직선이동군(collineationsgroup)은 우리가 잘 아는 바와 같이 6-차원 Lie-군이다, $R^2\times GL_2(R)$. 물론 우리가 다음 장에서 살펴볼 위상 평면에서도 위에서와 같은 사실을 이끌어 낼 수 있다. 우리가 알고 있는 아핀평면이나, 사영평면 그리고 hyperbolic평면에서도 모두 기하학연산자들이 연속임을 그는 알아냈다. 그리고 위와 같은 사실들을 일반화하기 시작했다. 그가 주테마로 연구한 분야는 위상사영 평면인데, 아마도 기하학구조 중 가장 아름다운 구조를 가지고 있다고 생각했기 때문이라고 추측된다. 그러면 다음 장에서 위상사영 평면이 어떻게 발전되어 왔는지 살펴보자.

2. 위상 사영평면 (Topological projective planes)

2.1 위상 사영평면

먼저 사영평면은 점집합 P와 그것의 부분집합의 모임인 직선집합 L, 이것을 보통 점과 직선관계 (P, L)로 표시하고 다음과 같은 공리를 만족한다:

(1) 서로 다른 두 점에 대해 두 점을 포함하는 유일한 직선이 존재하고,
(2) 서로 다른 직선은 한 점에서 만난다.

보기로서는 하나의 체 K 상에서 3-차원 K-벡터공간을 생각해보자. 여기서 점집합 P는 모든 1-차원 벡터공간집합이고, L은 모든 2-차원 벡터공간집합이라고 하면, 위의 두공리을 만족함을 알 수 있다. 여기서 하나의 2-차원 벡터공간과 그 위에 속해있는 1-차원 벡터공간을 제외하면 우리가 잘 알고 있는 아핀평면을 얻는다. 그러면 위상사영 평면의 정의를 살펴보자:

사영평면 (P, L)이 다음 조건을 만족할 때 위상사영평면(topological projective plane)이라 부른다.

P와 L에 각각 (non discrete) Hausdorff-위상이 주어져서 연결연산자 $\vee : P\times P-\Delta_P \to L$와 만나는 연산자 $\wedge : L\times L-\Delta_L \to P$ 각각 연속이다.

이 정의는 상당히 일반적인 정의이다. 위에서 보기를 들었듯이 3-차원 K-벡터공간에서 사영평면이 어떻게 정의되는지 보았다. 이들 사영평면 중에서 자연스럽게 위상사영평면으로 생각해 볼 수 있는 것은 무엇이 있을까? 일단 수학은 자연스러운 것이 가장 좋다. 체 K가 위상체 (topological field)이면 가능하지 않을까하는 생각이 들고, 우리가 생각해 볼 수 있는 위상 체는 대표적으로 R(실수), C(복소수), H(Hamilton's quaternions, skew-field), O (octonions or Cayley numbers, alternative-field) 등에서 생각해 볼 수 있다. 이들 체는 구체적으로는 위상 ternary체인데 다음 절에서 설명하자.

H. Salzmann 외 초창기 위상사영 평면연구자들은 위에 주어진 위상 체에서 다른 위상평면등의 모델들을 체계적으로 연구할 수 있는 기초를 마련하는 데 주력하였다. 그들이 위에 사실들에 대한 일반적인 정의를 하기 위해서 사용한 도구는 위상차원(topological dimension)이었다. 즉 " P와 L에 각각 n-차원, locally compact, connected위상이 주어져서 위 두 연산자가 연속이다"라는 조건하에서 연구를 하였다. 이런 경우을 n-차원 위상사영평

면 이라고 부른다. 여기서 밝혀진 중요한 기본적인 사실은 가능한 차원이 2, 4, 8, 16으로 한정할 수 있다는 사실이었다. 그리고 이 경우에 n(=2, 4, 8, 16)-차원 위상사영평면의 점공간(pointspace)과 직선공간(linespace) 위에서 지적한 R, C, H, O 상에서의 위상사영평면의 점공간 F 와 직선공간 L 과 각각 위상동형임을 밝혀냈다.

2.2 사영평면에서 좌표계(Coordinate Methods, Ternary fields)

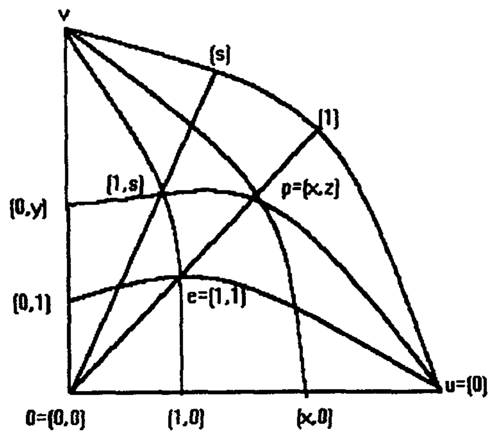
사영평면에 좌표 계에 대한 체계적인 연구는 M. Hall [5], 또는 [6. 20장, 9, 12]에서 잘볼 수있다. 책에서 볼 수 있는 것은 위에서 소개한 참고문헌에 자세히 나와 있지만 약간 여기서 설명해 보겠다. 간단히 말해서 점과 직선과의 관계를 대수적인 방법으로 다루자는 의도이다. 금방 느낌이 오지는 않겠지만 ternary field에 대한 정의를 보자. 0과 1을 포함하는 (0과 1은 서로 다른 원소이다) 집합 K에 대해, 함수 $\tau: K\times K\times K \to K$(보통 τ를 ternary operation이라 부름)가 다음 조건을 만족한다.

1. $\tau(o,x,b)=\tau(s,0,b)=b$
2. $\tau(1,s,0)=\tau(s,1,0)=s$
3. 주어진 $s,x,y\in K$ 대해 $\tau(s,x,b)=y$를 만족하는 유일한 $b\in K$가 존재한다.
4. 주어진 $s_1\neq s_2, b_1, b_2\in K$에 대해 $\tau(s_1,x,b_1)=\tau(s_2,x,b_2)$를 만족시키는 유일한 $x\in K$가 존재한다.
5. 주어진 $x_1\neq x_2, y_1, y_2\in K$에 대해 $\tau(s,x_1,b)=y_1, \tau(s,x_2,b)=y_2$를 만족시키는 $s,b\in K$가 유일하게 존재한다.

쌍 (K,τ)를 Ternary체라고 부른다. 그러면 사영평면과 Ternary체와의 관계를 알아보자. 사영평면 (P,L)에서 한 직선 위에 서로 다른 3점이 놓이지 않는 4점 o,e,u,v를 잡는다. 그리고 u,v를 잇는직선과, o,e를 잇는 직선을 다음과 같이 놓는다: $L_\infty=u\vee v$, $I=o\vee e$. 그러면 $I-(I\cap L_\infty)$상의 각각의 다른 점에 대하여 (b,b)라 표시하고, 특별히 $0=(0,0)$, $e=(1,1)$이라 표시한다. 각각의 $p\in P-L_\infty$에 대해 $(p\vee v)\cap I=(x,x)$, $(p\vee u)\cap I=(y,y)$이면, p점의 좌표는 (x,y)로 잡는다. 그리고 L_∞상의 점에 대해서는 $p=[0\vee(1,s)]\cap L_\infty$라 생각하여 (s)라는 좌표를 준다. 여기서 K를 심벌 b의 집합, 즉 $|K|=|I|-1$라 하고, 다음과 같이 K상에서 ternary 함수 $\tau: K\times K\times K\to K$를 정의한다:

$[s,b]$를 $(0,b)$와 (s)를 연결하는 직선으로 표시하자. 이때 $y=\tau(s,x,b)$일 필요충분 조건은 $(x,y)\in[a,b]$로 정의하고 (K,τ)를 $K(P,o,e,u,v)$로 표하면 (위에 주어진 Ternary

체는 네 점 o, e, u, v에 종속이다). ([그림 3]은 위에 관계를 도식한 그림)



[그림 3]

$K(P, o, e, u, v)$는 Ternary체이고, 역으로 Ternary체 (K, τ)가 주어지면 하나의 사영평면을 구할 수 있다. 또한 다음과 같이 더하기와 곱을 정의하면:

$$+ : K \times K \to K : x + b = \tau(1, x, b),$$
$$\cdot : K \times K \to K : sx = \tau(s, x, 0).$$

$(K, +, \cdot)$는 double loop가 된다(loop는 군에 조건에서 결합법칙만 제외하고 생각). 체(field)를 완전한 기본 대수의 틀로 본다면 double loop는 다음과 같은 조건들이 빠져있는 셈이다:

(1) $+$의 결합법칙,

(2) $+$의 교환법칙,

(3) $\cdot$의 결합법칙,

(4) $(a+b)c = ac + bc$,

(5) $a(b+c) = ab + ac$,

(6) $\cdot$의 결합법칙.

그러면 여기서 당연히 어떠한 사영평면이 double loop의 빠져있는 조건들을 만족하는지 궁금하게 된다. 이것은 참고 문헌 [9, VI Algebraic Properties of Planar Ternary Rings]에서 잘 다루어져있다.

위에서 하나의 사영평면과 Ternary체 사이에 관계성을 설명했다. 우리 위상적 사영 평면

을 대수적인 관점에서는 당연히 위상 ternary체를 생각할 수 있다. 위상 ternary체는 K에 위상이 주어져서 t 및 더하기와 곱의 역(inverse)연산자가 연속일 경우를 말한다. 그리고 H. Salzmann에 의해 다음과 같은 정리가 증명되었다: 만약 위상 ternary체 K가 국소 euclidean이면 K는 R^n과 위상동형이다, $n=1,2,4,8$. 자 그러면 H. Salzamann은 이제 기본적인 위상사영평면에 대한 기본 틀을 완성하였다. 그리고 그의 중심과제는 어떠한 위상 사영평면이 존재하고, 가능하면 그것들의 종류를 체계적으로 분류할 수 있느냐 하는 거대한 문제에 틀을 마련한 셈이다. 아직 이 거대하고 흥미로운 작업은 완성되지 않았다. 단지 그의 제자 D. Betten에 의해 4-차원 flexible 사영평면만이 완전히 체계적으로 분류되었다. 그러면 다음 절에서는 점직선이동군(collineationsgroup)과 지금까지의 위상사영 평면의 발전에 대해서 살펴보기로 하자.

2.3 점직선이동군, 2,4,8,16-차원 위상사영 평면의 발전과정

또 하나의 H. Saizmann의 주목할 만한 성과는 점직선이동군에 관한 일반적인 연구였다. 그의 처음 2-차 사영평면에서 점직선이동군에 compact-open위상을 주어서 2-차 사영평면의 점직선이동군은 하나의 Lie-군이 되며 그의 차원은 8이하임을 보였다. 이것이 중요한 의미를 갖는 것은 Lie-군과 Lie-Algebra의 이론이 잘 정립되어 있었으며, Lie-이동군(Lie-transformationsgroup)에 관한 연구도 잘되어 있었기 때문이다. 하나의 보기를 든다면 Brouwer의 정리이다. 2-차원 위상사영 평면의 하나의 직선은 원과 위상동형이다. 그러면 원상에서 transitive하게 작용하는 Lie-군은 과연 무엇이 있을까? Brower의 정리는 가능한 Lie-군은 회전군인 SO_2 또는 $PSL_2(R)$의 유한 covering이다. [참고문헌: 17, 정리 3.18]. 그는 2-차원 사영평면에서 점직선이동군(collineationsgroup)이 8-차원 이하의 Lie-군이라는 성질을 이용하여 체계적인 분류에 성공했다[참고문헌: 14, 15, 16]. 현재 위상기하학자들의 주 관심사는 점직선이동군(collineationsgroup)의 특성에 의하여 주어진 기하학을 체계적으로 정립하는 데 주력하고 있다.

4-차원 사영평면은 주로 D. Betten과 그의 제자에 의해서 체계적인 분류가 현재 거의 완성되어졌다. 8, 16-차원 사영평면은 H. Hähl, H. Salzmann에 의해 연구가 활발히 진행되고 있으며, 현재의 연구 방향은 Translation planes에 대한 체계적인 연구 진척이 보이고 있다.

3. 위상기하학 (Topological geometry)

위에서 살펴보았지만 위상을 단지 사영평면에서만 국한되지 않고, 아핀평면이나, hyperbolic평면, 또는 공간기하학과 사영공간으로도 자연스럽게 위상사영기하학에서와 같은 조직적인 연구가 가능할 것이라는 짐작은 자연스럽다. 왜냐하면 우리가 사용하고 있는 평면의 개념이라든가, 공간의 개념들은 위상수학에서, 또는 미분기하학에서 가장 기본적인 위상공간 또는 다양 체이기 때문이다.

잠시 살펴본다면 1968년 H. Groh에 의해 위상 Laguerre평면에 연구가 시작되었고, 같은

해에 Hamburg대학의 J. Misfeld에의해 위상사영공간에 대한 연구가 이루어졌다. K. Strambach에 의해 Salzmann-평면의 연구가 활발히 진행되었다. G. Steinke에 의해 위상 Benz-평면의 연구 및 고차원 Laguerre-평편의 연구가 진행되고 있으며, 공간 위상기하학의 시초는 D. Betten에의해서 1981년 시작돼서 H. Groh와 H. Klein에 의해서 연구가 계승되고 있고, 이밖에도 R. Löwen에의 Stable-평면의 연구가 독창적으로 이루어지고 있다. 아직도 위상기하학적 입장에서 새로이 접근하는 연구분야들 중에는 기본적인 연구수준에서 체계화 하는 작업이 계속되고 있으므로, 아직까지 전체적인 설명을 하기에는 이르다고 생각된다.

4. 결 론

우리는 위에서 간략하게 위상기하학이 어떻게 생성되어 왔는지를 살펴보았다. D. Hilbert 가 수학사에서 중요한 위치를 차지하는 것은, 그가 기존에 있던 수학의 문제들을 잘 관찰하고, 그 중에서 특성지울 만한 성질들을 골라서 공리화했다는 점이다. 즉, 점, 직선, 평면이라는 것은, 우리가 직관적으로 느끼는 점이나 직선, 평면을 뜻하는 것이 아니고, 주어진 공리를 만족하면 된다는 것이다. H. Salzmann은 기하학과 위상수학을 적절히 연구하여 그들 사이에 기본적인 관계들의 특성 지움으로서, 하나의 새로운 줄기를 형성했다고 생각된다. 현대의 수학자들은 자기들의 연구방향을 너무 깊숙이 한 방향으로 몰고 가는 경향이 있다. 수학의 새로운 줄기를 형성할 수 있는 문제들은 우리들이 가장 기본적으로 다루는 소재들을 새로이 잘 관찰함으로써 얻어질 수도 있다.

참고문헌

1. Betten, D., Topologische Geometrien auf 3-Mannigfaltigkeiten, Simon Stevin 55(1981), 221 - 235.
2. Betten, D., Einige Klassen topologischer 3-Räume, Resultate Math. 12(1987), 37-61.
3. Betten, D., 4-dimensional compact projective planes with a 7-dimensional collineation group, Gemo. Dedicata 36(1990), 151-170.
4. Groh, H., Topologische Laguerreebenen. I, Abb. Math. Sem. Univ. Hamburg 32(1968), 216 - 231.
5. Hall, M., Projective planes, Trans. Amer. Math. Soc. 54(1943), 229-277.
6. Hall, M., The Theory of Groups, Macmillan, New York, 1959.
7. Hähl, H., Automorphismengruppen von lokalkompakten zusammenhängenden Quasikörpern und Translationsebenen, Geom. Dedicata 4(1975), 305 - 321.
8. Hilbert, D., Grundlagen der Geometrie, 13th ed. Teubner, Stuttgart, 1987.
9. Hughes, D.R., Piper, F.C., Projective Planes, Springer-Verlag, 1973.
10. Löwen, R., Stable planes admitting a classical motion group, Resultate Math. 9(1986),

119-130.
11. Misfeld, J., Topologische projektive Räume, Abb. Math. Sem. Univ. Hamburg 32(1968), 232-263.
12. Pickert, G., Projektive Ebenen, 2. Auflage, Springer, Berlin, etc., 1975.
13. Salzmann, H., Über den Zusammenhang in topologischen projektiven Ebenen, Math. Z. 61, 489 - 494.
14. Salzmann, H., Zur Klassifikation topologischer Ebenen, Math. Ann. 150(1963), 226-241.
15. Salzmann, H., Zur Klassifikation topologischer Ebenen. II, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 27(1964), 145-166.
16. Salzmann, H., Zur Klassifikation topologischer Ebenen. III, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 28(1965), 250-261.
17. Salzmann, H., Topological Planes, Adv. Math. 2(1967), 1-60.

◆ 커피 ??? 수학 ◆

수학자는 커피를 정리로 바꾸는 기계와 같다.

— P. 에르되스

위상 수학자는 도넛과 커피잔의 차이를 모르는 사람이다.

— J. 켈리