

TM투영에서의 좌표변환에 관한 연구

A study on the transformation of coordinate on TM projection

조 규 전*
Kyu-Jon, Cho

요 旨

TM투영은 일반적으로 측량 또는 지도제작에서 가장 널리 사용되고 있는 투영법이다. 그러나 복잡한 수학적 계산식으로 인하여 원리의 이해와 사용에 어려움이 있으며 또한 실제적인 적용에 있어서 계산공식을 어떻게 사용하며 어떠한 계수를 사용하는가에 따라 그 결과도 크게 달라진다. 이 연구에서는 무한급수로 전개되는 TM투영 계산공식을 급수 항의 수효에 따라 4가지 종류로 구분하고 이들이 최종 좌표에 미치는 영향에 대하여 고찰하였으며, 특히 좌표변환과정에서 필수적으로 사용되는 원주율(π)의 유효숫자가 미치는 영향에 대해서도 고찰하였다. 연구결과 경도차의 크기에 따라 오차도 달라져서, 경도차 1°에서는 거의 변화가 없었으나 2°와 3° 등 경도차가 클수록 더 큰 오차가 발생하였다. 또한 위도변화에 대해서는 위도가 낮을수록 더 큰 오차가 발생되었다. 특히, π 값의 사용에서는 지상 1 mm의 정밀도를 유지하기 위해서는 소수 13자리까지 사용하여야 함을 알 수 있었다.

ABSTRACT

TM projection is widely used for surveying and mapping. However, the complicated computations and process are required and, moreover, the different results of computation may occur according to different formulae and coefficients. In this study, the transformation formulae are classified into 4 categories and the computations are executed according to the categories. The computations are also made to different value of the circular constant, π . The result of test shows that the enough number of items in formulae have to be used for precise computation and the circular constant has to calculate down the 13 places of decimals in order to obtain the precision of 1mm on the ground scale.

1. 서 론

측량은 때때로 지구곡면위에 있는 인공 또는 자연 지형 지물의 위치를 결정하고 이들을 평면 위에 표기하는 것을 그 일차적인 목적으로 하며 이를 위하여 평면직각 좌표를 사용한다. 지구 회전 타원체를 평면으로 표시하고자 할 때, 측량 지역이 협소하여 평면으로 보아도 무방할 경우에는 간단한 수학적 방법에 의하여 쉽게 결정할 수 있으나, 지구의 곡률을 고려하여야 하는 넓은 지역의 경우에는 간단히 해결할 수 없다. 왜냐하면, 비록 지표 위에 있는 모든 점의 위치를 球體 또는 橢圓體上에서는 쉽게 결정할 수 있다 하여도 그것을 비틀림(distortion) 없이 평면 위에 표기하는 것은 거의 불가능하며, 그 비틀림은 지역이 넓으면 넓을 수록 더욱 커지

* 경기대학교 토목공학과 교수

기 때문이다. 따라서 이러한 비틀림 현상을 최소화하고 곡면을 평면으로 변환하는 방법이 필요하게 되며 이것을 투영이라 한다. 지구 곡면을 평면으로 변환하는 투영에서는 아래와 같은 두 가지의 기본 과정이 필수적으로 필요하다.

첫째, 실제 크기의 지구를 투영에 알맞는 크기로 축소시키는 투영 모델(球體 또는 回轉橢圓體)의 결정, 다시 말하면 지구 위의 큰 작업 지역을 매우 작은 평면(즉, 지도)으로 옮길 때 필요한 축척의 변환 작업.

둘째, 곡면을 평면으로 변환시킬 때 발생하는 비틀림 현상을 어떤 형태로든지 규칙적으로 변환시키는 작업 과정, 즉 투영 작업.

따라서, 이들 두 가지의 기본 조건을 생각해 볼 때, 축척과 투영은 서로 분리할 수 없는 매우 중요한 요소임을 알 수 있다. 특히, 선형 축척은 투영의 전 과

정에서 항상 일정할 수 없으며, 두 선분이 교차하는 각 또는 투영 대상물의 면적이 투영 후에도 같을 수도 있으나 두 조건을 동시에 만족시키는 것은 불가능하다.

이와 같은 투영 과정을 거쳐 지구 곡면 위의 3차원 위치(ϕ, λ, h)는 2차원의 평면좌표(x, y)로 변환되며, 역으로 2차원의 평면좌표에서 원래의 3차원 좌표로 변환되기도 한다. 투영의 전 과정은 수학적으로 이루어지므로 복잡한 수학적 계산이 필연적으로 따르게 되며 계산 방법에 따라 그 결과도 크게 달라진다.

이 연구에서는 우리 나라뿐만 아니라 전세계적으로 가장 널리 사용되고 있는 TM투영에서 계산 결과에 영향을 줄 수 있는 몇 가지 사항들에 대하여 논의하고 오차에 대하여 고찰해 보고자 한다.

2. TM투영과 UTM

2.1 등적투영과 등각투영

투영은 여러 가지 방법으로 구분할 수 있으나 비틀림의 형태에 따라 等積投影(equal area projection)과 等角投影(conformal projection)으로 구분한다. 등적투영은 모든 투영 대상 체들의 상대적인 크기, 즉 면적의 비가 전 투영 과정을 통하여 항상 일정한 투영을 말한다. 만일 두 개의 평행한 위도 선과 등간격의 자오선들로 형성되는 많은 사각형의 단면들이 서로 지구 타원체에서의 면적이 같다면 투영된 지도상에서도 같다. 등적투영에서는 면적은 일정하나 모양은 비틀림이 매우 심하다. 이는 전면에 걸쳐 축척이 일정하지 못하며, 두 선분이 이루는 각들은 투영 후에도 심한 비틀림 현상을 일으키기 때문이다. 특히, 축척은 서로 직각인 방향에서 남북 방향이 축소되었으면 동서 방향은 확대되고, 반대로 동서 방향이 축소되었으면 남북 방향이 확대되어 면적이 같도록 상호 보완적으로 변화한다. 따라서 어느 곳이나 축척이 같은 곳이 없다. 등적 투영은 그 특성에 비추어 면적을 중요시하는 지적측량등에 사용되기도 하나 널리 사용되지는 못한다.

등각투영은 투영 전의 형태와 투영 후의 형태가 완전한 상사형을 이루는 투영으로서 相似投影(conformal projection)이라고도 부른다. 등각 투영에서는 지구 구면 위의 임의의 두 선분이 이루는 작은 투영 후에도 항상 일정하며, 축척도 모든 방향에서 일정하다. 그러나

이러한 상사 조건을 만족하기 위해서는, 비록 각의 비틀림은 전혀 없다 하여도 면적에서 발생하는 비틀림 현상은 피할 수가 없으며 위도가 높은 지역일 수록 이러한 비틀림 현상은 심각하다. 예로서 위도 80°에서 면적의 비틀림은 실제 면적보다 약 36배, 위도 89°에서는 약 3000배나 된다.

등각 투영에서의 상사 변환은 1차적으로 지구 타원체를 이에 대응되는 가상적 상사형 구체로 변환하고 상사 변환된 구체로부터 다른 투영면(평면, 원뿔, 원기둥)에 다시 투영하는 相似二重投影(conformal double projection)과 회전 타원체로부터 투영면으로 직접 투영하는 두 가지가 있으나 그 결과는 서로 비슷하다. 등각 투영의 특징은 자오선과 위도 선이 지구 타원체 위에서 서로 직각으로 교차하는 것과 같이 투영면 위에서도 서로 직교한다는 사실이다. 따라서 등각 투영을 直角投影 또는 正射投影(orthogonal projection)이라고도 부른다. 등적투영과 등각투영, 어느 것이나 장, 단점을 갖고 있으나 측량의 결과를 평면 직각 좌표로 표현할 경우에는 등각 투영이 가장 이상적이다. 따라서 전 세계의 많은 나라에서는 등각 투영에 의하여 얻어진 평면 직각 좌표를 국가 평면 직각 좌표로 사용한다. 등각 투영에서는 램버트(Lambert)의 원뿔 투영, 머케이터(Mercator)의 원기둥 투영, 그리고 입체투영 등이 그 대표적 투영이나 가장 보편적으로 사용하는 것은 횡원기둥 투영이다.

2.2 TM투영

TM투영은 표준형 머케이터 투영에서 원기둥을 90°회전시켜 중앙 자오선이 원기둥 면에 접하도록 하는 투영으로서 橫원기둥(또는 橫머케이더)투영(Transverse Mercator Projection) 또는 TM투영이라 한다. TM투영은 측량의 표준 투영이라 불릴 정도로 가장 많이 사용되고 있는 투영법으로서 원래 1772년 램버트에 의해 처음으로 고안되었다. 그 후 50년 후인 1822년, 가우스(Karl Friedrich Gauss, 1777-1855)에 의해 수학적으로 정립되어 1866년 오스카 슈라이버 장군(Oscar Schreiber)이 하노버 지역에 적용한 결과를 연구 보고한 바 있다. 이 때의 투영은 중앙 자오선에서의 축척 계수가 1인 상사 2중투영이었다. TM투영은 1912년 크뤼거(Louis Krüger)에 의하여 당초의 상사 2중투영방법 대신에 타원체를 투영면에 직접 투영하는 방법이 제시되었

으며, 수학적 계산에 알맞도록 각종 공식들이 정비되어 1927년에 전 독일 국토에 적용하게 되었다. 따라서 이 투영법을 가우스-크뤼거 투영법이라 부르기도 한다. 표준형 TM투영에서는 투영체의 중앙 자오선이 투영면에 접하므로 중앙 자오선에서의 축척 계수는 1이 되며, 그 외 지역은 모두 1보다 크다. 그러나 TM투영은 표준형에서와 같이 투영체와 투영면이 중앙 자오선 한 곳에서만 접하는 것이 아니라 원기둥 표면이 투영체를 절단함으로써 두 곳에서 교차되는 경우도 있다. 이때 두 곳의 교차선은 중앙 자오선에서 같은 거리에 있으며, 축척 계수는 교차선에서는 1이 되고 교차선 사이의 지역은 1보다 적으며, 그 외 지역은 1보다 크고 중앙 자오선에서의 축척은 최소가 된다. 좌표계의 종축은 중앙 자오선으로 하고, 횡축은 적도 또는 이에 평행한 축으로 한다. 격자선은 중앙 자오선과 원점을 통하는 횡축만 직선으로 서로 직교하고, 다른 모든 자오선은 중앙 자오선을 향한 오목 곡선이며, 위도선은 양 극점으로 향한 오목 곡선의 형상이 된다.

TM투영은 그 특성과 축척 계수의 성질 때문에 동서가 좁고 남북이 긴 지역에 아주 적합하여 대부분의 나라에서 국가 기준 좌표계로 채용하고 있으며, 우리나라도 대축척 지도제작에서 이 좌표계를 사용하고 있다. 국가 기준 좌표계로서 좌표대의 폭은 두 곳에서 교차되는 경우에 보통 약 254 km를 범위로 한다. 이는 투영에 의한 축척의 비틀림이 최대 1/10,000까지 허용할 경우이며, 나라에 따라 또는 사용 목적에 따라 좌표대의 폭은 달라질 수 있다.

2.3 UTM과 UPS

萬國測地座標(Universal Transverse Mercator Grid)와 萬國極座標(Universal Polar Stereographic Grid)로 불려지기도 하는 이 좌표계는 세계를 하나의 통일된 좌표로 표시하기 위한 목적으로 세계 2차대전 말기에 미 육군측지부에 의하여 고안되었다. 이 좌표계는 위도 80°S 부터 84°N까지의 지역을 경도 6° 간격으로 총 60개의 좌표 지역대로 분할하여 평면 직각 좌표인 UTM좌표로 표시하고, 양 극지방은 극좌표계인 UPS좌표를 독립적으로 사용한다. 좌표 지역 대의 분할은 경도 180°W~174°W 구간을 1번으로 하여 동서 방향으로 6°씩 60등분하였고, 남북으로는 적도를 기준으로 위도 8°씩, 남북으로 각각 10등분하여 전 세계를 60×20의

격자망을 형성하여 각각 고유 번호를 부여하였다. 다만, 북극지방에 가장 가까운 최북단 지역의 마지막 좌표 지역 대는 위도 8° 대신에 위도 12°(즉, 위도 72°N~84°)간격을 하나의 좌표 지역대로 하였다.

우리 나라의 UTM좌표는 경도 129°와 적도를 좌표계의 원점으로 하는 52S 지역 대에 속한다. UTM좌표는 TM투영에 의하여 얻어진 직각 좌표이며, 투영의 형태는 투영면이 두 곳에서 지구 표면과 교차하는 투영 방법이다. 좌표의 표시는 중앙 자오선과 적도를 각각 좌표계의 종축과 횡축으로 정하여 미터로 표기하고, 좌표의 음수(-) 표기를 피하기 위하여 횡좌표에 500,000 m를 가산한 가좌표를 사용한다. 남반구에서는 종좌표에 1,000,000 m를 가산한다. 축척 계수는 중앙 자오선에서 0.9996으로 최소 값을 나타내며, 중앙 자오선에서 횡방향으로 멀어짐에 따라 점점 증가하다가 적도상에서 중앙 자오선으로부터 동서 180 km되는 지점에서는 1.0000이 되고 좌표대의 경계에서는 약 1.0010이 된다.

UPS좌표계는 UTM좌표로 표시하지 못하는 두 개의 극지방을 표시하기 위한 독립된 좌표계로 UTM좌표가 직각 좌표인 반면에 UPS는 (r, θ)로 표시하는 극좌표계이다. 투영의 원리는 지구를 극점에 접하는 평면에 투영시키는 立體投影法(stereographic projection)을 사용하며, 이때 반대편에 있는 다른 하나의 극점은 바로 투영의 중심점이 된다. 이 투영법에서는 지구 타원체를 이에 상응하는 상사형 구체에 투영하고, 다시 구체로부터 평면에 재 투영하는 이중 투영 방식을 취한다. 특히 UPS투영은 TM투영과 같은 등각투영이며, 램버트의 원뿔 투영의 특수한 경우, 즉 기준 평행 위도선이 극점이고, 원뿔면이 극점에서 접하는 경우라고 볼 수 있다. UPS좌표계의 모든 자오선은 극점으로부터 방사되는 직선이 되며, 위도선은 극점을 중심으로 하는 동심원을 이룬다. 또한 원점에서의 축척 계수는 0.994이며, 적도에서 그 비틀림이 최대가 된다. 좌표대의 경계는 북극 좌표 대에서는 84°N~90°N, 남극 좌표 대에서는 80°S~90°S 이다. 그러나 UPS좌표는 UTM좌표계와의 연결을 위하여 두지역 모두 각각 30°씩 중복되었으므로 실제적으로는 83°30'N 과 79°30'S까지 연장되어 있다. UPS좌표계에서도 UTM과 같이 음수 표기를 피하기 위하여 가좌표로서 종 횡 각각 2,000,000 m를 가산하여 사용한다.

2.4 우리 나라의 평면 직각 좌표

평면 직각 좌표는 삼각점 또는 트래버스점과 같이 지표상 어느 점의 평면 위치를 표시하고, 계산을 간편하게 하기 위하여 적절한 투영법을 기초로 하여 국가마다 고유의 좌표계를 사용하고 있다. 우리 나라에서는 서부 원점, 중부 원점 및 동부 원점 좌표계로 하는 3개의 평면 직각 좌표계로 구분하여 사용하고 있다는 사실은 잘 알려져 있다. 각 좌표계의 경계는 경도를 기준으로 하여 구분되며, 경도 124°~126°구간을 서부 원점 좌표계, 경도 126°~128°구간을 중부 원점 좌표계, 경도 128°~130°구간을 동부 원점 좌표계로 하고 있다. 각 좌표계에서는 위도 38°선과 각 좌표계의 중앙 자오선을 각각 종좌표와 횡좌표의 기준으로 한다. 따라서 각 좌표계의 원점은 위도 38°선과 경도 125°, 127° 및 129°선과의 교점이 되며 이들을 각각 서부 원점, 중부 원점 및 동부 원점이라 부른다. 이와 같이 각 좌표계의 경계는 원점으로부터 동 서로 각각 경도 1° 간격이며, 중앙 자오선으로부터의 직선 거리는 북쪽 지방에서는 약 80 km, 중부 지방에서는 약 89 km, 제주 지방에서는 약 93 km가 된다. 우리 나라의 평면 직각 좌표는 지구 타원체를 이에 상응되는 사상형 구체에 투영하고 이를 다시 평면에 재 투영하는 가우스의 相似二重投影法의 원리에 의하여 설정되었다. 1910년대에 이루어진 우리 나라의 모든 삼각점의 위치는 이 투영 원리에 의하여 계산되었다. 우리 나라의 평면 직각 좌표계에서는 투영면이 중앙 자오선에서 접하는 TM투영을 사용하므로 원점에서의 축척 계수는 1이며, 원점으로 부터 동 서로 멀어짐에 따라 축척 계수는 점차 증대하여 약 90 km 지점에서는 1/10,000 정도로 증대된다. 이것은 우리 나라 전역에 걸쳐 축척 계수가 약 1/10,000 이내의 증대 율을 보여 주므로 측량의 정밀도를 1/10,000까지 허용한다면 우리 나라 전역을 평면으로 간주하여도 무방함을 의미한다. 우리 나라의 평면 직각 좌표에서도 UTM좌표계와 같이 좌표의 음수 표기를 방지하기 위하여 횡좌표(Y)에 200,000 m, 종좌표(X)에 500,000 m(제주도 지역은 550,000 m)를 가산한 가좌표를 사용한다.

3. TM투영의 계산공식

TM투영은 다음의 3가지 조건을 충족하여야 한다. ① 등각투영이다. ② 중앙 자오선에 대하여 서로 대칭이

다. ③ 중앙 자오선에서의 축척은 실축척과 같다.

등각투영에서는 교차하는 두 선분이 이루는 각이 언제나 일정하다. 이것을 식으로 쓰면 식 (1), (2)와 같다.

$$\begin{aligned} x &= f_1(\lambda, q) \\ y &= f_2(\lambda, q) \end{aligned} \quad (1)$$

또는

$$y + ix = f(q + i\lambda) \quad (2)$$

여기서,

λ : 중앙 자오선으로부터의 경도차, 즉 $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$

$$q(\text{isometric latitude}) = \ln \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \left(\frac{1 - \sin\phi}{1 + \sin\phi} \right)^{\frac{e}{2}} \right]$$

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}, \quad i = \sqrt{-1}$$

이 때, 식 (2)는 Cauchy-Riemann 방정식(식 3)을 만족하여야 한다.

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} - \frac{\partial y}{\partial q} = 0, \quad \frac{\partial x}{\partial q} + \frac{\partial y}{\partial \lambda} = 0 \quad (3)$$

식 (2)를 Taylor급수에 의하여 전개하면

$$\begin{aligned} y + ix &= f(q) + \frac{df}{dq}(iq) + \frac{d^2f}{dq^2} \frac{(iq)^2}{2!} \\ &+ \frac{d^3f}{dq^3} \frac{(iq)^3}{3!} + \dots \end{aligned} \quad (4)$$

그런데 $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, 이므로 실수와 허수부분을 분리하면

$$\begin{aligned} x &= \lambda \frac{df}{dq} - \frac{\lambda^3}{3!} \frac{d^3f}{dq^3} + \frac{\lambda^5}{5!} \frac{d^5f}{dq^5} - \frac{\lambda^7}{7!} \frac{d^7f}{dq^7} + \dots \\ y &= f(q) - \frac{\lambda^2}{2!} \frac{d^2f}{dq^2} + \frac{\lambda^4}{4!} \frac{d^4f}{dq^4} - \frac{\lambda^6}{6!} \frac{d^6f}{dq^6} + \dots \end{aligned} \quad (5)$$

여기서, $f(q)$ 는 $\lambda=0$ 에서의 $f(q+i\lambda)$ 이며 또한 TM투영조건 ③으로부터 $m_0=1$ 이므로

$$f(q) = S_\phi \quad (6)$$

이 된다.

식 (6)으로부터

$$\frac{df}{dq} = \frac{dS_\phi}{dq} = \frac{dS_\phi}{d\phi} \frac{d\phi}{dq}$$

$$\frac{d^2 f}{dq^2} = \frac{d^2 S_\phi}{dq^2} = \frac{d}{d\phi} \left(\frac{dS_\phi}{dq} \right) \frac{d\phi}{dq}$$

$$\frac{d^3 f}{dq^3} = \frac{d^3 S_\phi}{dq^3} = \frac{d}{d\phi} \left(\frac{d^2 S_\phi}{dq^2} \right) \frac{d\phi}{dq}$$

$$\text{한편, } \frac{dS_\phi}{d\phi} = M, \quad \frac{d\phi}{dq} = \frac{r}{M} = \frac{N \cos \phi}{M} = (1+e^2 \cos^2 \phi)$$

cos ϕ , $\frac{dr}{d\phi} = -M \sin \phi$ |므로 이들 관계식을 식 (5)에 적용하면 식 (7)-(10)과 같은 TM투영의 좌표 변환 공식이 얻어 진다.

$$\begin{aligned} \frac{x}{N} = & \Delta\lambda \cos \phi + \frac{\Delta\lambda^3 \cos^3 \phi}{6} (1-t^2+\eta^2) + \frac{\Delta\lambda^5 \cos^5 \phi}{120} \\ & (5-18t^2+t^4+14\eta^2-58t^2\eta^2+13\eta^4-64t^2\eta^4+4\eta^6 \\ & -24t^2\eta^6) + \frac{\Delta\lambda^7 \cos^7 \phi}{5040} (61-479t^2+179t^4-t^6 \\ & +331\eta^2-3262\eta^6t^2+1771\eta^2t^4+715\eta^4-8655t^2\eta^4 \\ & +6080t^4\eta^4+769\eta^6-10964t^2\eta^6+9480t^4\eta^6 \\ & +412\eta^8-6760t^2\eta^8+6912t^4\eta^8+88\eta^{10} \\ & -1632t^2\eta^{10}+1920t^4\eta^{10}) \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{y}{N} = & \frac{S_\phi}{N} + \Delta\lambda^2 \sin \phi \cos \phi + \frac{\Delta\lambda^4}{24} \sin \phi \cos^3 \phi (5-t^2+9\eta^2 \\ & +4\eta^4) + \frac{\Delta\lambda^6}{720} \sin \phi \cos^5 \phi (61-58t^2+t^4+270\eta^2 \\ & -330t^2\eta^2+445\eta^4-680t^2\eta^4+324\eta^6-600t^2\eta^6 \\ & +88\eta^8-192t^2\eta^8) - \frac{\Delta\lambda^8}{40320} \sin \phi \cos^7 \phi (1385 \\ & -3111t^2+543t^4-t^6+10889\eta^2-32802t^2\eta^2 \\ & +9219t^4\eta^2+34419\eta^4-129087t^2\eta^4+49644t^4\eta^4 \\ & +56385\eta^6-252084t^2\eta^6+121800t^4\eta^6+50856\eta^8 \\ & -263088t^2\eta^8+151872t^4\eta^8+24048\eta^{10} \\ & -140928t^2\eta^{10}+94080t^4\eta^{10}+4672\eta^{12} \\ & -30528t^2\eta^{12}+23040t^4\eta^{12}) \end{aligned} \quad (8)$$

여기서, $t = \tan \phi$

$$\eta^2 = e^2 \cos^2 \phi = \frac{e^2}{1-e^2} \cos^2 \phi$$

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$$

$$S_\phi = \int_0^\phi \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \phi)^{\frac{3}{2}}} d\phi$$

한편 식 (2)는 $q+ix = f(y+ix)$ 로 쓸 수 있으며, 앞에서 유도한 똑같은 방법으로 x, y 를 사용하여 ϕ, λ 를 구할 수

있으며(유도방법 생략) 그 결과는 식 (9) 및 (10)과 같다

$$\begin{aligned} \Delta\lambda = & \sec \phi' \left[\frac{x}{N_1} - \frac{1}{6} \left(\frac{x}{N_1} \right)^3 (1+2t_1^2+\eta_1^2) + \frac{1}{120} \left(\frac{x}{N_1} \right)^5 \right. \\ & (5+6\eta_1^2+28t_1^2-3\eta_1^4+8t_1^2\eta_1^2+24t_1^4-4\eta_1^6+4t_1^2\eta_1^4 \\ & +24t_1^2\eta_1^6) - \frac{1}{5040} \left(\frac{x}{N_1} \right)^7 (61+662t_1^2+1320t_1^4 \\ & +720t_1^6+107\eta_1^2+43\eta_1^4+440t_1^2\eta_1^2+97\eta_1^6 \\ & -234t_1^2\eta_1^4+336t_1^4\eta_1^2+188\eta_1^8-772t_1^2\eta_1^6-192t_1^4\eta_1^4 \\ & +88\eta_1^{10}-2392t_1^2\eta_1^8+408t_1^4\eta_1^6+1536t_1^4\eta_1^8 \\ & \left. -1632t_1^2\eta_1^{10}+1920t_1^2\eta_1^{10}) \right] \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \phi = & \phi' - \frac{t_1}{2R_1 N_1} x^2 + \frac{t_1}{24R_1 N_1^3} x^4 (5+3t_1^2+\eta_1^2-4\eta_1^4 \\ & -9\eta_1^2 t_1^2) - \frac{t_1}{720R_1 N_1^5} x^6 (61+90t_1^2+46\eta_1^2+45t_1^4 \\ & -252t_1^2\eta_1^2-3\eta_1^4+100\eta_1^6-66t_1^2\eta_1^4-90t_1^4\eta_1^2+88\eta_1^8 \\ & +225t_1^4\eta_1^4+84t_1^4\eta_1^6-192t_1^2\eta_1^8) + \frac{t_1}{40320R_1 N_1^7} x^8 \\ & (1385+3633t_1^2+4095t_1^4+1575t_1^6) \end{aligned} \quad (10)$$

여기서, ϕ' : footpoint latitude(그 축점에서 중앙 자오선에 내린 수선이 중앙 자오선과 만나는 점의 위도)

t_1, η_1^2 : ϕ' 에서의 값

N, N_1 : ϕ 및 ϕ' 에서의 표유면곡률반경

4. 수치시험 및 결과분석

식 (7)-(10)에 표시된 TM투영의 좌표 변환 공식은 Taylor급수에 의하여 전개된 무한급수의 형태로 이루어 졌으므로 엄밀한 의미에서의 등각투영이라 할 수 없으나 실제적인 계산에서 무한급수의 계산 항을 충분히 취하면 등각투영이라 할 수 있다. 따라서, 무한급수의 항을 얼마나 택하는가에 따라 계산 결과도 크게 달라진다.

이 연구에서는 식(7) 및 (8)에 표시된 좌표변환 계산식을 계산 항의 수효에 따라 4가지 경우로 구분하고 이를 우리나라 전역에 적용한 후, 계산된 좌표의 정밀도에 대하여 고찰하고자 하였다. 또한 좌표 변환 계산 과정에서 입력된 도·분·초 단위의 각을 라디안 각으로 환산하여야 하며, 이 때 사용하는 π 값은 그 유효숫자의

크기에 따라 계산 결과도 크게 달라 지게 된다. 이 연구에서는 이에 대한 연구도 함께 이루어 졌다.

및 그림 1, 그림 2에 표시되었다.

4.1 계산 항수의 증감에 따른 x, y의 정밀도

좌표 변환식 (7)과 (8)을 계산식 항수의 숫자에 따라 다음과 같이 4가지 공식으로 구분하였으며, 4가지 계산 공식에 따라 경도 1°~3°와 위도 33°~39°의 교차점에 대하여 TM직각좌표가 계산되었다. 계산 결과는 표 1~3

계산공식 1

$$x = N[I+II \times III]$$

$$y = N[I'+II' \times III']$$

계산공식 2

$$x = N[I+II \times (III+IV)]$$

$$y = N[I'+II' \times (III'+IV') + V' \times VI']$$

표 1. 계산방법에 따른 TM투영의 좌표변화

(단위 mm)

위도	경도차 방법	0°			1°			2°			3°		
		1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
33°	ΔN	0	0	0	0.3	0	0	5.5	0	0	28.7	0	0
	ΔE	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.5	0	0
34°	ΔN	0	0	0	0.4	0	0	5.3	0	0	28.0	0	0
	ΔE	0	0	0	0	0	0	0.1	0	0	0.5	0	0
35°	ΔN	0	0	0	0.3	0	0	5.1	0	0	26.9	0	0
	ΔE	0	0	0	0	0	0	1.0	0	0	0.6	0	0
36°	ΔN	0	0	0	0.3	0	0	5.1	0	0	25.8	0	0
	ΔE	0	0	0	0	0	0	0.1	0	0	0.5	0	0
37°	ΔN	0	0	0	0.3	0	0	4.7	0	0	24.7	0	0
	ΔE	0	0	0	0	0	0	0.1	0	0	0.6	0	0
38°	ΔN	0	0	0	0.3	0	0	4.6	0	0	23.5	0	0
	ΔE	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.6	0	0
39°	ΔN	0	0	0	0.2	0	0	4.3	0	0	22.4	0	0
	ΔE	0	0	0	0	0	0	0.1	0	0	0.6	0	0

표 2. π값에 따른 UTM(N) 좌표 (단위 : m)

π	경도	126°	127°	128°	129°
3.14		4207500.16811	4205142.57617	4203728.81020	4203257.68637
3.141		4208845.22644	4206485.88175	4205071.06487	4204599.59085
3.1415		4209517.75689	4207157.53569	4205742.19326	4205270.54413
3.14159		4209638.81247	4207278.43348	4205862.99645	4205391.31579
3.141592		4209641.50259	4207281.12010	4205866.68097	4205393.99960
3.1415926		4209642.30963	4207281.92609	4205866.48632	4205394.80475
3.14159265		4209642.37688	4207281.99325	4205866.55343	4205394.87184
3.141592653		4209642.38092	4207281.99728	4205866.55746	4205394.87587
3.1415926535		4209642.38159	4207281.99795	4205866.55813	4205394.87654
3.14159265358		4209642.38170	4207281.99806	4205866.55824	4205394.87665
3.141592653589		4209642.38171	4207281.99807	4205866.55825	4205394.87666
3.1415926535897		4209642.38171	4207281.99807	4205866.55825	4205394.87666
3.14159265358979		4209642.38171	4207281.99807	4205866.55825	4205394.87666
3.141592653589793		4209642.38171	4207281.99807	4205866.55825	4205394.87666

표 3. π 값에 따른 UTM(E) 좌표 (단위 : m)

π	경도 126°	127°	128°	129°
3.14	236674.80833	324460.76598	412233.65470	500000.00000
3.141	236634.21906	324433.69674	412220.11716	500000.00000
3.1415	236613.93920	324420.17195	412213.35331	500000.00000
3.14159	236610.28987	324417.73819	412212.13617	500000.00000
3.141592	236610.20878	324417.68411	412212.10912	500000.00000
3.1415926	236610.18445	324417.66788	412212.10101	500000.00000
3.14159265	236610.18242	324417.66653	412212.10033	500000.00000
3.141592653	236610.18230	324417.66645	412212.10029	500000.00000
3.1415926535	236610.18228	324417.66644	412212.10028	500000.00000
3.14159265358	236610.18228	324417.66643	412212.10028	500000.00000
3.141592653589	236610.18228	324417.66643	412212.10028	500000.00000
3.1415926535897	236610.18228	324417.66643	412212.10028	500000.00000
3.14159265358979	236610.18228	324417.66643	412212.10028	500000.00000
3.141592653589793	236610.18228	324417.66643	412212.10028	500000.00000

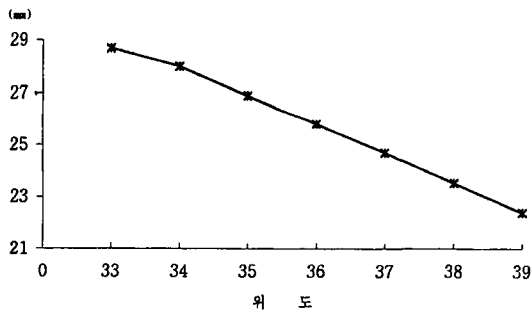


그림 1. 위도에 따른 오차(경도차 3°와 공식 1의 경우)

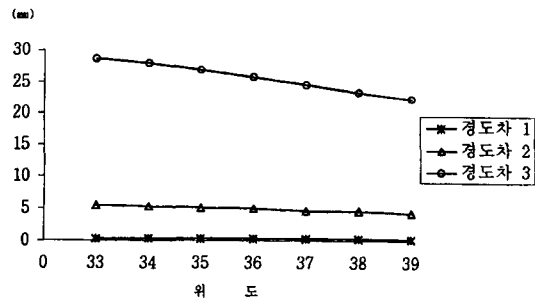


그림 2. 위도에 따른 오차

계산공식 3

$$x = N[I + II \times (III + IV + V) + VI]$$

$$y = N[I' + II' \times (III' + IV') + V' \times (VI' + VII') + VIII']$$

계산공식 4

식 (7)과 (8)에 표시된 항 전부 포함된 공식.

여기서, $I = \Delta\lambda \cos \phi + \frac{\Delta\lambda^3 \cos^3 \phi}{6} (1 - t^2 + \eta^2)$

$$II = \frac{\Delta\lambda^5 \cos^5 \phi}{120}$$

$$III = 5 - 18t^2 + t^4$$

$$IV = 14\eta^2 - 58t^2\eta^2$$

$$V = 13\eta^4 - 64t^2\eta^4 + 4\eta^6 - 24t^2\eta^6$$

$$VI = \frac{\Delta\lambda^7 \cos^7 \phi}{5040} (61 - 479t^2 + 179t^4 - t^6)$$

$$I' = \frac{S_\phi}{N} + \frac{\Delta\lambda^2}{2} \cos \phi \sin \phi$$

$$II' = \frac{\Delta\lambda^4}{24} \sin \phi \cos^3 \phi$$

$$III' = 5 - t^2$$

$$IV' = 9\eta^2 + 4\eta^4$$

$$V' = \frac{\Delta\lambda^6}{720} \sin \phi \cos^5 \phi$$

$$VI' = 61 - 58t^2 + t^4 + 270\eta^2 - 330t^2\eta^2$$

$$VII' = 445\eta^4 - 680t^4\eta^4 + 324\eta^6 - 600t^2\eta^6 + 88\eta^8 - 192t^2\eta^8$$

$$VIII' = \frac{\Delta\lambda^8}{40320} \sin \phi \cos^7 \phi (1385 - 3111t^2 + 543t^4 - t^6)$$

표 1~3에 표시된 계산 결과를 분석해 보면 오차의 크기는 N(X)좌표와 E(Y)좌표에 따라 크기가 크게 달라짐을 알 수 있다. 다시 말해서 E(Y)좌표의 경우에, 경도차

(중앙 자오선으로부터의 경도차) 2°이내에서는 좌표오차가 없으며, 다만 경도차 3°에서 평균 0.5 mm 정도 발생하였다. 반면에 N(X)좌표의 경우에는 경도차의 크기에 따라 큰 변화를 가져왔다. 즉, 경도차 1°에서는 0.3 mm 정도로 무시할 수 있는 정도 이었으나, 2°에서는 평균 5 mm, 3°에서는 약 26 mm로 경도차 변화에 따라 오차는 기하급수적으로 커짐을 알 수 있다(그림 1). 이는 TM투영의 특성인 축척의 변화성 때문인 것으로 판단된다. 한편, 위도에 대한 영향에서는 위도가 낮아지면 낮아 질수록 오차가 커짐을 알 수 있다. 최대 오차는 ΔE 에서 0.6 mm(경도차 3°의 경우), ΔN 에서 최대 28.7 mm의 오차(경도차 3°의 경우)가 발생하였다.

분류된 4가지의 공식에 있어서는 좌표대의 폭이 1° 이상 되는 UTM의 경우에는 사용상 주의할 사항을 하여야 하며 경우 1 대신에 경우 2, 3, 4를 택하여 계산하는 것이 안전함을 알 수 있었다. 그러나 우리나라의 평면 직각 좌표와 같이 좌표대의 폭이 1°인 경우에는 어느 공식을 사용해도 최종 좌표정밀도 1 mm를 얻을 수 있음을 보여 주었다.

4.2 π 의 유효숫자에 따른 오차

식 (7)과 (8)을 사용하여 x, y를 계산하고자 할 때 입력되는 ϕ , λ 의 값은 도 분 초이므로 라디안 값으로의 환산은 필수적이며 이때 π 값이 사용된다. 그러나 실제적으로 π 값을 사용할 때 유효숫자를 소수 몇 자리까지 사용하여야 하는가 하는 문제는 매우 중요하다.

표 2와 표 3은 각각 다른 π 값을 사용하여 위도 38°일 때, 경도 126°, 127°, 128°, 129°에 대한 E, N의 좌표를 계산한 결과이다.

이것으로부터 우리는 1 m 단위의 정밀도를 얻기 위해서는 $\pi = 3.1415926$, 10 cm의 정밀도를 얻기 위해서는 $\pi = 3.141592653$, 1 cm의 정밀도를 얻기 위해서는 $\pi = 3.1415926535$, 1 mm 이상의 정밀도를 얻기 위해서는 $\pi = 3.141592653589$ 까지 사용하여야 함을 알 수 있다.

5. 결 론

Talor의 급수 전개에 의하여 구하여진 TM투영에서의 좌표 변환을 무한급수 항의 숫자에 따라 4가지로 구분하여 우리 나라 전역에 대하여 좌표계산을 실시한 후, 이들이 최종 좌표에 미치는 영향과 π 값의 유효숫자

가 최종 좌표에 미치는 영향에 대하여 고찰한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

첫째, 각각 다른 4가지의 공식을 사용한 결과 중앙 자오선으로부터의 경도 차가 크면 클 수록 N(X)좌표의 오차는 커지며 반면에 E(Y)좌표에서는 큰 변화가 없었다. 특히, 경도 차가 1°인 경우에는 좌표오차가 0.3 mm 이내이지만 1°보다 커지면 오차는 기하급수적으로 커짐을 알 수 있었다. 위도에 있어서는 위도가 낮아지면 낮아 질 수록 오차도 커짐을 알 수 있었다.

둘째, 최대 오차는 ΔN 의 경우 경도차 3°에서 28.7 mm, ΔE 의 경우 0.6 mm가 발생하였다.

셋째, π 값을 사용하는데 있어서 0.1 mm의 정밀도를 얻기 위해서는 소수 13자리 이상을, 1 mm의 정밀도를 얻기 위해서는 소수 12자리까지, 1 cm의 정밀도를 얻기 위해서는 소수 11자리까지, 10 cm의 정밀도를 위해서는 10자리까지 사용하여야 함을 알 수 있었다.

참고문헌

1. 조규전, "표준 측량학", 보성문화사 간, 1996.
2. Charles H. Deetz, "Elements of Map Projection", US Department of Commerce, 1981.
3. Frederick Pearson, "Map Projection Methods", Sigma Scientific Inc., 1984.
4. John Loxton, "Practical Map Production", John Wiley & Sons, 1980.
5. John P. Snyder, "Map Projections used by the U.S. Geological Survey", Geological Survey Bulletin 1532 2nd edition, US Government Printing Office, 1982.
6. Lev. M. Bugayevskiy, John P. Snyder, "Map Projections, A reference Manual", Taylor & Francis, 1995.
7. Porter W., McDonnell, Jr., "Introduction to Map Projections", Marcel Dekker Inc., 1979.
8. P. Vanicek, "Geodesy, The Concept", North Holland, 1986.
9. Paul D. Thomas, "Conformal Projections in Geodesy and Cartography", Special Publication No. 251, U.S. Department of Commerce, Coast and Geodetic Survey, 1952.
10. Russell C. Brinker, "The Surveying Handbook", Van Nostrand Reinhold, 1995.
11. TM 5-237, "Surveying Computer's Manual", Department of the U.S. Army, 1964.
12. TM 5-241-1, "Universal Transverse Mercator Grid", Department of the U.S. Army, 1973.