韓國OA學會論文誌
第1卷 第1號, 1996. 8

論文 96-1-1-4-5

퍼지-Rough 집합에 관한 연구

정 구 범*, 김 명 순**

A Study on Fuzzy-Rough sets

Gu-Beom Jeong*, Myeong-Soon Kim**

요 약

Zadeh[1]에 의하여 소개된 퍼지집합은 소속함수를 이용하여 애매한 정보처리 및 추론을 가능토록 한 개념이다. Rough 집합의 개념은 Pawlak[1]에 의하여 소개되었으며, 식별 곤란한 데이터의 분류, 축소 및 근사추론을 가능토록 한다. Pawlak[1]은 퍼지집합과 Rough 집합을 서로 다른 개념으로 비교하여 서로 결합할 수 없는 것으로 정의하였다.

본 논문의 목적은 Pawlak[1]의 정의와는 달리 퍼지집합의 소속함수를 Rough 집합에 적용함으로써 퍼지집합과 Rough 집합을 결합한 퍼지-rough 집합의 개념을 정립하기 위한 것이다.

ABSTRACT

Fuzzy sets introduced by Zadeh[1] is a concept which can process, and reson a vague information using membership functions. The notion of rough sets introduced by Pawlak[3] is based on the ability to classify, reduce, and perform approximation reasoning for the indiscernible data.A comparison between fuzzy sets and rough sets has been given in Pawlak[1], where it is shown that these concepts are different and can't combine each other.

The purpose of this paper is to introduce and define the notion of fuzzy-rough sets which joins the membership function of fuzzy sets to the rough sets.

Ⅰ. 서 론

Rough 집합은 1982년 Pawlak에 의하여 제안되었으며, 집합론의 근사개념을 이용하여 데이터의 속성에 대한 관계를 정형화함으로써, 모호한 데이터의 분류, 축소 및 정보 결핍에 따른 근사적인 추론을 가능토록 한 개념이다. 따라서 Rough 집합은 명확한 사실에 대한 지

* 영동전문대학 전자계산학과 전임강사
** 동주여자전문대학 무역사무자동화과

식의 분류패턴과 각 데이터 속성간의 관계, 부정확성 및 모호성을 다루기 위한 근사개념의 집합론이라 정의할 수 있다[5].

퍼지집합 이론은 1965년 Zadeh에 의하여 소개된 이후 인공지능 분야에서 매우 중요한 위치를 차지하고 있다. 이 이론은 인간의 사고방법이나 주관적인 애매함을 0과 1 사이의 값을 갖는 소속함수로 표현함으로써 불확실한 정보의 처리 및 추론을 가능하게 하였다.

Pawlak[4]은 이러한 Rough 집합과 퍼지집합의 개념을 비교하고 Rough 집합의 근사개념에 Zadeh에 의하여 소개된 소속함수를 적용할 수 없다고 하였다. 그러나 본 논문에서는 Pawlak의 Rough 집합에 퍼지집합의 소속함수를 적용할 수 있음을 증명하여 퍼지집합과 Rough 집합의 특징을 결합한 퍼지-rough 집합의 기본개념을 정립토록 할 것이다.

Ⅱ. Rough 집합과 퍼지집합

2.1 Rough 집합

이 장에서는 Pawlak[4]의 Rough 집합의 개념을 설명한다.

$U \neq 0$를 전체집합(universe)라 하자. R이 U에서 동치관계의 집합족(family)이고 $R \supseteq P$ 0이면 $\cap P$를 IND(P)로 나타내며, P에서 식별이 어려운 관계를 의미한다. 관계 R의 동치 클래스(classes)를 A에서의 기본 집합(공집합 포함)이라 하면, A = (U, R)을 근사공간(approximation space)이라 한다.

$X \subseteq U$이면, A에 있는 X의 하한근사 $A_L(X)$와 상한근사 $A_U(X)$를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$A_L(X) = \{x \in U : [x]_R \subseteq X\}$$

$$A_U(X) = \{x \in U : [x]_R \cap X \neq 0\}$$

여기서 $[x]_R$은 원소 x를 포함하는 관계 R의 동치 클래스를 나타낸다.

$BN_A(X) = A_U(X) - A_L(X)$이며, A에서 X의 경계를 나타낸다.

따라서 두 개의 소속함수인 $\in_A$와 $\in_A$를 정의할 수 있으며, 이를 각각 강한 멤버 및 약한 멤버라 한다.

$$x \in_A X \quad \text{iff} \quad x \in A_L(X)$$
$$x \in_A X \quad \text{iff} \quad x \in A_U(X)$$

만일 $x \in_A X$이면 x는 A에 있는 X에 확실히 속해 있으며, $x \in_A X$이면 x는 A에 있는 X에 가능한 한 속해 있게 된다.

근사개념의 정의로부터 $A_L(X)$와 $A_U(X)$의 속성을 다음과 같이 구할 수 있다.

(1) $A_L(X) \subseteq X \subseteq A_U(X)$

(2) $A_L(0) = A_U(0) = 0$

(3) $A_L(X) = A_U(X) = X$

(4) $A_U(X \cup Y) = A_U(X) \cup A_U(Y)$

(5) $A_L(X \cap Y) = A_L(X) \cap A_L(Y)$

(6) $A_L(X \cup Y) \supseteq A_L(X) \cup A_L(Y)$

(7) $A_U(X \cap Y) \subseteq A_U(X) \cap A_U(Y)$

(8) $X \subseteq Y \Rightarrow A_L(X) \subseteq A_L(Y)$

(9) $X \subseteq Y \Rightarrow A_U(X) \subseteq A_U(Y)$

(10) $A_U(-X) = -A_L(X)$

(11) $A_L(-X) = -A_U(X)$

[증명] Rough 집합의 속성에 대한 증명은 다음과 같다.

(1) $x \in A_L(X)$

$\Rightarrow x \in [x] \subseteq X$

$\Rightarrow x \in X,\ A_L(X) \subseteq X$

$x \in X$

$\Rightarrow [x] \cap X \neq 0$ ($x \in [x] \cap X$이므로)

따라서 $x \in A_U(X),\ X \subseteq A_U(X)$ (2.1)

(2) (2.1)로부터

$(A_L 0 \subseteq 0) \wedge (0 \subseteq A_L 0) \Rightarrow A_L 0 = 0$

$A_U 0 \neq 0 \Rightarrow x \in A_U 0 \Rightarrow [x] \cap 0 \neq 0$,

또는 $[x] \cap 0 = 0$ (전제조건과 모순)

따라서 $A_U 0 = 0$ (2.2)

(3) (2.1)로부터 $A_L(X) \subseteq X$이므로

$X \subseteq A_L(X) \Rightarrow x \in X \Rightarrow [x] \subseteq X$

$\Rightarrow x \in A_L(X) \Rightarrow A_L(X) = X$

(2.1)로부터 $X \subseteq A_U(X) \wedge A_U(X) \subseteq X$

$\Rightarrow A_U(X) = X$ (2.3)

(4) $x \in A_U(X \cup Y)$

$\Leftrightarrow [x] \cap (X \cup Y) \neq 0$

$\Leftrightarrow ([x] \cap X \cup [x] \cap Y) \neq 0$

$\Leftrightarrow ([x] \cap (X) \neq 0) \vee ([x] \cap (Y) \neq 0)$

$\Leftrightarrow x \in A_U(X) \vee x \in A_U(Y)$

$\Leftrightarrow x \in (A_U(X) \cup A_U(Y))$

$\Leftrightarrow A_U(X) \cup A_U(Y)$ (2.4)

(5) $x \in A_L(X \cap Y)$

$\Leftrightarrow [x] \subseteq (X) \cap (Y)$

$\Leftrightarrow [x] \subseteq X \wedge [x] \subseteq Y$

$\Leftrightarrow x \in (A_L(X) \cap A_L(Y))$

$\Leftrightarrow A_L(X) \cap A_L(Y)$ (2.5)

(6) $X \subseteq X \cup Y$이며, $Y \subseteq X \cup Y$이므로

$A_L(X) \subseteq A_L(X \cup Y)$이고

$A_L(Y) \subseteq A_L(X \cup Y)$이 된다. 따라서

$A_L(X) \cup A_L(Y) \subseteq A_L(X \cup Y)$ (2.6)

(7) $X \cap Y \subseteq X$이며, $X \cap Y \subseteq Y$이므로

$A_U(X \cap Y) \subseteq A_U(X)$이고

$A_U(X \cap Y) \subseteq A_U(Y)$이 된다. 따라서

$A_U(X \cap Y) \subseteq A_U(X) \cap A_U(Y)$ (2.7)

(8) $X \subseteq Y \Leftrightarrow X \cap Y = X$, 이로부터

$A_L(X \cap Y) = A_L(X)$이므로

$A_L(X) \cap A_L(Y) = A_L(X)$가 된다.

따라서 $A_L(X) \subseteq A_L(Y)$ (2.8)

(9) $X \subseteq Y \Leftrightarrow X \cup Y = Y$, 이로부터

$A_U(X \cup Y) = A_U(Y)$이므로

$A_U(X) \cup A_U(Y) = A_U(Y)$가 된다.

따라서 $A_U(X) \subseteq A_U(Y)$ (2.9)

(10) $x \in A_L(X) \Leftrightarrow [x] \subseteq (X)$

$\Leftrightarrow [x] \cap (-X) = 0$

$\Leftrightarrow x \notin A_U(-X) \Leftrightarrow x \in -A_U(-X)$

따라서 $A_L(X) = -A_U(-X)$이므로

$-A_L(X) = A_U(-X)$ (2.10)

(11) $x \in A_U(X) \Leftrightarrow [x] \subseteq (X)$

$\Leftrightarrow [x] \cap (-X) = 0$

$\Leftrightarrow x \notin A_L(-X) \Leftrightarrow x \in -A_L(X)$

따라서 $A_U(X) = -A_L(-X)$이므로

$-A_U(X) = A_L(-X)$ (2.11)

2.2 퍼지집합

Zadeh[3]에 의하여 소개된 퍼지집합을 정의하면 다음과 같다.

U를 전체집합이라 하자. U에서 퍼지집합 X의 소속함수 $\mu_X : X \rightarrow [0, 1]$이 된다. 모든 원소 $x \in U$인 소속함수 $\mu_X(X)$는 구간 [0, 1]에서 실수 값을 갖게 되며, 이 값은 x의 소속정도를 나타낸다.

퍼지집합 X와 Y의 합집합과 교집합은 모든 $x \in U$에 대하여 다음과 같이 정의된다.

$$\mu_{X \cup Y}(X) = \mathrm{Max}(\mu_X(X), \mu_Y(X))$$

$$\mu_{X \cap Y}(X) = \mathrm{Min}(\mu_X(X), \mu_Y(X))$$

$$\mu_{-X}(X) = 1 - \mu_X(X)$$

Ⅲ. 퍼지-Rough 집합

$X \subseteq U \neq 0$이고 L은 속(lattic)으로 하자. X가 Rough 집합이면, $X = (X_L, X_U)$이며, $X_L \in X_U$가 된다. X에서 퍼지집합의 소속정도를 원소로 갖는 Rough 집합 $A = (A_L, A_U)$는 다음 특성을 갖는 소속함수의 순서쌍인 $\mu_{AL} : X_L \rightarrow L$ 및 $\mu_{AU} : X_U \rightarrow L$에 의하여 특성화된다.

(1) $\mu_{AL}(x) \leq \mu_{AU}(x)$, 모든 $x \in X_U$
X에서 퍼지집합의 소속정도를 원소로 갖는 Rough 집합 $A = (A_L, A_U)$와 $B = (B_L, B_U)$는 모든 $x \in X_L$, X_U에 대하여 다음과 같이 정의된다.

(2) $A = B \Leftrightarrow \mu_{AL}(x) = \mu_{BL}(x)$
$\Leftrightarrow \mu_{AU}(x) = \mu_{BU}(x)$

(3) $A \subseteq B \Leftrightarrow \mu_{AL}(x) \leq \mu_{BL}(x)$
$\Leftrightarrow \mu_{AU}(x) \leq \mu_{BU}(x)$

(4) $C = A \cup B$
$\Leftrightarrow \mu_{CU}(x) = \mathrm{Max}[\mu_{AU}(x), \mu_{BU}(x)]$
$\Leftrightarrow \mu_{AL}(x) = \mathrm{Max}[\mu_{AL}(x), \mu_{BL}(x)]$

(5) $D = A \cap B$
$\Leftrightarrow \mu_{DL}(x) = \mathrm{Min}[\mu_{AL}(x), \mu_{BL}(x)]$
$\Leftrightarrow \mu_{DU}(x) = \mathrm{Min}[\mu_{AU}(x), \mu_{BU}(x)]$

A의 여집합 A′는 소속함수의 순서쌍(A_L', A_U')과 무관하게 다음과 같이 정의된다.

(6) $\mu_A'(x) = 1 - \mu_A(x)$

[증명]

(1) (2.1)로부터 $x \in X$, $A_L(X) \subseteq X$이며, $X \subseteq A_U(X)$이므로 $\mu_{AL}(x) \leq X \leq \mu_{AU}(x)$이 된다. 따라서

$$\mu_{AL}(x) \leq \mu_{AU}(x) \tag{3.1}$$

(2) $A = B$
$\Leftrightarrow (A_L(X), A_U(X)) = (B_L(X), B_U(X))$ 이다.
$(A_L(X) = A_U(X)) = ((B_L(X) = B_U(X))$인 경우 (2.3)에 따라 $(\mu_{AL}(x) = \mu_{BL}(x)) = (\mu_{AU}(x) = \mu_{BU}(x)) = X$이므로 $\mu_{AL}(x) = \mu_{BL}(x) = \mu_{AU}(x) = \mu_{BU}(x)$이다.
또한, $(A_L(X) \leq A_U(X)) = ((B_L(X) \leq B_U(X))$는 (3.1)에 따라 $(A_L(X) \leq X \leq A_U(X)) = ((B_L(X) \leq X \leq B_U(X))$이므로 $(A_L(X) = B_L(X)) \leq X \leq (A_U(X) = B_U(X))$이 된다. 따라서

$$\mu_{AL}(x) = \mu_{BL}(x),\ \mu_{AU}(x) = \mu_{BU}(x) \tag{3.2}$$

(3) (2.8)로부터
$x \in X$, $A_L(X) \subseteq X$이며, $X \subseteq B_L(X)$이므로 $\mu_{AL}(x) \leq X \leq \mu_{BL}(x)$이 된다.
(2.9)로부터
$x \in X$, $A_U(X) \subseteq X$이며, $X \subseteq B_U(X)$이므로 $\mu_{AU}(x) \leq X \leq \mu_{BU}(x)$가 된다.
따라서

$$\mu_{AL}(x) \leq \mu_{BL}(x),\quad \mu_{AU}(x) \leq \mu_{BU}(x) \tag{3.3}$$

(4) $C_U = A_U \cup B_U$인 경우 (2.4)에 따라
$\mu_{CU}(x) = \mu_{AU \cup BU}(x) = \mu_{AU}(x) \cup \mu_{BU}(x)$가 성립된다.
$C_L = A_L \cup B_L$인 경우에는 (2.6)에 따라
$\mu_{CL}(x) \Leftrightarrow \mu_{AL \cup BL}(x) = \mu_{AL}(x) \cup \mu_{BL}(x)$
$\Leftrightarrow \mu_{AL \cup BL}(x) > \mu_{AL}(x) \cup \mu_{BL}(x)$
의 모순된 경우가 발생된다. 그러나 소속함수의 합집합은 퍼지집합의 정의에 따라 소속함수중 최대값을 선택하므로 다음 조건이 성립된다.

$$\mu_{CU}(x) = \mathrm{Max}[\mu_{AU}(x), \mu_{BU}(x)]$$
$$\mu_{CL}(x) = \mathrm{Max}[\mu_{AL}(x), \mu_{BL}(x)] \tag{3.4}$$

(5) $C_L = A_L \cap B_L$인 경우 (2.5)에 따라

$\mu_{CL}(x) = \mu_{AL \cap BL}(x) = \mu_{AL}(x) \cap \mu_{BL}(x)$

이 성립된다.

$C_U = A_U \cap B_U$인 경우에는 (2.7)에 따라

$\mu_{CU}(x) \Leftrightarrow \mu_{AU \cap BU}(x) = \mu_{AU}(x) \cap \mu_{BU}(x)$

$\Leftrightarrow \mu_{AU \cap BU}(x) < \mu_{AU}(x) \cap \mu_{BU}(x)$

의 모순된 경우가 발생된다. 그러나 소속함수의 교집합은 퍼지집합의 정의에 따라 소속함수중 최소값을 선택하므로 다음 조건이 성립된다.

$$\mu_{CL}(x) = \mathrm{Min}[\mu_{AL}(x), \mu_{BL}(x)]$$
$$\mu_{CU}(x) = \mathrm{Min}[\mu_{AU}(x), \mu_{BU}(x)] \qquad (3.5)$$

(6) $\mu_{-x}(x) = 1 \Leftrightarrow x \in A_L(-X)$

$\Leftrightarrow x \in -A_U(X)$

$\Leftrightarrow \mu_x(x) = 0$

$\Leftrightarrow 1 - \mu_x(x) = 1$

$\mu_{-x}(x) = 0 \Leftrightarrow x \in -A_U(-X)$

$\Leftrightarrow x \in A_L(X)$

$\Leftrightarrow \mu_x(x) = 1$

$\Leftrightarrow 1 - \mu_x(x) = 0$

따라서 다음 식이 성립된다.

$$\mu_A'(x) = 1 - \mu_A(x) \qquad (3.6)$$

Ⅳ. 결 론

Rough 집합은 불완전한 지식의 표현, 데이터 간의 관계성 규명 및 근사추론시 매우 효과적이며, 전문가 시스템 구현시 의사결정 테이블의 최적화, 규칙 생성, 추론 등을 효과적으로 처리할 수 있다. 이상의 증명과 같이 퍼지집합의 소속함수를 Rough 집합으로 적용 가능함을 보임에 따라 퍼지 데이터를 동치관계의 Rough 집합 데이터로 표현함으로써 퍼지집합을 Rough 집합의 속성에 적용할 수 있게 되었다.

참 고 문 헌

[1] L.A. Zadeh, Fuzzy sets, Inform. and Control 8 (1956) 338-353.

[2] T.B. Iwinski, Algebraic approach to rough sets, Bull, Polish Acad. Sci. Math. 35 (1987) 673-683

[3] Z. Pawlak, Rough sets, Internal. J. Inform. Comput. Sci. 11(5) (1982) 341-356.

[4] Z. Pawlak, Rough sets and Fuzzy sets, Fuzzy Sets and Systems 17 (1985) 99-102.

[5] Z. Pawlak, Rough sets, Theoretical Aspects of Reasoning about Data. (1991).

□ 著者紹介

정 구 범

1983. 2 인하대학교 전자계산학과 졸업
1989. 8 부산대학교 산업대학원 전자계산학과 졸업
1994. 3 ~ 현재 대구효성가톨릭대학교 대학원 전자계산학전공 박사 과정중
1994. 3 ~ 현재 영동전문대학 전자계산학과 전임강사

※ 관심분야 : 인공지능, 전문가시스템, 데이터베이스등

김 명 순

1985년 방송통신대학 경영학과 졸업(경영학사)
1988년 경성대학교 대학원 산업정보학과(공학석사)
1995년 대구 효성 카톨릭 대학교 대학원 전자계산학과 박사과정 수료
1996년 현재 동주여자전문대학 무역사무자동화과 전임강사

※ 관심 분야 : 인공지능, 지능형 교수 시스템, 뉴로 컴퓨팅