퍼지 대화형 다목적 비선형계획에서의 절충된 통합연산자의 결정
- Decision of Compensatory Aggregation Operator in Interactive Fuzzy Multiobjective Nonlinear Programming -

윤 연 근*
Yun, Yeon-Geun
남 현 우**
Nam, Hyun-Woo
이 상 완*
Lee, Sang-Wan

Abstract

Fuzzy approaches used to solve MONLP(Multiobjective Nonlinear Programming Problem) are based on the max-min method of fuzzy sets theory. However, since the min operator noncompensatory, these approaches can not guarentee an efficient solution to the problem. In this paper, we presents an algorithm for finding the aggregation operator to find efficient solution. In particular, our presented algorithm is guarentee an efficient solution. On the basis of proposed algorithm, an illustrative numerical example is presented.

1. 서 론

오늘날 대부분의 의사결정문제는 불확실하고 모호한 목표와 제약조건들이 주어지고 다수의 상충(trade off)된 다목적 의사결정문제이다. 그러나 모호한 상황에서 다목적 의사결정문제는 목적들이 상충되기 때문에 최적해는 존재하지 않는다. 그러므로 절충된(compensatory) 해 즉, 파레도(pareto) 최적해 집합중에서 의사결정자의 선호도를 잘 반영하여 주는 합리적인 절충해를 찾아야만 한다. 그러나 의사결정자의 선호도를 충분히 반영하는 선호함수는 미지이고 직접 정하는 것이 곤란하므로 선호함수를 전체적(global)으로 동일하게 정하는 것이 아니고 의사결정자와의 대화를 통하여 얻어지는 국부적(loacl)인 선호정보를 이끌어내어 최종적으로 다목적 의사결정문제에 모호성을 잘 반영하여 주는 퍼지집합론을 적용하여 파레토 최적성이 보장되고 의사결정자의 만족해를 구하는 퍼지 대화형 수법이 많이 제안되어져 연구되고 있다.

* 동아대학교 산업공학과
** 경동전문대학 산업안전관리과

Sakawa 등은 5가지 구성함수 즉, 선형(linear) 구성함수, 지수(exponential) 구성함수, 쌍곡선(hyperbolic) 구성함수, 역쌍곡선(hyperbolic inverse) 구성함수 그리고 부분선형(piecewise linear) 구성함수 등을 사용하여 대화형 퍼지 다목적 선형 계획법[1], 대화형 퍼지 다목적 비선형 계획법[2], 대화형 퍼지 다목적 선형 분수 계획법[3] 등을 제시하였다.[4,5]. 이들 연구들은 의사결정자에게 제공되는 정보들이 너무 어렵거나 복잡하기 때문에 계속적인 대화를 통해 의사결정자의 일관된 반응을 기대하기 어렵다는 한계성을 지니고 있다. 이런 문제점에도 불구하고 의사결정자의 선호함수를 잘 표현하는 적절한 통합연산자를 명확하게 확인할 수 없으므로 대화형 접근법이 계속 연구되고 있다.

지금까지는 다목적 의사결정문제를 해결하기 위하여 Zimmermann[6]이 제시한 최대-최소(max min) 통합연산자를 사용하였다. 최소 통합연산자는 비절충적(noncompensatory)이기 때문에 변형된 문제의 해가 유일하지 않을 경우 원문제에 대한 유효해(efficient solution)를 보장할 수 없다.[7] 그러므로 유효해를 보장할 수 있는 통합연산자를 확인하는 것이 필요하다. 통합연산자로서 산술평균(arithmetic mean) 통합연산자, 기하평균(geometric mean) 통합연산자, 곱(product) 통합연산자 그리고 γ-통합연산자 등을 고려할 수 있다. 이 통합연산자 중에서 가장 좋은 만족해를 산출해내는 통합연산자가 모든 퍼지목표들의 좋은 균형을 이루어 낸다. 그러므로 다목적 의사결정문제를 해결하기 위하여 간단한 대화를 통하여 각 목적에 대한 의사결정자의 선호함수를 유도하고 절충이 포함된 통합연산자들을 사용하여 모든 해들을 지배(donimated)할 수 있는 통합연산자를 결정하는 알고리즘이 요구된다.

이에 본 연구에서는 의사결정자가 기준 목표값과 목표값사이의 편차범위 그리고 구성함수 형태에 관한 정보를 의사결정자와의 대화를 통하여 모호한 목표에 관한 정보를 취할 수 있도록 하고 통합연산자들을 이용하여 이를 해결함으로써 의사결정자의 전체만족도를 충분히 반영하고 모든 해들을 지배하는 절충 통합연산자를 결정하는 알고리즘을 제시한다.

2. 알고리즘 개발

다목적 비선형 계획문제(multiobjective nonlinear programming problem : MONLP)는 다음과 같은 최소화문제로 정식화 된다.

$$\min \quad f(x) \tag{1}$$

$$\text{s.t} \quad x \in X = \{ x \in R^n \mid g_j(n) \le 0,\ j = 1, 2, \cdots, m \}$$

여기서 $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x))$

x : n차원 의사결정변수 벡터

$g_j(x)$: m개의 제약식

X : 실행가능영역

다목적 비선형계획문제에서는 파레토 최적해를 구하여야 한다. 일반적으로 파레토 최적해들은 무한점으로 구성되기 때문에 의사결정자는 몇가지 기준으로 파레토 최적해들에서 그가 가장 선호하는 만족해를 선택한다. 각 목적함수 $f_i(x)$ $(i=1,2, \cdots,n)$에 대하여 의사결정자로부터 선호하는 구성함수값을 이끌어내기 위하여 각 목적함수에 대해서 최대목적함수값 f_i^{max}와 최소목적함수값 f_i^{min}을 계산한다.

$$f_i^{max} = \max_{x \in X} f_i(x) \qquad i=1, \cdots, n \tag{2}$$

$$f_i^{min} = \min_{x \in X} f_i(x) \qquad i=1, \cdots, n$$

계산된 값을 기초로 의사결정자는 퍼지목표를 결정하여 선형(linear) 구성함수, 지수(exponential) 구성함수, 쌍곡선(hyperbolic) 구성함수, 역쌍곡선(hyperbolic inverse) 구성함수, 부분선형(piecewise) 구성함수로 각 목적에 대한 자신의 만족수준을 평가한다.

각 목적에 대한 만족수준을 표현하는 구성함수가 선택되면 이들을 적절하게 통합할 수 있는 통합연산자가 결정되어야 한다. 지금까지는 다목적 의사결정문제로 해결하기 위한 통합연산자는 최대-최소형태에 기초를 둔 것이다. 이는 유효해를 보장할 수 없고 각 기준구성값 사이의 상충(trade-off)을 허용하지 않으므로 다소 제한적이다. 그러므로 다음과 같은 적절한 통합 연산자가 제시된다.

· 산술평균(average) 통합연산자

$$\frac{1}{n}[\sum_{i=1}^{n}\mu_{f_i}(x)],\ i=1,2,\cdots,n \tag{3}$$

· 기하평균(grothmetic mean) 통합연산자

$$[\prod_{i=1}^{n}\mu_{f_i}(x)]^{\frac{1}{n}} \tag{4}$$

· 곱(product) 통합연산자

$$\prod_{i=1}^{n}\mu_{f_i}(x) \tag{5}$$

· γ-통합연산자

$$[\prod_{i=1}^{n}\mu_{f_i}(x)]^{1-\gamma}[1-\prod_{i=1}^{n}(1-\mu_{f_i}(x))]^{\gamma},\qquad 0\le\gamma\le 1 \tag{6}$$

이 통합연산자를 이용하여 다음과 같이 문제를 해결한다.

$$\max_{x\in X}\ [\text{ 통합연산자 }] \tag{7}$$

이 식은 통합연산자를 이용하여 구성함수값을 최대화하는 것이다. 이 문제도 다음과 같은 정식화와 같다.

$$\begin{aligned} &\max\ \lambda \\ &\text{s.t} \\ &\quad \lambda_i \le \mu_{f_i}(x)\ ,\quad i=1,2,\cdots,n \\ &\quad \lambda_i \in [0,1] \end{aligned} \tag{8}$$

여기서 λ는 각 목적함수에 대하여 달성하는 만족의 척도

이상에서 언급된 설명을 기초로 퍼지 다목적비선형계획문제를 해결하는 적절한 통합연산자를 결정하는 알고리즘은 다음과 같다.

단계 1) 목적함수의 제약식을 정식화 한다.

단계 2) 각 목적함수의 최대 목적함수값 f_i^{max}와 최소목적값 f_i^{min}을 산출한다.

단계 3) 의사결정자는 단계 2)에서 산출된 정보를 기초로하여 각 목적함수에 대하여 자신이 만족하는 목적들의 편차범위와 구성함수형태를 결정한다.

단계 4) 각 목적함수의 구성함수를 정식화 한다.

단계 5) 최대-최소통합연산자, 산술평균 통합연산자, 기하평균 통합연산자, 곱 통합연산자, γ-연산자를 이용하여 해를 구한다.

단계 6) 단계 5)에서 산출된 해들을 비교하여 모든 것을 지배하는 통합연산자를 결정한다.

본 연구에서 제시된 알고리즘에서 볼수 있듯이 의사결정자와의 대화단계는 단계 2) 하나로서 대화과정이 단순하다는 것을 알 수 있다.

제시된 알고리즘의 과정을 설명하기 위하여 수치예를 사용한다.

$$\begin{aligned} &\min\ f_1(x) = 10x_1^2 + 20x_2^2 + 120x_3^2 \\ &\min\ f_2(x) = 0.22x_1^2 + 2.2x_2^2 + 0.8x_3^2 \\ &\min\ f_3(x) = x_1^2 + 1.5x_2^2 \end{aligned} \tag{9}$$

s.t

$$10 \le x_i \le 100, \quad i = 1, 2, 3$$

각 목적함수에 대한 최대목적함수값 f_i^{max}와 최소목적함수값 f_i^{min}은 다음과 같다.

$f_1^{min} = 15000.0$ $\quad$ $f_1^{max} = 149999.8$

$f_2^{min} = 322$ $\quad$ $f_2^{max} = 32199.9$

$f_3^{min} = 250.0$ $\quad$ $f_3^{max} = 24999.9$

이 값들을 기초로 의사결정자는 자신이 만족하는 구성함수형태와 편차범위를 [표 1]과 같이 선택한다고 가정한다.

[표 1] 각 목적함수의 구성함수

구성함수 / 목적함수	형 태	평 가 치
f_1	선 형	$(f_1^{min}, f_1^{max}) = (16000, 1400000)$
f_2	쌍곡선	$(f_2^{min}, f_2^{0.5}, f_2^{0.25}, f_2^{max}) =$ $(350, 20000, 25000, 30000)$
f_3	지 수	$(f_3^{min}, f_3^{0.5}, f_3^{max}) = (250, 10000, 24000)$

이 정보를 구성함수로 정식화하면 다음과 같다.

$$\mu_{f_1}(x) = \begin{cases} 1 & \text{만약 } f_1(x) \le 16000 \\ (1400000 - f_1(x)) / 1384000 & \text{만약 } 16000 \le f_1(x) \le 1400000 \\ 0 & \text{만약 } f_1(x) \ge 1400000 \end{cases} \tag{10}$$

$$\mu_{f_2}(x) = \begin{cases} 1 & \text{만약 } f_2(x) \le 350 \\ 0.5\tanh((f_2(x) - 20000) \times -0.00011)) + 0.5 & \text{만약 } 350 \le f_2(x) \le 30000 \\ 0 & \text{만약 } f_2(x) \ge 30000 \end{cases} \tag{11}$$

$$\mu_{f_3}(x) = \begin{cases} 1 & \text{만약 } f_3(x) \le 250 \\ -0.9274(1 - \exp\{0.7315((24000 - f_3(x)) / 23750)\}) & \text{만약 } 250 \le f_3(x) \le 24000 \\ 0 & \text{만약 } f_3(x) \ge 24000 \end{cases} \tag{12}$$

위 식(10), (11), (12)에 나타나는 구성함수로서 통합연산자를 이용한 절충해들은 [표 2]와 같다.

[표 2] 각 통합연산들에 의한 해들의 비교

max-min 통합연산자를 이용한 절충해 집합			
λ = 0.99868			
x_1 = 13.6814	x_2 = 10.0001	x_3 = 12.5787	
$f_1(x)$ = 22858.6903	$f_2(x)$ = 387.7631	$f_3(x)$ = 337.1837	
산술평균 통합연산자를 이용한 절충해 집합			
$\overline{\lambda}$ = 0.9933	λ_1 = 0.9978	λ_2 = 0.9869	λ_3 = 0.9952
x_1 = 13.3828	x_2 = 10.0185	x_3 = 11.2640	
$f_1(x)$ = 190023.7237	$f_2(x)$ = 361.7188	$f_3(x)$ = 329.6548	
기하평균 통합연산자를 이용한 절충해 집합			
$\overline{\lambda}$ = 0.9945	λ_1 = 0.9990	λ_2 = 0.9869	λ_3 = 0.9977
x_1 = 11.4173	x_2 = 10.2461	x_3 = 10.7730	
$f_1(x)$ = 17330.1022	$f_2(x)$ = 352.4857	$f_3(x)$ = 287.8286	
곱 통합연산자를 이용한 절충해 집합			
λ^* = 0.9854	λ_1 = 0.9998	λ_2 = 0.9869	λ_3 = 0.9986
x_1 = 10.4003	x_2 = 10.4394	x_3 = 10.4097	
$f_1(x)$ = 16264.7063	$f_2(x)$ = 350.2444	$f_3(x)$ = 271.6378	
γ-통합연산자를 이용한 절충해 집합			
γ = 0.2	λ_1 = 1.0000	λ_2 = 0.9869	λ_3 = 0.9990
x_1 = 10.0000	x_2 = 10.5035	x_3 = 10.3254	
$f_1(x)$ = 16000.1365	$f_2(x)$ = 350.0028	$f_3(x)$ = 265.4853	

[표 2]에서 보면 γ-통합연산자를 이용한 만족해들이 모든 다른 통합연산자를 이용한 결과치들을 모두 지배한다. 그러므로 주어진 퍼지 목표와 제약조건하에서는 γ-통합연산자를 통합연산자로 사용하여 의사결정자의 선호구조를 만족하여 주는 절충해를 구하는 편이 좋다. 현재 다목적의사결정문제는 최대-최소를 많이 사용하여 결정하고 있지만 위의 결과에서 보더라도 변형된 문제가 유효해가 아니므로 원문제를 보장할 수 없다. 그러므로 통합연산자들을 이용하여 적절한 통합연산자를 결정하여 문제에대한 의사결정자의 만족해를 구하여야 보다 효율적이고 절충적인 해를 구할 수 있다.

3. 결 론

본 연구에서는 의사결정자의 선호함수(구조)를 간단한 대화형으로 구성함수를 결정한 후 의사결정자의 만족해가 구성함수들값에 기초를 두고 선호구조를 고려하므로서 국부적인 정보를 얻고 의사결정자의 전체만족도를 충분히 반영하고 만족해를 찾고 유효해를 보장할 수 있는 적절한 통합연산자를 결정하는 알고리즘을 제시하였다. 이 알고리즘을 사용할 경우 각 목적함수의 상대적인 중요도와 의사결정자의 선호구조를 충분히 반영하고 각 목적함수에 대하여 달성하는 만족의 척도를 결정하므로 다목적비선형계획문제를 보다 효율적으로 수립할 수 있다. 향후 의사결정자의 선호구조를 보다 잘 반영해주고 만족해를 찾는 통합연산자를 정립하는 것이 기대된다.

참 고 문 헌

[1] Sakawa, M. " Interactive Computer Progarms for Fuzzy Linear Programming with Multiple Objectives", *International Journal of Man-Machine Studies*, Vol. 18, pp. 489-503, 1983.

[2] Sakawa, M. and Yano, H. ," Interactive Fuzzy Decision Making for Multiobjective Nonlinear Programming using Augmented Minimax Problems", *Fuzzy Sets and Systems* , Vol. 20, pp. 31-43, 1986.

[3] Sakawa, M. and Yano, H. , " An Interactive Fuzzy Satisficing Method for multiobjective Linear Fractional Programming Problems" , *Fuzzy Sets and Systems*,Vol. 28, pp. 129-144, 1984.

[4] Sakawa, M. and Yano, H. , " An Interactive Fuzzy Satisficing Method for Generalized Multiobjective Linear Programming Problems with Fuzzy Parameters", *Fuzzy Sets and Systems*, ,Vol. 35), pp. 125-142, 1990.

[5] Sakawa, M. and Yano, H.. ," Interactive Fuzzy Decision Making for Multiobjective Nonlinear Programming using Reference Membership Intervals", *International Journal of Man Machine Studies* , Vol. 23, pp. 407-421, 1985.

[6] Zimmermann, H. J. , " Fuzzy Programming and Linear Programming with Several Objective Functions" , *Fuzzy Sets and systems*, Vol. 1, pp. 45-55, 1978.

[7] Fung, L. W. and Fu, K. S., " An Axiomatic Approach to Rational Decision Making in the Fuzzy Environment", *Fuzzy Sets and their Applications to Cognitive and Decision process*, pp. 227- 256 , 1975.

[8] Kaufmann, A. and Zadeh, L. A., *Theory of Fuzzy Subsets* ,Academic Press, New York, 1975.

[9] Ambrose Goicoechea, Don R. Hans and Lucien Duckstein , *Multiobjective Decision Analysis with Engineering and Business Applications*, John Wiley and Sons , New York , pp. 40-91, 1982.

[10] Li., R. J., "Multiple Objective Decision Making in a Fuzzy Environment", Ph.D, The Kansas University, 1990.

[11] Zimmermann, H. J. , " Fuzzy Sets Theory and Mathematical Programming", *Fuzzy Sets Theory and Applications*, pp. 99-114 , 1986.

[12] Zimmermann, H. J. and Zysno, P. ," Latent Connective in Human Decision Making", *Fuzzy Sets and Systems* , Vol. 4, pp. 37-51, 1980.