The Journal of Korean Society of
Coastal and Ocean Engineers
Vol. 8, No. 1, pp. 72~80, March 1996

港內應答에 대한 解析解
Analytical Solution for Harbour Oscillations

徐 承 男*
Seung Nam Seo*

要 旨 : 직사각형 항만의 항내응답에 대한 두 가지 해석해를 제시하였다. 본 논문에서 올바른 정합점근 근사법의 해가 제시되었고 이 해는 Mei (1989)에 의해 처음 유도되었다. 다른 해석해는 특성함수 전개법을 이용하여 유도되었으며 보다 정밀한 수치적분 방법이 사용되었다. 해의 검증을 위해 해석적인 방법 및 수치방법인 경계적분요소법으로 내만에서의 파고증폭비를 계산하여 도시하였다.

Abstract□Two analytical solutions for oscillations in a rectangular harbour are presented. In this paper, the correct solution is obtained by use of matched asymptotic expansion method, which was first derived by Mei (1989). The other solution derived from eigenfunction expansion method is also presented, in which more accurate numerical integration is employed. In order to check the solutions, amplification factors inside the harbor are calculated and plotted by both analytical methods and numerical boundary integral equation method.

1. 서 론

항내로 침입한 파랑은 항내 구조물의 배치, 형태 그리고 수심에 따라 변한다. 항만은 港內靜穩의 확보가 주요 목적으로 파랑특성상 쇄파 보다는 반사에 의한 영향이 가장 크고 불규칙하게 배치된 항내 구조물로부터의 반사를 적절히 재현하기 위해서는 수치모형에 의존할 수밖에 없다. 이러한 항내 파랑변형을 계산하기 위한 수치모형을 개발하기 위해서는 항내 파랑의 변형기구에 대한 정확한 이해가 요구된다. 즉 변형을 일으키는 모든 현상을 파악하고 제 인자의 상대적인 크기를 정량화하여 주요 현상만을 고려하는 과정이 필요하다. 한편 해석해는 특수한 조건에서만 존재하나 변형기구를 쉽게 파악할 수 있을 뿐 아니라 상대적인 크기를 예측하는 데 매우 유용하므로 보다 정밀한 수치모형 개발에 앞서 선행되어져야 한다. 또한 해석해는 수치모형의 결과를 검증하는 데에도 사용되므로 수치모형의 검증에 가장 좋은 길잡이가 된다.

본 연구에서는 수심이 일정한 특수한 지형의 항만에 대한 해석해를 유도하고자 한다. 이와 관련된 기존의 주요 연구로는 Miles과 Munk(1961), Ippen와 Goda (1963), Lee(1969) 그리고 Ünlüata 와 Mei(1973)가 있으며 Mei(1989)는 항만 응답에 대한 기존의 연구를 정리하였다. 국내에서는 수치모형의 검증에 연구결과를 이용하고 있으나 해석해 유도의 체계적인 분석은 이루어지지 않았다. 해석해의 유도에는 Green 함수와 특성함수전개법(Eigenfunction Expansion Method, EFEM)을 결합하여 사용한 방법과 정합점근전개(Matched Asymptotic Expansion Method, MAEM)법이 사용되었고 본 연구에서는 방법에 사용된 특성 및 유도에 포함된 가정을 검토하였다. 또한 경계적분 요소(Boundary Integral Equation Method, BIEM)법을 이용한 수치모형의 결과를 함께 비교하여 정밀도를 분석하였다.

2. 정합점근 전개법(MAEM)

입사파랑에 의한 항만내의 운동은 입사파랑과 항만 주변의 지형에 의해 결정된다. 항주변 해안에 도달한

*한국해양연구소 연안공학연구부 (Coastal Engineering Division, Korea Ocean Research and Development Institute, P. O. Box 29, Ansan 425-600, Korea)

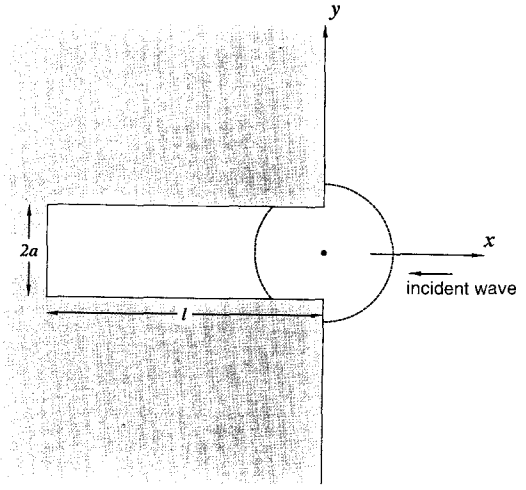

Fig. 1. Rectangular harbour for MAEM.

파랑은 쇄파에 의해 일부 에너지가 감소하고 나머지는 반사된다. 한편 항 개구부을 통해 진입한 파랑은 회절되어 항내로 퍼져 항내 구조물에 의해 반사된다. 반사파 가운데 개구부쪽으로 진행하는 파랑은 외해로 방사하게 된다. 이러한 복잡한 과정에 포함된 현상을 주요 현상의 물리적 의미를 파악하기 위해 단순화한 Fig. 1과 같은 직사각형 항만의 파랑변형을 다루고자 한다. 항개구부 부근의 운동은 주변에서 항내로 진입하는 수입자 운동 때문에 항 안측의 운동보다 복잡하게 된다. 또한 항에서 상당히 떨어진 곳에서는 입사파와 직선해안으로부터의 반사파 그리고 항개구부를 통해 방사된 파랑이 합해져 나타난다. 이렇게 파랑의 운동이 다양한 크기의 지형에 따라 좌우될 때 운동을 지배하는 대표길이(physical length)에 따라 구역을 구분하고 각 구역에 적절한 근사 지배방정식과 경계조건을 구성하여 해를 구한다. 구하여진 해는 타구역의 경계조건을 만족하지 않게 되므로 인접 구역의 공통지역에서 주어진 정밀도로 매끄럽게 정합하여 해를 구하는 방법을 정합점근전개법에서 사용한다. 다음에서는 Mei (1989)의 방법으로 직사각형 항만의 정합점근전개법에 의한 파랑운동을 기술하고자 한다.

직교입사 파랑의 시간변동 부분($e^{-i\omega t}$)을 제거한 속도포텐셜(ϕ)에 의한 항내 안측은 항내벽의 영향으로 1차원 운동이 되며 식(1)로 나타낼 수 있다.

$$\phi_B = B\,e^{-ikx} + De^{ikx} \tag{1}$$

여기서 B, D는 미지상수이며 입사파와 반사파의 진폭에 각각 비례하며 k는 波數이다. 항내측과 개구부와의 공통지역에서 해를 정합하기 위해 식 (1)을 전개하면 식 (2)가 된다.

$$\phi_B = (B+D) + ikx(-B+D) + O(kx)^2, \quad |kx| \ll 1 \tag{2}$$

한편 내항의 안측벽(x = -l)에 부여된 불투과조건으로부터 내항의 해는 식(3)이 된다.

$$\phi_B = E\cos k(x+l) = \frac{E}{2}\left\{e^{-ik(x+l)} + e^{ik(x+l)}\right\} \tag{3}$$

식 (3)과 식 (1)을 비교하면 다음 관계식 (4)가 얻어진다.

$$B = \frac{E}{2}e^{-ikl},\ D = \frac{E}{2}e^{ikl} \tag{4}$$

항만에서 상당히 떨어진 외해측 파랑은 식 (5)를 사용하여 근사적으로 표시할 수 있다.

$$\phi_o \simeq A_o\left(e^{-ikx} + e^{ikx}\right) + \frac{\omega Q}{2g}H_0^{(1)}(kr) \tag{5}$$

여기서 A_o는 입사파랑의 진폭에 비례하는 상수이고, ω는각주파수, g는 중력가속도, Q는 미지상수 그리고 $H_0^{(1)}$은 제 1종 Hankel 함수이다. 식 (5)의 右邊 첫째 항은 입사파와 완전반사에 의한 반사파를 각각 나타내며 둘째 항은 放射波를 의미한다. 식 (5)도 항개구부와의 공통지역에서 해를 정합하기 위해 전개하면 식 (6)이 된다.

$$\phi_o = 2A_o + \frac{\omega Q}{2g}\left\{1 + \frac{2i}{\pi}\left(\ln\frac{kr}{2} + \gamma\right)\right\} + O(kr)^2, \quad |kr| \ll 1 \tag{6}$$

여기서 γ는 Euler 상수이다. 한편 Mei (1989)의 전개식은 식 (7)이며 이는 제 2종 Bessel 함수$Y_0(kr)$을 잘못 전개한 결과 때문이다.

$$\phi_o = 2A_o + \frac{\omega Q}{2g}\left\{1 + \frac{2i}{\pi}\ln\frac{kr\gamma}{2}\right\} + O(kr)^2, \quad |kr| \ll 1 \tag{7}$$

항개구부 부근의 파랑변형은 개구폭($2a$)이 주요한 인자로 개구폭이 파장에 비해 작은 $ka \ll 1$경우 지배방정식은 근사적으로 Laplace식이 되며 conformal mapping인 식 (8)의 Schwarz-Christoffel변환을 이용하

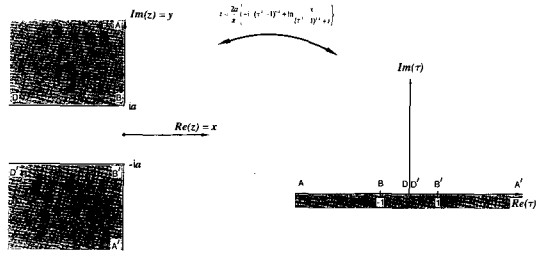

Fig. 2. Conformal mapping of harbour mouth.

면 지배방정식은 변환좌표 τ에서 바뀌지 않으나 Fig. 2에서와 같이 경계선은 무한직선으로 바뀌어 해를 구하는 데 용이하다.

$$z = 2\frac{a}{\pi}\left\{-i(\tau^2-1)^{1/2} + \ln\frac{\tau}{(\tau^2-1)^{1/2}+i}\right\} \tag{8}$$

항안측 무한대에 위치한 두점은 변환좌표τ에서 원점으로 바뀌어 해수가 항내로 유입되면 변환좌표 원점에 sink가 위치하나 항내로부터 방출되면 변환좌표 원점에 source가 존재하게 된다. 그리고 항내벽면에서의 부여된 불투과조건은 변환좌표에서도 동일한 조건이 된다. 좌표변환으로 경계선이 간단해져 해를 구하기가 용이해졌으나 구한 해를 식 (8)을 사용하여 원 좌표계로 환원하여야 비로소 원하는 해가 얻어진다. 그러나 비록 변환좌표계에서 구한 간단한 해라고 환원하는 과정은 매우 어려울 때가 있으며 본 문제는 점근근사해만 구하면 되므로 완전한 해를 구할 필요는 없다. 따라서 지배방정식과 경계조건을 만족하는 복소함수 포텐셜 $F(\tau)$은 식 (9)로 구성할 수 있다.

$$F = C + M\ln\tau + \cdots \tag{9}$$

여기서 C, M은 미지상수이다.

항개구부 부근 내항($x<0$)에서의 해를 정합하기 위해 항내측($|z/a|\gg 1$, 즉 $|\tau|\ll 1$)으로 식 (8)을 전개하면 식 (10)이 된다.

$$\begin{aligned} z &= 2\frac{a}{\pi}\left(-i\sqrt{-1} + \ln\frac{\tau}{\sqrt{-1}+i}\right) + O(\tau)^2 \\ &= 2\frac{a}{\pi}\ln\frac{e\,\tau}{2i} + O(\tau)^2 \end{aligned} \tag{10}$$

식 (10)을 τ에 대해 정리한 후 ln τ를 구하면 식 (11)이 된다.

$$\ln\tau = \frac{\pi z}{2a} + \ln\frac{2i}{e} \tag{11}$$

식 (11)을 식 (9)에 대입한 후 속도포텐셜을 구하기 위해 실수 부분만 취하면 식 (12)가 된다.

$$\phi_B = C + M\left(\frac{\pi x}{2a} + \ln\frac{2}{e}\right) \tag{12}$$

마찬가지로 항개구부 부근 외해($x>0$)에서의 해를 정합하기 위해 외해측($|z/a|\gg 1$, 즉 $|\tau|\gg 1$)에 대해 식 (8)을 전개하면 식 (13)이 된다.

$$\begin{aligned} z &= \frac{2a}{\pi}\left(-i\,\tau + \ln\frac{\tau}{\tau+i}\right) + O\left(\frac{1}{\tau}\right) \\ &= -\frac{2a}{\pi}i\,\tau + O\left(\frac{1}{\tau}\right) \end{aligned} \tag{13}$$

식 (13)을 τ에 대해 정리한 후 ln τ를 구하면 식 (14)가 된다.

$$\ln\tau = \ln\frac{\pi r}{2a} + i\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \tag{14}$$

식 (14)를 식 (9)에 대입한 후 실수 부분만 취해 속도포텐셜을 구한다.

$$\phi_o = C + M\ln\frac{\pi r}{2a} \tag{15}$$

인접구간들의 공통구역에서 해를 정합하면 내항에서는 식 (2), (4), (12)로부터 식 (16)이 되며 외해측에서는 식 (6)과 식 (15)으로부터 식 (17)이 된다.

$$E\cos kl - (kE\sin kl)x = C + M\ln\frac{2}{e} + \frac{M\pi}{2a}x \tag{16}$$

$$\begin{aligned} &2A_o + \frac{\omega Q}{2g}\left\{1 + \frac{2i}{\pi}\left(\ln\frac{k}{2} + \gamma\right)\right\} + i\frac{\omega Q}{\pi g}\ln r \\ &\quad = C + M\ln\frac{\pi}{2a} + M\ln r \end{aligned} \tag{17}$$

식 (16)과 (17)은 한 점이 아니라 공통구역에서 성립하기 때문에 상수와 변수부분을 분리하여 등식을 세우면 4개 미지수 E, C, M, Q에 대해 4개의 식이 만들어져

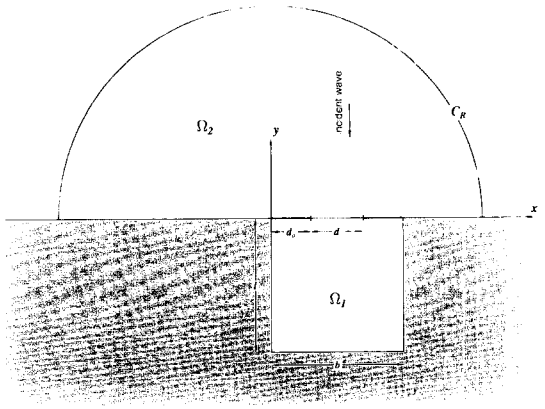

Fig. 3. Rectangular harbour for EFEM and BIEM.

미지수를 구할 수 있다. 내항에서의 포텐셜은 구한 미지수를 식 (3)에 대입하면 된다.

$$\phi_B = \frac{2A_o \cos k(x+l)}{\cos kl + \frac{2ka}{\pi}\sin kl\left(\ln\frac{2ka}{\pi e}+\gamma\right) - ika\,\sin kl} \tag{18}$$

마지막으로 내항의 안측벽($x = -l$)에서의 증폭비 A_f는 식 (19)가 된다.

$$A_f \equiv \left|\frac{\phi_B}{2A_o}\right| = \left|\cos kl + \frac{2ka}{\pi}\sin kl\left(\ln\frac{2ka}{\pi e}+\gamma\right) - ika\,\sin kl\right|^{-1} \tag{19}$$

식 (19)는 Mei (1989)가 유도한 식과 차이가 있으며 이는 위에 지적한 바와 같이 올바른 식 (6) 대신 식 (7)을 사용하였기 때문이다.

3. 특성함수 전개법(EFEM)

직사각형 항만의 좌표계를 2장에서 사용한 것과 다른 Fig. 3으로 정의한다. 항개구폭을 b, 길이는 l로 표시하고 구역 1을 항내만, 구역 2는 외항측을 나타낸다. 구역 1의 지배방정식과 경계조건은 식 (20)과 (21)이다.

$$\nabla^2\phi_1 + k^2\phi_1 = 0 \tag{20}$$

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial\phi_1}{\partial x}\right|_{(0,y)} = 0;\ \left.\dfrac{\partial\phi_1}{\partial x}\right|_{(b,y)} = 0, & -l \le y \le 0 \\ \left.\dfrac{\partial\phi_1}{\partial y}\right|_{(x,-l)} = 0, & 0 \le x \le b \\ \left.\dfrac{\partial\phi_1}{\partial y}\right|_{(x,0)} = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le d_o,\ d_o + d \le x \le b \\ C(x), & d_o < x < d_o + d \end{cases} \end{cases} \tag{21}$$

구역 1은 직사각형이기 때문에 지배방정식을 풀기 위해 변수분리법을 사용할 수 있으며 조건 (21)의 첫째와 둘째 식을 사용하면 특성함수로 전개된 식 (22)의 일반해가 얻어진다.

$$\phi_1 = a_o \cos k(y+l) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{b}\cosh q_n(y+l) \tag{22}$$

여기서 $q_n = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - k^2}$, $a_n (n=1,2,\cdots)$은 미지상수이다. 이 미지상수를 구하기 위해 조건 (21)의 셋째 식을 사용하고 각 특성함수를 곱해 구간 [0, b]에서 x에 대해 적분하면 식 (23)과 (24)가 얻어진다.

$$a_o = \frac{-\int_{d_o}^{d+d_o} C(x)dx}{kb\sin kl} \tag{23}$$

$$a_n = \frac{2\int_{d_o}^{d+d_o} C(x)\cos\frac{n\pi x}{b}dx}{q_n b\,\sinh q_n l} \tag{24}$$

구역 2에서의 지배방정식은 식 (20)과 같은 Helmholtz 방정식이 되며 이 구역에서의 파랑은 입사파, 반사파 그리고 항내로부터 개구부를 통해 외해로 방출되는 방사파의 합으로 구성된다. 입사파와 반사파는 평면파이므로 Helmholtz 방정식, 방사조건 그리고 $y = 0$에서 불투과조건을 만족하는 완전반사의 경우 해는 식 (25)로 표시할 수 있다.

$$\phi_o \equiv \phi^i + \phi^r = A_o(e^{i(k,x+k,y)} + e^{i(k,x-k,y)}) \tag{25}$$

여기서 A_o는 입사파랑의 진폭에 비례하는 상수이다. 직교입사의 경우 식 (25)는 식 (26)이 된다.

$$\phi_o = A_o(e^{-iky} + e^{iky}) \tag{26}$$

방사파에 대한 지배방정식과 조건은 식 (27)과 (28)이 된다.

$$\nabla^2\phi^s + k^2\phi^s = 0 \tag{27}$$

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial\phi^s}{\partial y}\right|_{(x,0)} = \begin{cases} 0, & \text{elsewhere} \\ C(x) & d_o < x < d_o + d \end{cases} \\ \sqrt{kR}\left(\dfrac{\partial\phi^s}{\partial\gamma} - ik\phi^s\right) = 0, \quad \text{as } kR \to \infty \end{cases} \tag{28}$$

식 (27)과 (28)로부터 적분방정식을 구성할 수 있으며 유도과정은 제 4장에 기술하고 그 결과만 나타내면 식 (29)가 된다.

$$2i\phi^s(\xi,0) = \int_{d_o}^{d_o+d} H_0(k|x-\xi|)\frac{\partial\phi^s}{\partial y}dx \tag{29}$$

여기서 ξ는 개구부상의 一點이다.

입사파랑과 항만의 형태가 주어지면 항주변의 파랑은 외력인 입사파랑과 항내운동의 상호작용 결과 一意的으로 결정된다. 그러나 본 장에서는 편의상 두 개의 구역으로 구분하여 각기 해를 구성하였기 때문에 두 구역의 운동을 동적으로 연계시키기 위한 정합조건(matching condition)이 필요하며 식 (30)으로 표시된다.

$$\begin{cases} \phi_1 = \phi_2 (= \phi^o + \phi^s) \\ \dfrac{\partial\phi_1}{\partial n} = -\dfrac{\partial\phi_2}{\partial n}\left(= -\dfrac{\partial\phi^s}{\partial n}\right), \quad d_o < x < d_o + d \end{cases} \tag{30}$$

여기서 n은 외향법선 방향의 좌표이며 공통경계인 개구부에서 구역 1과 구역 2의 값은 부호가 반대로 된다. 식 (29)를 식 (30)과 (21)을 사용하여 구역 1의 포텐셜로 나타낼 수 있다. 직교입사의 경우에는 식 (31)이 된다.

$$\phi_1(\xi,0) = \frac{1}{2i}\left(\int_{d_o}^{\xi} H_0(k(\xi-x))C(x)dx + \int_{\xi}^{d_o+d} H_0(k(x-\xi))C(x)dx\right) + 2A_o \tag{31}$$

개구부에서의 유속 $C(x)$는 사각입사의 경우 x의 함수가 되어 식 (23), (24), (31)을 계산하기가 용이하지 않으나 직교입사의 경우 거의 일정하므로 평균값 $\overline{C}$로 가정할 수 있다. 그러면 구역 1에서의 속도포텐셜은 식 (32)로 나타내 진다.

$$\phi_1 = -\frac{\overline{C}d}{kb\sin kl}\cos k(y+l) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\overline{C}\left\{\sin\dfrac{n\pi(d_o+d)}{b} - \sin\dfrac{n\pi d_o}{b}\right\}}{n\pi q_n \sinh q_n l}\cos\frac{n\pi x}{b}\cosh q_n(y+l) \tag{32}$$

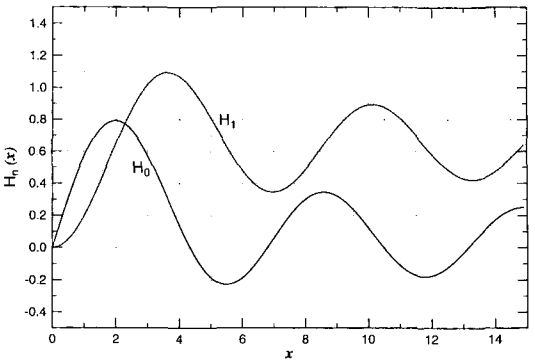

Fig. 4. Struve functions, H_0 and H_1.

그리고 구역 2의 적분방정식은 Hankel함수의 인수를 변환하여 정리하면 식 (33)으로 나타내 진다.

$$\phi_1(\xi,0) = \frac{\overline{C}}{2ik}\left(\int_0^{k(\xi-d_o)} H_0(t)dt + \int_0^{k(d_o+d-\xi)} H_0(t)dt\right) + 2A_o \tag{33}$$

식 (33)의 右邊 적분항은 Struve 함수 (H_n, $n = 0, 1, \cdots$)를 사용하여 나타낼 수 있다.

$$I(x) \equiv \int_0^x H_0(t)dt = xH_0(x) + \frac{\pi}{2}x\{H_0(x)H_1(x) - H_1(x)H_0(x)\} \tag{34}$$

여기서

$$\begin{cases} H_0(x) = \dfrac{2}{\pi}\left(x - \dfrac{x^3}{1^2\cdot 3^2} + \dfrac{x^5}{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2} - \cdots\right) \\ H_1(x) = \dfrac{2}{\pi}\left(\dfrac{x}{1^2\cdot 3} - \dfrac{x^3}{1^2\cdot 3^2\cdot 5} + \dfrac{x^5}{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7} - \cdots\right) \end{cases} \tag{35}$$

식 (35)로 정의된 Struve 함수 H_0, H_1을 Fig. 4에 나타내었다(Abramowitz와 Stegun, 1972).

식 (33)은 개구부 상의 一點 (ξ, 0)의 함수로 표시되므로 ξ의 依存을 없애기 위해 다음과 같이 적분하고 식 (34)를 이용하여 나타내면 식 (36)이 된다.

$$\bar{\phi}_1 = \frac{1}{d}\int_{d_o}^{d_o+d}\phi_1(\xi,0)\,d\xi$$
$$= \frac{\bar{C}}{2ikd}\left\{\int_{d_o}^{d_o+d} I[k(\xi-d_o)]d\xi + \int_{d_o}^{d_o+d} I[k(d_o+d-\xi)]d\xi\right\} + 2A_o$$
$$\equiv \bar{C}\cdot\bar{B}_o + 2A_o \tag{36}$$

식 (36)은 수치적분을 사용하여 계산할 수 있으며 여기서는 trapezoidal 적분법을 사용하여 계산하였다. 마찬가지 방법으로 식 (32)를 적분하면 식 (37)이 된다.

$$\bar{\phi}_1 = \frac{1}{d}\int_{d_o}^{d_o+d}\phi_1(x,0)dx = -\frac{\bar{C}d}{kb\tan kl} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\bar{C}b\left\{\sin\frac{n\pi(d_o+d)}{b} - \sin\frac{n\pi d_o}{b}\right\}^2}{d(n\pi)^2 q_n \tanh q_n l}$$
$$\equiv \bar{C}\cdot(\bar{S}_0 + \bar{S}_n) \tag{37}$$

마지막으로 미지수 $\bar{C}$는 식 (36)과 (37)로부터 얻어진다.

$$\bar{C} = \frac{2A_o}{\bar{S}_o + \bar{S}_n - \bar{B}_o} \tag{38}$$

식 (38), (32)를 이용하면 항내만의 중앙점 ($b/2$, $-l$)에서 증폭비 A_f를 구하게 된다.

$$A_f = \left|\frac{\phi_1\left(\frac{b}{2},-l\right)}{2A_o}\right| \tag{39}$$

4. 경계적분 요소법(BIEM)

Fig. 3에 도시한 좌표계를 사용하여 항내를 구역 1로, 항외를 구역 2로 표시한다. 항내 안벽과 방파제는 불투과 구조물이라 가정하면 지배방정식과 경계조건을 나타내면 다음 식과 같다.

구역 1 :

$$\nabla^2\phi_1 + k^2\phi_1 = 0 \tag{40}$$

$$\begin{cases}\left.\dfrac{\partial\phi_1}{\partial n}\right|_{(0,y)} = 0, & \text{elsewhere}\\ \left.\dfrac{\partial\phi_1}{\partial n}\right|_{(x,0)} = C(x), & d_o < x < d_o + d\end{cases} \tag{41}$$

여기서 n은 외향 법선 방향의 좌표이다.

구역 2 :

$$\nabla^2\phi^2 + k^2\phi_2 = 0 \tag{42}$$

$$\begin{cases}\left.\dfrac{\partial\phi_2}{\partial n}\right|_{(0,y)} = 0, & \text{along x axis except harbor entrance}\\ \left.\dfrac{\partial\phi_2}{\partial n}\right|_{(x,0)} = -C(x), & d_o < x < d_o + d\\ \sqrt{kR}\left(\dfrac{\partial\phi^s}{\partial r} - ik\phi^s\right) = 0, & as\ kR\to\infty\end{cases} \tag{43}$$

정합조건은 식 (30)으로 주어지며 편의상 다시 나타내기로 한다.

$$\begin{cases}\phi_1 = \phi_2 (= \phi^o + \phi^s)\\ \dfrac{\partial\phi_1}{\partial n} = -\dfrac{\partial\phi_2}{\partial n}\left(= -\dfrac{\partial\phi^s}{\partial n}\right), & d_o < x < d_o + d\end{cases} \tag{30}$$

쉽게 문제를 풀기 위해 임의로 구역을 나누었기 때문에 구역의 공통 경계에서는 정합조건 식 (30)이 부여되어야 한다. 구역 2의 파랑은 입사파, 반사파 그리고 항외측으로 퍼져 나가는 방사파의 합으로 표시되며 방사파의 방사조건은 식 (28)의 둘째 식과 같다.

각 구역의 지배방정식은 Helmholtz 방정식이며 이에 합당한 Green 함수는 Hankel 함수이며 방사조건을 감안하면 제 1종 함수 $H_0^{(1)}$이 된다. 따라서 제 1구역에 대한 적분방정식은 식 (44)가 된다.

$$i\frac{2\alpha}{\pi}\phi_1(\vec{x_i}) = \int\left(\phi_1\frac{\partial G}{\partial n} - \frac{\partial\phi_1}{\partial n}G\right)ds \tag{44}$$

여기서 α는 경계선 상의 점 $\vec{x_i}$의 내각이며 매끄러운 경계 상의 점에서 α는 π값을 갖는다. G는 Green 함수이고 $H_0(|\vec{x}-\vec{x_i}|)$로 정의되며 $\vec{x}$는 경계선 상의 任意點이다. 경계적분 요소법은 경계를 유한개의 격자점으로 나누고 각 격자점에서 식 (44)를 계산한다. 특별한 경우를 제외하면 식 (44)의 우변 적분은 수치적인 방법을 사용하게 된다.

편미분 방정식의 해가 존재하려면 경계조건이 부여되어야 하므로 임의 격자점에서는 경계조건을 사용하면 한 개의 미지수만이 존재한다. 결국 식 (44)의 우변 적분을 풀면 격자점의 개수에 해당하는 미지수가 생기

게 되므로 $\vec{x_i}$를 모든 격자점에 위치시키면 미지수 개수에 해당하는 연립방정식이 얻어져 미지수를 구할 수 있다.

인접 두 격자점으로부터 구성되는 요소에서 미지수의 변화를 나타내는 형상함수를 정할 수 있다. 예를 들면 미지수가 선형적으로 변하는 선형요소는 식 (45)로 표시된다. 편의상 구역을 나타내는 첨자를 생략하면

$$\phi = \phi_j \frac{s_{j+1}-s}{s_{j+1}-s_j} + \phi_{j+1}\frac{s-s_j}{s_{j+1}-s_j},\ s_j \le s \le s_{j+1} \tag{45}$$

마찬가지로 $\partial\phi/\partial n$도 식 (45)의 형태로 전개한 후 식 (44)에 대입하여 적분하고 부여된 경계조건을 사용하면 하나의 방정식이 된다. Hankel 함수의 원점인 $\vec{x_i}$가 적분할 요소에 포함되지 않는 경우는 정상적분(regular integration)으로 Gauss-Legendre 구적법을 사용하였다. 그러나 격자점 $\vec{x_i}$가 적분할 요소에 포함된 경우에는 특이적분(singular integration)이 되며 수치적분의 정밀도를 높이기 위해 특이점을 고려하는 것이 좋다. 예를 들면 구간 $[s_i, s_{i+1}]$의 특이적분은 식 (46)과 같이 되며 右邊 첫째와 둘째 항은 정상적분으로 위의 수치적분으로 계산하고 셋째 항은 특이적분으로 해석적인 방법으로 계산 가능하다.

$$\begin{aligned}
&\int_{s_i}^{s_{i+1}} \left(\phi\frac{\partial G}{\partial n} - \frac{\partial\phi}{\partial n}G\right)ds \\
&= \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left\{-\phi k H_1[k(s-s_i)]\frac{\partial r}{\partial n}\right\}ds \\
&\quad - \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{\partial\phi}{\partial n}\left\{H_0[k(s-s_i)] - \frac{2i}{\pi}\ln k(s-s_i)\right\}ds \\
&\quad - \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{\partial\phi}{\partial n}\frac{2i}{\pi}\ln k(s-s_i)\,ds
\end{aligned} \tag{46}$$

그리고 비슷한 방법으로 구간 $[s_{i-1}, s_i]$에 대한 적분을 하였다.

$\vec{x_i}$를 모든 격자점에 위치시켜 연립방정식을 구성하고 이를 풀면 격자점에서 미지수가 얻어진다. 그러나 항개구부에서는 ϕ 뿐 아니라 $\partial\phi/\partial n$도 미지수이므로 제 1구역에서 미지수의 개수는 항개구부의 격자점의 수 만큼 많기 때문에 동수의 연립방정식이 요구된다. 제 2구역의 放射波에 관한 경계치 문제는 식 (42)와 (43)의 ϕ_2대신 ϕ^s를 대입한 식임을 보일 수 있다. 항개구부의 격자점 수 만큼의 연립방정식이 요구되므로 $\vec{x_i}$를 항개구부에만 위치시킨 적분방정식은 식(44)와 비슷한 식 (47)이 된다.

$$2i\,\phi^s(\vec{x_i}) = \int\left(\phi^s\frac{\partial G}{\partial n} - \frac{\partial\phi^s}{\partial n}G\right)ds \tag{47}$$

이 경우 식 (47)의 반원경계에서는 방사조건으로부터 ϕ^s의 크기는 $1/\sqrt{kR}$이며 G 역시 같은 값을 가져 반원으로부터 계산되는 값은 무시할 수 있다. $\vec{x_i}$가 항개구부에만 위치한 경우 $\partial G/\partial n$은 零이 되므로 식 (47)은 간단해지며 정합조건을 사용하여 구역 1 미지수에 대한 식으로 바꿀 수 있다. 그러나 직선해안이 아닌 경우에는 $\partial G/\partial n$이 零이 아니므로 불규칙한 해안에도 격자점을 두어야 하기 때문에 식 (48) 대신 식 (47)을 사용하여야만 한다.

$$2i(\phi_1 - \phi^o) = \int\frac{\partial\phi_1}{\partial n}G\,ds \tag{48}$$

불투과조건을 사용하면 식 (48)의 적분구간도 항개구부가 된다. 따라서 식 (48)로부터 항개구부의 격자점 수 만큼의 연립방정식이 만들어지므로 미지수를 풀 수 있다.

5. 결과비교

본 장에서는 직사각형의 항만에 대한 항내응답의 결과를 나타내었다. 직사각형의 항만은 개구폭(b)는 2.38미터, 길이(l)은 12.25미터 그리고 수심(h)는 10.128미터로 기존 결과(Ippen과 Goda, 1963; Lee, 1969)에 이용한 제원과 같다. 항만에 직교로 입사하는 파랑의 항내만 중앙점($b/2$, $-l$)에서 입사파에 대한 파고증폭비를 나타낸 Fig. 5는 정합점근전개법(MAEM)과 특성함수전개법(EFEM)에 의한 결과이다. 실선은 EFEM의 결과로 직교입사시 내포된 가정을 검토하면 보다 정밀한 값을 보이는 것으로 판단되며 점선은 MAEM의 결과로 Mei (1989)가 유도한 식의 결과와 본 논문의 결과이다. 제 2장에서 언급한 바와 같이 Mei는 식 (7)로 Hankel 함수를 잘 못 전개하여 이를 표시하면 Fig. 5의 결과처럼 상당한 오차를 보이는 반면에 식 (6)을 사용하여 유도한 본 결과식 (19)는 EFEM의 결과와 거의 일치하나 공진대에서 약간 작은 값을 보이며 제 2공진

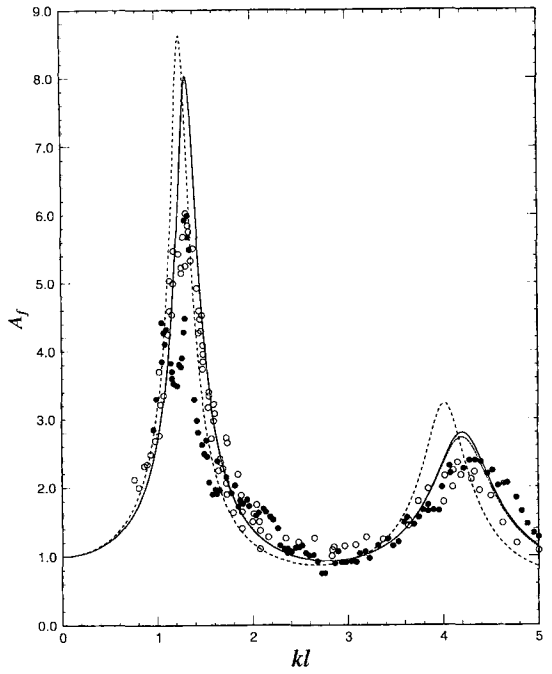

Fig. 5. Amplitication factors at the center inner end bay, Lab. data: ○ Lee(1969); ● Ippen and Goda(1963), EFEM; --- MAEM(present); --- MAEM(Mei's).

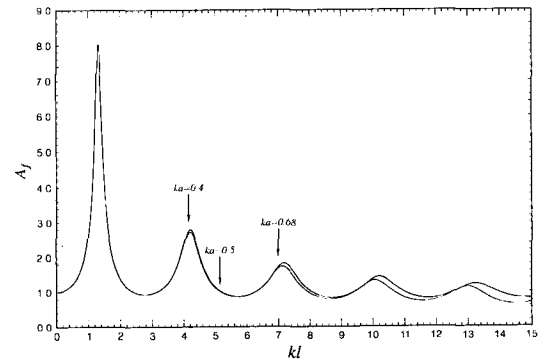

Fig. 6. Amplitication factors at the center of inner end bay, EFEM; --- MAEM(present).

대에서는 차이가 나타난다. 그림의 부호는 수리실험의 자료이며 EFEM과 본 MAEM의 결과는 수리실험 자료와 잘 일치하나 공진대에서는 수치실험 결과가 크며 이러한 현상은 기존의 다른 수치모형결과(徐 等, 1994)에도 나타난다. 이는 반사율을 작게 조정하면 수리모형실험 결과에 접근함을 보이므로 수리실험의 안벽으로부터 반사는 완전반사가 아닌 것으로 판단된다.

세 2장의 MAEM에 의한 증폭비의 식을 유도하는

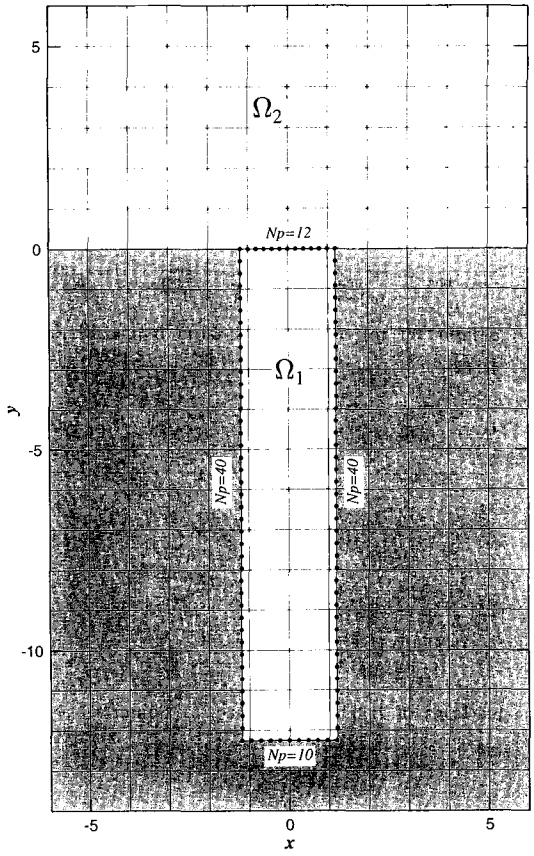

Fig. 7. Grid system for BIEM.

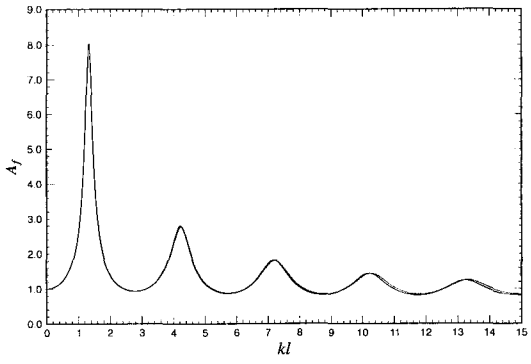

Fig. 8. Amplitication factors at the center of inner end bay, EFEM; --- BIEM(linear element).

데 사용된 가정은 개구폭의 반(a)과 파장의 비인 $ka \ll 1$ 작은 경우이며 ka값이 클수록 정밀도가 떨어진다. Fig. 6에서 MAEM의 성립 범위를 알기 위해 증폭비를 도시하였다. 실선은 EFEM 결과이며 본 MAEM의 결

과는 점선으로 표시하였고 $ka > 0.68$인 경우에는 공진대의 위치에 상당한 오차를 보여 $ka < 0.4$의 범위에서 그 정밀도가 유지되는 것으로 분석된다.

마지막으로 EFEM의 결과와 경계적분요소법(BIEM)의 결과를 비교하였다. Fig. 7은 BIEM 결과에 사용된 격자망도이며 Np는 격자점의 개수이며 구역 1에는 102개이며 구역 2에는 개구부상의 모든 격자점이 나타나야 하므로 13개가 되어 총 개수는 115개로 구성되었다. Fig. 8의 실선은 EFEM의 결과이며 점선은 BIEM결과이다. kl의 값이 작은 경우 두 결과는 거의 일치하나 커짐에 따라 차이를 보인다. 두 모형에 내재된 가정을 비교하면 EFEM 결과가 보다 정밀한 것으로 판단되나 제 3장에서도 언급한 바와 같이 개구부의 유속을 미지상수로 가정한 영향을 감안하여야 한다. 즉 직교입사의 경우라도 파장이 개구폭에 비해 작으면(kl 값이 크면) 항내로 입사한 파랑의 침입이 많게 되고 반사 및 회절에 의한 영향으로 개구부 주변의 파형이 복잡해 개구부의 유속이 일정하다고 가정하는 것은 어렵다고 추측된다. 따라서 이에 대한 연구가 필요한 것으로 판단된다.

6. 결론 및 토의

직사각형 항만응답에 사용되는 해석해인 정합근사전개법(MAEM)과 특성함수전개법(EFEM)에 대한 식을 유도하고 파고증폭비를 계산하여 기존 수리모형 실험결과 및 수치모형인 경계적분요소법(BIEM) 결과들을 상호 비교하였다. Mei (1989)의 정합근사전개법에서 Hankel 함수의 인수가 작은 경우 전개된 근사식에 오류가 있음을 밝혔고 올바른 파고증폭비의 식을 제시하였다. 내재된 가정을 분석하면 특성함수전개법의 결과가 보다 정밀한 것으로 판단되며 개구폭의 반(a)과 파장의 비인 $ka < 0.4$인 범위에서는 MAEM 정밀도가 유지되는 것으로 판단된다.

특성함수전개법에 의한 파고증폭비의 식에 가장 큰 문제점은 개구부의 유속을 미지상수로 가정한 점이며 제 5장에 언급한 바와 같이 파랑제원과 항만의 제원(개구폭, 길이)이 상대적인 크기에 따라 유속을 상수로 가정할 수 없는 경우도 존재하므로 이에 대한 연구가 필요하다.

경계적분요소법은 직교항만 뿐 아니라 임의 형태의 항만에도 적용할 수 있는 방법이다. 그러나 본 논문에 제시된 방법은 직선해안에만 적용되며 해안의 일부가 불규칙한 경우에는 사용할 수 없다. 경계적분요소법은 요소내의 값을 계산하기 위해 형상함수를 정해야 하며 低次의 형상함수를 사용하는 경우에는 많은 격자점이 필요한 단점과 수치적분에 의한 오차도 결과의 정밀도에 영향을 준다. 그러나 본 논문에 대상이 된 직사각형 항만은 지형이 단순하여 오차가 크기 않으며 이는 특성함수전개법의 결과와 비교로부터 알 수 있다. 즉 장주기파에 경우 경계적분요소법의 결과는 매우 정밀도가 높은 것으로 나타났다.

謝 辭

본 연구는 1995년 한국해양연구소에서 실시한 基本研究事業(PE00548) 연구의 결과이며 연구비 지원에 감사를 드린다.

참고문헌

徐承男, 延泳鎭, 1994. Galerkin 有限要素法에 의한 港內靜穩度 模型, 韓國海岸·海洋工學會誌 6(4), 439-451.

Abramowitz, M. and Stegun, I.A., 1972. *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York.

Ippen, A.T. and Goda, Y., 1963. Wave induced oscillations in harbor; The solution for a rectangular harbor connected to the open-sea, *Report No. 59*, Hydrodynamic Lab., M.I.T.

Lee, J.J., 1969. Wave induced oscillations in harbors of arbitrary shape, Ph.D. Thesis, California Institute of Technology.

Mei, C.C., 1989. *The Applied Dynamics of Oceans Surface Waves*, World Scientific Pub. Co., Singapore.

Miles, J.W. and Munk, W., 1961. Harbor paradox, *J. of Waterways, Harbors Division*, ASCE, 87(WW3), 111-131.

Ünlüata, U. and Mei, C.C., 1973. Long wave excitation in harbors: An analytical study, *Report No. 171*, Ralph M. Parsons Lab. for Water Resources and Hydodynamics, MIT.