韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
1996. 12. 제 35권, 제 2호, 169-186.
J. Kor. Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
Dec. 1996, Vol. 35, No. 2, 169-186.

한국과 러시아의 수학영재 교육과정 연구

서 보 억 (한국교원대학교)
신 현 용 (한국교원대학교)

I. 서론

A. 연구의 필요성 및 목적

교육이 하나의 과정 즉, 지식체계와 실천체계를 갖추고 있는 활동이듯이 수학교육도 이러한 체계들을 가지고 있다. 일반적으로 지식체계는 논리적이고 과학적인 내용을 포함하는 것으로 학생들이 실제로 학습해야 하는 수학교육의 대상, 학습내용을 의미한다.(정태범 외, 1989) 이러한 지식체계의 핵심은 교육과정상에 나타나 있는 수학적인 개념(concepts)과 사실(facts), 원리(principles), 기능(skills) 이다. 구체적으로 Robert M. Gagné 는 이러한 수학적 대상을 직접적인 대상인 사실, 원리, 기능, 개념과 간접적인 대상인 학습의 전이, 탐구능력, 문제해결 능력, 자기단련(self-discipline), 수학적 구조에의 음미(appreciation)로 세분화하였다. Gagné가 보고 있는 간접적 대상은 학습을 위한 구체적 내용은 가지고 있지는 않지만 직접적 대상을 학습하였을 경우, 자연적으로 학습되어져 있기를 바라는 것이다. 분명히 학습의 대상은 사실, 개념, 원리, 기능 등이지만 이를 통해 학생은 다른 학습에 전이가 일어나고, 과학적인 문제에 대한 탐구능력이 성숙하여야 하며, 실제 상황에서 적극적으로 대응할 수 있는 문제해결 능력이 성숙되고, 수학적 구조에 대해 아름다움을 느낄 수 있어야 한다. 역으로, 수학교육과정이 학생들의 탐구능력, 학습의 전이, 문제해결능력, 수학적 구조를 음미할 수 있게끔 구성되어야 한다. 이러한, 수학교육과정에 대한 입장은 수학적 특수아를 대상으로 하고 있는 수학영재교육에서는 더욱 절실하다.

과학고등학교의 설립목적과 수학교과의 교과목표에서 볼 수 있듯이 수학 및 과학영재아를 위한 특수목적 고등학교라는 외형적인 모습과는 달리 수학교육과정의 운영면에서 많은 문제점을 내포하고 있다. 석용징(1992)은 '과학고등학교는 평균화집단에서 분리되어 운영되고 있지만 교재개발의 문제와 대학입시의 문제 때문에 본래의 의미를 주지 못하고 있다.' 라고 지적하고 있다. 수학교재가 평준화 집단에서 사용되고 있는 교재를 그대로 사용하고 있고, 이에 대한 약점을 보완하기 위해 수학Ⅲ라는 교과서를 새롭게 개발(한국교원대학교 수학교육연구소, 1992)하였지만 이에 대한 문제점이 계속 재고되고 있는 상황이다(석용징 외, 1992).

이에 비해, 러시아는 1934년 레닌그라드 대학교에 있었던 최초의 수학경시대회를 시작으로 각 지역에서 우수한 학생들을 수학경시대회를 통해 선발, 대학 입학의 특전을 주기 시작한 것이 바탕이 되어 수학영재교육에 대한 깊은 관심을 보였다. 이러한 관심은 1957년 최초의 인공위성발사, 1961년 최초의 유인 우주선의 발사라는 신화를 창조해 내었다. 1958년 흐루시초프의 수학영재교육에 대한 국가적차원의 지원을 강조한 것이 계기가 되어 1961년 노보시비르스크 대학교에서 여름학교가 개교되었고, 2년 뒤 1963년 12월에는 국립모스크바대학교 부설 Kolmogorov학교가 개교하게 된다. 이 학교는 지난 30여년간 자체적인 교육과정의 개발과 교재의 구성 및 발간의 노력으로 세계 최고의 수학영재학교로 인정받게 되었다. 이 학교 내에는

한국의 과학고등학교와는 달리 수학·물리학교, 화학학교, 경제·수학학교 세 개의 학교로 세분되어져 독창적이고 고유의 교육과정에 의해 깊이 있는 수학영재교육이 이루어지고 있다.

아직까지 한국은 수학영재교육과정을 위한 기초적인 방안이 제시되어 있지 않고, 현실적인 문제로 시도조차 못하고 있다. 이러한 수학영재교육과정의 기초를 마련하기 위해 러시아의 수학·물리학교의 수학영재교육과정을 소개하고 분석·비교하여 그들이 지난 수십년간 이룩하여 놓은 결실을 살펴보는 것은 의미있는 일이다. 그리고, 지금까지 러시아의 일반교육과정에 대한 비교·연구를 통해서 우리에게 주는 시사점을 이미 살펴보았다(이용곤 외, 1995 ; 한인기 외, 1995 ; 최정화 외, 1995 ; 이숙경 외, 1995 ; 서보억 외, 1995). 이제 일반교육과정에 이어서 우리의 수학영재교육과정 수립을 위해 러시아의 수학영재교육을 비교·분석하여 보는 것은 필요하리라 본다.

이 연구를 수행하는 목적은 첫째, 현재 우리나라 과학고등학교의 수학교육과정상의 현실태를 직시하고, 수학영재교육을 일찍 정착시킨 러시아의 수학영재교육과정의 교과운영, 교육편제, 운영형태, 학습편제 등을 올바르게 알아보는데 있다. 둘째, 러시아의 수학영재교육과정의 고찰을 통해서 한국의 과학고등학교의 수학교육과정과 수학영재교육과정의 재구성을 위한 기초자료로 제시하는 데 이 연구의 목적을 찾을 수 있다.

B. 연구문제

1. 한국의 과학고등학교에서의 수학교육과정이 러시아의 수학·물리학교에서의 수학영재교육과정과의 차이점과 유사점은 무엇인가 ?
2. 러시아의 수학·물리학교에서의 수학영재교육과정을 통해서 볼 때 우리의 과학고등학교의 수학교육과정 및 수학영재교육과정에 주는 시사점은 무엇인가 ?

C. 연구의 제한점

1. 본 연구는 한국의 과학고등학교의 수학교육과정을 수학영재아를 위한 수학영재교육과정으로 규정하여 연구를 수행하였다. .
2. 러시아는 Kolmogorov 학교를 주 연구대상으로 잡았다. 러시아의 경우는 세 곳의 영재학교가 있는데 그 중에 한 곳을 선택하였다. 러시아는 각 학교마다 독특한 교육과정이 있으므로 수학영재교육과정상에서 차이가 있다는 것에 주의를 요한다.

D. 기대되는 효과

본 연구를 통해서 다음과 같은 기대효과를 생각할 수 있다.

1. 한국의 과학고등학교의 설립취지에 부합한 수학교육과정에 대한 방향을 제시하여 줄 수 있다.
2. 수학 및 과학에 우수한 학생들에게 적절한 교육을 실시함으로서 적성과 능력을 최대한 계발하여 국가발전과 수학·과학영재아에게 과학기술발전에 이바지하는 우수한 과학자가 될 소양을 갖추게 할 수 있다.

II. 이론적 배경

A. 수학영재의 정의

수학영재교육에서 뿐아니라 일반영재교육에서도 가장 중요하며 기본이 되는 것이 영재에 대한 정의에 관련된 것이다. 어떻게 영재에 대한 정의를 내리느냐에 따라 영재의 선발, 교육과정, 교육방법, 교육평가가 다르게 구성되어질 수 있기 때문이다.

1950년 이전에 내려진 과학 및 수학영재에 대한 정의를 보면 Terman은 영재성(Giftedness)을 지적인 측면에서만 관심을 가지고 영재의 정의를 S. B. I. S(Stanford-Binet

Intelligence Scale) 에 의한 상위 1%안에 속하는 학생을 영재로 정의를 내렸다(NCTM, 1987). 아직까지 영재의 정의를 이러한 개념으로 인식하는 경향이 있을 만큼 영재교육에 미친 영향은 크다. 1950년대말을 지나고 1960년초가 되면서 영재의 정의를 지적인 측면외에도 다른 측면에 관심을 두기 시작하고 지능을 보는 관점이 다양화되었다. 특히, Guilford(1967)는 지적 모델의 구조를 제시하여 다양한 면에서 지능을 고찰했고, Getzels, Jackson 등은 영재의 중요한 특성으로 창의성을 강조하게 된다(NCTM, 1987).

이러한 수학영재에 대한 정의는 Renzulli에 의해서 강한 비판을 받는다. Renzulli(1978)의 비판의 중요핵심은 지적이고 인지적인 영역만을 강조한 나머지 정의적인 능력에 대한 관심이 결여되어졌다는 것이다. 따라서, 정의적인 영역을 포함한 수학영재에 대한 정의를 강조한다. 그는 수학영재아 정의에 대한 모형에서 평균이상의 일반 지적인 능력, 높은 창의력, 고도의 과제집착력이라는 세가지의 영역을 제시하고 있다. 그리고, 이 세가지 영역을 공통적으로 만족시키는 학생을 영재라고 규정한다. 다시말하면, 영재성을 인간특성의 세가지 기본 요소들 사이의 상호작용으로 파악하고 있다.

수학영재에 대한 다른 관점으로 인구 비율적인 관점에서 영재를 정의하고 있다. 이것은 통계적인 접근으로 영재성을 인구의 다른 사람과의 비교로 보고 있다. 즉, 능력은 정규분포를 이루고 있는 집단으로 가정을 하고, 검사를 통해서 평가되어진 결과를 가지고 정규분포의 상위 3% 에 속하는 학생을 영재로 규정하는 것이다. 그의 이 정의는 영재교육행정지원 및 교육재원 등의 예산을 세우거나 학생선발 등에 아주 빈번이 언급된다.

Brandwein은 수학 · 과학영재아를 다음 세가지의 필수요소를 가지고 있는 학생으로 정의를 내렸다.(Thomas, 1975) 첫 번째 요소는 유전적인 요소로 '높은 지능을 가지고 있는 학생들은 서로 관련성을 가지고 있고, 그들은 대부분 유전을 받은 타고난다.' 라고 규정하고 있다. 두번째 요소는은 성향적인 요소라고 부른다. 이 요소에는 인내력, 어떤 과제를 수행하기 위해서 보통사람들보다 뛰어나게 시간을 보내는 의지력, 불안한 감정을 이겨내는 의지력, 실패를 극복하는 의지력 등을 포함한다. 세번째 요소는 활동적인 요소이다. 이 요소는 다른 요소에 비해서 외적인 요소에 크게 관심을 가지는 것으로 심화훈련을 위한 기회와 능력있는 교사와의 만남 등을 포함하는 외부적인 영향을 의미한다. 활동적인 요소는 다른 두 요소를 실제생활로 불러들이게 하는 역할을 하는 것으로 전적으로 외부 교육에 의해서 좌우되는 요소이다.

지금까지 몇사람의 영재 및 영재성의 정의를 알아보았다. 아직까지 수학영재에 대한 분명하고 명확한 정의는 없다. 지난 100년동안 여러 학자에 의해서 발전되고 수정되고 변화되어져 왔다. 이러한 수정과 변화는 지적인 능력, 창의성, 정의적인 영역, 활동적인 영역을 포함하는 방향으로 발전되었고, 이에 바탕을 두고 이 요소들의 상호작용으로 수학영재아를 정의내리고 있다. 이러한 발전과정에서 생긴 다양한 영재에 대한 정의는 그 필요에 따라 그 중요성이 다양하게 강조되어지고 있고 보수적인 정의와 함께 자유적인 정의도 폭넓게 사용되어지고 있다.

B. 수학영재교육의 역사적 배경과 발전

1. 한국의 수학영재교육

1945년 해방과 함께 우리나라의 현대적의미의 교육이 본격적으로 실시된다. 그 당시 국내외 사정은 제도권내의 교육을 정착시키기에도 역부족이었고 경제적인 상황은 특수아교육을 하기에는 너무 사치스러운 감이 많았다. 하지만 1970년대가 되면서 경제부흥이 일어나기 시작했고, 국내 정치가 안정되면서 교육에 대한 관심이 촉진되어져 갔다. 1973년 고등학교의 평균

화 시책이 전국적으로 실시되고 모든 학생이 동등한 위치에서 같은 교육을 받게 된다. 하지만 이러한 평준화 정책은 1980년대에 들어오면서 평준화에 따른 고교교육의 수월성 저하와 질적 하향평준화에 대한 우려의 목소리가 높아갔고 평준화 폐지 및 우수아의 특수교육을 강조하게 되었다.(홍창기, 1988) 이러한 우려의 목소리가 영재교육에 대한 높은 관심으로 나타났다. 1980년대의 수학 및 과학영재교육에 대한 이러한 관심은 1960~70년대 비평준화 정책시절의 무관심에 비교해 짧은 시간내에 일어난 변화는 우리나라 수학영재교육의 발전적인 측면에서 볼 때 높이 평가할만한 사실이다. 이러한 높은 관심은 1978년 한국교육개발원(KEDI)에서 과학고등학교 설립을 제안하였고, 1983년에 경기과학고등학교가 개교하게 된다. 경기과학고등학교의 설립으로 우리나라 최초의 수학 및 과학영재교육이 제도권교육내에서 실시되게 되고 우리나라 영재교육발전에 큰 기여를 하게 된다. 한국의 과학고등학교는 러시아의 수학·물리학교인 Kolmogorov 학교에 해당된다고 평가할 정도로 우수한 학생들로 구성되어 심도있는 교육이 실시되고 있다.(최영한, 1994)

하지만, 과학고등학교 이면에는 부정적인 측면이 적지 않다. 먼저, 우리나라의 수학 및 과학영재교육의 필요성이 영재교육의 본래의 목적인 개인의 자아실현과 국가과학기술의 발달에 맞추어진 것이 아니라, 1973년 고등학교 평준화에 따른 실력의 하향평준화에 대한 우려와 걱정 때문에 비롯되었다는 사실이다. 실제 이 학교의 운영이 대학입학을 위한 수재를 위한 학교로 변질 운영되고 있는 것이 우리의 현실이다.

2. 러시아의 수학영재교육

볼셰비키혁명이후 지금까지의 수학영재교육의 발달에 영향을 미친 부분을 중심으로 몇 개의 시대로 나누어 살펴보면 다음과 같다.

제 1기는 수학영재교육의 태동기(1934 ~ 1960)로 스탈린시대와 흐루시초프의 초기집권기에 해당하는 시기로 1934년에 레닌그라드 대학교 주최로 수학경시대회가 개최되어 우수한 학생들을 이 대학교에 입학시키는 제도로 활용하였고, 수학동아리의 발생 및 최초로 수학올림피아드에 참가하게 되는 시기이다. 1957년에 세계 최초로 인공위성을 발사하여 전세계적으로 수학 및 과학의 위상을 높이는데 성공하였다. 이러한 분위기에서 1957년과 1958년에 국립모스크바대학교 주관으로 수학경시대회를 개최하는데 성공하여 국가적인 차원에서의 수학영재교육의 기반이 다져지게 되었다.

제 2기는 수학영재교육의 발전기(1961 ~ 1967)로 수학영재교육에서는 흐루시초프의 강력한 지원이 이루어지는 시기이다. 흐루시초프와 여러 학자들의 위기감에 의해 제시된 수학영재교육에의 강조로 인하여 1961년부터는 소련과학원 시베리아 지부가 소련 올림피아드에서 우수한 학생들을 모아서 여름학교를 1개월간 개최하여 우수아에 대한 집중적인 훈련을 실시하였다. 이것이 계기가 되어 1963년에 국립모스크바대학교, 레닌그라드대학교, 노보시비르스크대학교 부설로 수학·물리학교가 개교되어 본격적인 수학영재교육을 시작하게 된다.(МГУ, 1994) 이 시기의 수학영재교육에서의 가장 큰 성과는 수학의 대중화에 성공하였다는 것이다. 1967년에 기존의 소련올림피아드를 전 소연방으로 확대하여 실시하였고, 통신강좌를 만들어 누구에게나 수학을 접할 수 있는 기회를 제공하여 주었다.

제 3기는 수학영재교육의 황금기(1968 ~ 1983) 로 브레즈네프가 집권하던 시기이다. 이 시기는 1960년대말의 수학의 대중적인 인기가 절정에 다다른다. 공산당차원에서 영재교육을 부인하던 기존의 사고를 철저히 배격하고 당차원에서 영재교육을 공식적으로 인정함으로서 영재교육의 황금기를 이룬다. 전국적으로 심화교육활동이 널리 퍼졌고, 이 심화학습을 위한

수학 및 과학을 위한 Курс(꾸루스)가 4500개 이상이 생겨났다. 이러한 과외 꾸루스는 러시아 수학영재교육 발전에 큰 기여를 하게 된다. 수학영재학교와 수학클럽이 대중적인 인기를 얻자 1969년 국립모스크바대학교의 Kolmogorov와 Kikoin 교수는 「Квант(끄반뜨)」라는 수학 전용 잡지를 만들었다. 이 잡지는 창간 3년만인 1972년에 37만부의 정기구독자를 만들었을 정도로 수학의 대중적인 인기를 대변하여 준다.

제 4기는 수학영재교육의 격동기(1984 ~ 1991)이다. 러시아의 개방과 개혁속에서 교육 역시 큰 혼란을 거듭한다. 혼란스러운 교육상황 속에서 러시아 수학영재교육의 산실인 국립모스크바대학교 부설 수학·물리학교의 신입생들의 실력이 점차로 낮아지고 있고, 대학입학에서 수학 및 과학계통의 학과의 인기가 상당히 낮아졌다는 현실속에서 격동기에 처해 있는 수학영재교육의 단면을 볼 수 있다.

C. 수학영재교육제도 비교

한국과 러시아의 수학영재교육제도 상에서의 차이는 다음 <표 1>에서 처럼 수학교육의 목표면에서 한국은 사고력 및 창의력을 길러 문제해결을 신장시키는데 그 중요목적을 두고 있고, 러시아는 미래교육에의 대비와 타교과의 도구로서의 수학을 강조하고 있다.

수학영재교육기관을 운영하는 기관은 한국의 경우 국가에서 교육과정을 마련하고 그 운영은 각 시도 교육청에서 운영하고 있는 반면, 러시아의 경우는 기본적인 교육과정의 운영이 해당 학교나 대학교에서 운영하고 있음을 알 수 있다. 각 기관에서의 수업연한은 한국의 경우는 3년을 원칙으로 하고 2년간으로 단축할 수 있다. 러시아는 2년제로 운영되고 있다. 전체수업의 수업시수면에서는 러시아가 주당 43시간으로 가장 많고, 수학수업의 경우도 러시아는 한국에 비해서 많은 시간을 수학수업에 할당하고 있었다.

III. 연구방법 및 절차

A. 연구의 대상

1. 한국의 수학영재교육과정

<표 1> 수학영재교육제도의 비교

비교지표	한 국	러 시 아
수학교육의 목표	수학의 기본적인 지식을 가지게 하고, 수학적으로 사고하는 능력을 기르게하여, 이를 활용하여 창의적으로 문제를 해결할 수 있게 한다.	학습자의 인성개발에 근간이 되는 수학적 지식, 능력 그리고 기능의 기초를 형성하게 하고, 인성에서 중핵적이고 근간이 되는 특성을 형성케하여 완전한 인성의 형성을 가져오게 한다.
수학영재 교육기관	과학고등학교	수학·물리학교
수학영재 교육 운영기관	각 과학고등학교 소재 해당 시·도 교육청에서 학교의 제반교육지원업무를 수행 하고 운영(공립학교)	국립모스크바대학교를 비롯한 각 종합대학교에서 부설로 운영(국립학교)
교육과정의 운영	국가에서 지정한 교육과정에 의한 운영	대학교에서 만든 교육과정에 의해 교육과정운영
교육기간	3년을 원칙으로 하고 2년 동안 수학을 마칠 수 있다.	2년을 원칙으로 하고, 입학 학년에 따라 1년과정이 있다.
수업시간	주당 35시간	주당 43시간
수학수업	주당 5~6시간	주당 9~11시간

한국의 과학고등학교에서 사용중인 일반수학, 수학Ⅱ(상,하), 수학Ⅲ와 이러한 교육내용을 설명하고 있는 과학고등학교 교육과정해설서(문교부,1990), 제 6차 고등학교 수학교육과정 해설서(공통수학, 수학Ⅰ, 수학Ⅱ, 수학Ⅲ로 개정됨)를 주요 연구대상으로 한다.

2. 러시아 수학영재교육과정

러시아의 수학영재교육과정은 크게 대수·기하·해석학 세 영역으로 나누어진다. 각 영역별로 수학·물리학교에서 사용되어지는 교과서와 국립모스크바대학교의 수학·물리학교에서 펴낸 학교교육과정 해설서(Колмогоров, 1981)와 수학교육프로그램해설서(МГУ, 1994)를 주요 연구대상으로 삼는다. 러시아의 경우 수학·물리학교의 수학교육 대부분은 한국이 일정한 틀안에 있는 교육내용을 교육하는 것과는 달리 교수들이 직접 교재를 제작하여 사용하고 있기에 교과서보다는 수학교육프로그램해설서에 더 중점을 두고 연구를 수행한다.

B. 연구방법 및 절차

비교·분석 연구의 절차는 H.G. Nah 와 M.A. Eckstein, Z.F. Bereday 등이 제시한 방법에 기초한 과학적 연구방법으로 연구를 실시하였다.

IV. 수학영재교육기관의 일반교육과정

A. 한국의 과학고등학교

1983년 경기과학고등학교를 필두로 전국에 15개 과학고등학교가 설립운영 중에 있다. 이 학교는 설립초기부터 수학경시대회, 과학실험대회 등을 통해 동기유발은 물론 강한 성취수준으로 높은 학문적성취를 보여주고 있다. 수학교육에 있어서 수준 높은 문제, 내용의 깊이, 스스로 사고하고 해결하는 문제의 해결등에 역점을 두고 심도깊은 교육과정을 운영하고 있다. 수학은 한 학기 평균 5~6시간 정도 실시하고, 수학교과의 과목으로는 6차 교육과정상으로 공통수학, 수학Ⅰ, 수학Ⅱ와 과학고등학교 학생들을 위해 특별히 고안되어진 수학Ⅲ가 있다. 수학이 차지하는 비중은 전체 시수의 16.3%로 가장 높고, 또한 과학과 수학이 차지하는 비중은 전체 시수의 56.7%에 이른다. 특히, 한국에서는 대수학, 해석학, 기하학 영역이 독립된 과목으로 존재하는 것이 아니라 통합되어 있어 종합적인 수학내용의 이해가 쉽도록 하고 있다.

B. 러시아의 수학·물리학교

러시아의 수학영재학교인 수학·물리학교의 근원은 1934년의 레닌그라드대학교에서 있었던 수학경시대회로 거슬러 올라갈 수 있다. 이 경시대회에서 우수한 성적을 얻은 학생에게 대학입학의 특권을 주었는데 이러한 제도가 그 이듬해에 모스크바와 그외 다른 지역으로 확대되어져 갔다. 1958년 흐루시초프는 교육원로들의 교육의 현대화에 대한 시대적인 인식에 편승하여 당중앙위원회에서 한 연설에서 수학과 과학의 조기 영재교육을 강조하기에 이른다. 또한, 소련과학원 원장과 노보시비르스크 과학원 분원장이 '과학과 기술의 진보를 위해서 수학에 특별한 재능을 가진 아동을 발굴하고 적절한 교육의 기회를 주어져야 한다'는 주장을 하게 된다. 이것을 계기로 1961년에 노보시비르스크의 과학아카데미 시베리아 지부가 노보시비르스크대학교에 성적이 우수한 학생을 초대하여 수학여름학교를 개최하게 되었다.(최영한, 1992) 그리하여 2년뒤인 1963년에 노보시비르스크대학 부설의 수학·물리학교가 개교하였고, 키에프와 레닌그라드, 모스크바대학교의 부설로 수학영재학교가 차례로 생겨났다.(МГУ, 1981)

러시아에서 가장 유명한 국립모스크바대학교 부설의 영재학교인 Kolmogorov(러시아의 수학

자)학교는 1963년 12월 2일에 정식개교하였는데 지금은 3개 학부 즉, 수학·물리학교, 화학학교, 경제학교로 구성되어져 있다. 국립모스크바대학교 부설 영재학교인 꼴모고로프 학교의 수학년도는 2개년도에 4학기로 구성되어져 있다.(МГУ, 1995)

현재 이 학교는 10학년과 11학년의 두 학년으로 구성되어 있고, 각 학년은 세 개의 학급으로 구성되고, 각 학급은 20~25명의 학생들이 소속되어 있다. 이 학교에 강의를 하는 수학강사의 숫자는 30~35명이고 물리강사는 20~25명에 이르고 있다. 즉, 수학교사 1인당 학생의 숫자는 약 20명~24명 정도로 상당히 높게 나타나고 있다.

꼴모고로프 학교는 앞에서 언급한 바와 같이 3개의 학부로 구성되어져 있고, 이들 수학·물리학교, 화학학교, 경제학교는 각각 서로 다른 교육과정(서보억, 1995)을 가지고 있다. 이들 3개 학부의 교육과정 중에서 수학과의 시간배정을 비교하여 보면 약간의 차이를 보여 주고 있는데 수학·물리학교는 주당 기하 3시간, 대수 3시간, 해석 3시간 총 9시간(전체시간의 20.9%), 화학학교는 주당 기하 2시간, 대수 2시간, 해석 2시간 총 6시간(18.6%), 경제학교는 주당 대수 3시간, 해석 3시간, 기하 2시간 총 8시간(18.6%)의 배당시간을 가지고 있다. 이것을 통해 볼 때 각 학교는 독특한 특수교육을 실시하고 있음을 알 수 있다.

수학·물리학교의 일반교육과정에서 전체수업시간을 보면 일반학교보다 주당 5시간 정도가 많은 수업시간을 가지고 있는데, 각 학기의 수업시간은 10학년 1학기는 43시간, 10학년 2학기는 42시간, 11학년 1학기는 43시간, 11학년 2학기는 44시간 정도의 수업을 실시한다. 전체 수업시간 43시간중에서 수학이 차지하는 비중은 20.9%에 이르고 있고, 수학과 물리과목의 전체비중은 39.5%이고, 전체과목에서 과학과목의 비중은 50%을 훨씬 넘고 있다.

V. 수학영재 교육과정의 비교·분석

A. 한국의 과학고등학교에서의 수학교육과정

과학고등학교에서 과학계열교과에는 수학, 물리, 화학, 생물, 지구과학, 컴퓨터과학으로 나눌 수 있는데, 이러한 과학계열교과의 목적은 '과학 및 수학에 뛰어난 학생들에게 적절한 교육을 실시함으로써 그들의 적성과 능력을 최대한 계발하여 장래 우수한 과학자가 될 수 있는 소양을 기른다.' 라고 정하고 있다. 이러한 과학계열교과중 수학은 가장 중요한 교과로 필수과목인 공통수학, 수학Ⅰ, 수학Ⅱ와 선택과목인 수학Ⅲ가 있다. 과학고등학교에서 수학교과의 목표는 수학의 기본적인 지식을 가지게 하고 수학적으로 사고하는 능력을 기르게 하며, 이를 활용하여 창의적으로 문제를 해결할 수 있게 하는 데 목표를 두고 있다. 특히, 수학Ⅲ는 기존의 수학교과만으로는 학생들의 필요를 채울 수 없다는 인식으로 수학영재를 위해 개발한 것으로 그 교과목표를 '장래 우수한 과학자가 될 수 있도록 수학에 관한 깊은 지식을 가지게 하고, 수학적으로 사고하는 능력을 기르게 한다.

대수, 해석, 기하적인 내용이 통합적으로 구성되어져 있다.

B. 러시아의 수학·물리학교에서의 수학영재 교육과정

러시아의 수학·물리학교는 대부분 10, 11학년 두 개 학년으로 구성되어져 있고, 이 2년동안 고도의 수학의 과제를 성취하여 내고 있다. (МГУ, 1995) 이러한 고도의 수학적 내용은 각각의 수학과목에 대한 몇가지 중요한 원리에 의해서 선택되어지는데 수학·물리학교의 교육과정 구성의 여섯가지 원리는 다음과 같다.(МГУ, 1994)

첫째, 수학·물리학교의 수학교육과정은 일

반중등학교 모든 부분을 포함하도록 구성하여야 한다. 가능한 수학내용은 자세하게 표현해야 하고 대학수학교육과정과 일치하는 부분은 중복되지 않도록 한다. 둘째, 강의에서는 중요한 기본이 되는 이론만을 내용으로 하여야 하고 많은 실제적이고 보여질 수 활동적인 재료들을 많이 사용하도록 구성한다. 세째, 강의와 실습은 전체적으로 과학적인 면과 연구의 면에 흥미를 유발하도록 구성되어져야 한다. 네째, 교육을 위한 제재들의 선택은 우리의 일상생활과 부합되어야 하고, 더욱 더 직관적인 것들이어야 한다. 다섯째, 교육적 자료의 표현은 이 수학적인 이론들의 역사적 발전 단계에 대한 소개는 반드시 포함시켜야 한다. 여섯째, 연습이나 문제는 실제적으로 전반적인 부분에서 수학적인 방법이 중요함을 반영해야 하고 수학 자체가 어떻게 실사회생활에 영향을 주고 있는지를 나타내어 주도록 해야 한다.

그리고, 이 학교에서 중요한 과정으로 수학에서 폭넓고 심도깊은 학습을 수행하고 충분한 수학적인 내용을 전달하기 위한 수학특별활동과 세미나를 운영하고 있다. 이러한 특별활동과 세미나는 Специалые курсы(스페치아리에 꾸르쉬)라는 이름으로 이루어진다. 대표적인 예로 Высшая математика с элементарной точки зрения(기초적인 관점에서 본 고등수학), Математический практикум(수학실습), Математический семинар(수학세미나), Кривые на плоскости(평면위의 곡선), Что такое фрактал?(프랙탈이란 무엇인가?), Алгебра и теория чисел(대수와 수의 이론), Элементарная математика(수학개론) 등이 있다. 특히, 이러한 수학교육과정을 보면, 저학년에서 제한되어 다루어졌던 여러 문제들을 심도깊게 풀거나 더 깊이 연구를 수행할 수 있도록 구성하고 있다.

러시아의 수학영재교육과정에서 특이하게 볼 것은 각각의 주제마다 거의 주어져 있는 'Математический Практикум(수학실습, 이하 M.P)'이라는 Специалые курсы(스페치아리에 꾸르쉬)이다. 이 특별과정은 각각의 주제에 어울리는 제재들로 주어지게 된다. 수학실습에서 다루어지는 새로운 상황의 문제들은 수업시작 이전에 필요한 이론적인 근거를 보통 알려주고 시작을 하는데, 경우에 따라서는 주어진 문제 그 자체가 하나의 공식으로 되어질 수도 있고, 그것의 실행에 따라서 어떠한 해답을 주기도 한다. 즉, '수학실습'은 수학적인 부분에서의 일종의 '실험'이라고 표현할 수가 있다. 예를 들면 계산이나 혹은 그래픽, 도식, 작도, Model 등이 이러한 활동에 포함시킬 수 있다. 이러한 수학실습을 통해 제시되어지는 문제들에 대한 수학영재 교육학적인 목적은 오로지 수학학습을 활동적으로 흥미롭게 전개시키는 것이다.

다음 <표2>에서는 러시아의 수학영재교육기관에서 이루어지는 학습내용의 학기별 학습내용을 구성해 놓은 것이다

C. 한국과 러시아 · 미국의 수학영재 교육과정의 비교 · 분석

한국과 미국 · 러시아의 수학영재 교육과정의 비교 분석은 한국의 경우는 교육부가 설정한 고등학교 수학교육과정, 과학고등학교의 교육과정을 토대로 공통수학, 수학Ⅰ, 수학Ⅱ, 수학Ⅲ를 근거로 연구되어졌고, 러시아의 경우는 국립모스크바대학교 꼴모고로프학교에서 발간한 수학영재교육과정, 일반교육과정, 러시아의 현직 모스크바교수가 저작한 교수교재 및 참고서적을 근거로 연구가 되어졌다.

1. 수학 학습 순서(process)의 비교

대수학 영역에서 한국은 집합의 개념을 바탕으로 내용전개를 시작하고 있다. 집합과 명제에서 학습한 논리적인 사고력을 바탕으로 수와 식의 기본적인 개념을 도입하고 방정식과 부등식의 영역으로 학습이 이어지고 있다. 기본적인 일차, 이차방정식과 부등식의 학습이 끝나면 복

잡하고 난이한 유리방정식과 무리방정식, 삼·사차방정식과 부등식을 학습하도록 구성되어져 있어 기본적인 내용의 학습이 마치고 새로운 개념을 도입하여 심화시키는 학습구조로 진행되어지고 있다. 방정식과 부등식에 대한 학습이 마무리되면 기본적인 행렬과 수열에 관련된 이산대수의 학습이 이루어진다. 그리고, 수학적귀납법과 순서도의 학습이 바로 뒤를 따라 진행되는데 이 부분의 학습은 미국과 러시아에 비해서 상대적으로 늦게 학습되어지고 있어서 이 개념의 본래의 의미와 다른 학습과의 연계는 실제적으로는 거의 이루어지지 못하고 있는 것으로 나타났다. 이 단계를 지나면 수학Ⅲ에서 심화학습으로 행렬에 대한 내용을 다시 재편성되어 새롭게 학습하게 되어진다.

러시아의 경우는 한국과 비교하면 대수학적 내용의 전개순서뿐 아니라 내용의 구성면에서도 상당한 차이를 보이고 있다. 집합과 명제, 기초적인 방정식과 부등식에 대한 영역에 대한 학습이 거의 다루어지지 않고 바로 추상대수적인 내용에 접근을 시도하고 있다. 이러한 이유는 러시아 중학교 대수과정을 보면 쉽게 알 수

<표 2> 러시아의 수학영재교육과정의 학습순서

과목 / 학기	대 수	해 석	기 하
10 학년 1 학기	관계와 Mapping, 순서관계, 귀납법, 조합이론, 대수적인 문제, 방정식, 부등식, 연립부등식	실수, 수열, 수열의 극한과 급수, 근사값의 계산, 함수의 극한과 연속, 도함수, 함수의 해석, 적분, 로그와 지수, 로그함수와 지수함수	피타고라스의 정리, 사인과 코사인의 정리, 평면에서의 거리관계, 대수문제의 작도에 의한 풀이, 평면기하의 우수한 정리들, 평면에서의 선형변환, 이동 및 위치이동, Thales의 정리, 닮음과 그것의 분류, 반전(Инверсия)
10 학년 2 학기	수론의 기본적인 이론들, 환과 체의 정의와 기본적인 정리, 다항식의 대수, 대수적인 의미에서의 확대에 대한 개념, 컴파스와 직선자에 의한 기하적인 작도에 대한 대수적인 입장	삼각함수와 응용, 복소수, 복소지수, 역삼각함수와 응용, 초월함수의 응용	공간에서의 직선과 평면, 도형의 구성과 절단(단면), 아핀기하에 대한 이해, 기저로 벡터의 분할에 대한 정리, 좌표개념, 삼각형에서의 각의 성질, 구면기하의 기본정리들, 구면위에서의 삼각형
11 학년 1 학기	복소수의 대수, 삼각법의 문제, 매개변수의 문제, 확률의 기본정리	적분의 응용, 수의 급수, 2변수함수	평면에서의 아핀기하의 공리와 사영기하의 공리 및 모델, Pascal의 정리, Brianson의 정리, 한 개의 직선자에 의한 작도, Lobachebskii 기하의 모형,
11 학년 2 학기	복잡한 대수적인 문제의 풀이, 전과정의 복습과 문제풀이	모든 과정의 복습 및 정리, 증명없는 정리들의 새로운 증명시도	면적과 부피, 각기둥·Cone·구형과 그것의 부분의 부피 공식, Simpson의 공식, Гюльдена(굴대나)의 정리, 표면적과 곡선의 길이, 대략적인 넓이와 부피, 벡터의 곱과 그것의 응용, 각의 측정, 공간에서의 변환, 유클리드공간

있다. 러시아 중학교 대수영역을 보면 집합뿐 아니라 명제와 조건문까지 모두 언급을 하고 있고, 수열에 대한 구체적인 언급과 간단한 Taylor의 전개식, 유리식, 복잡한 인수분해 공식, 지수법칙의 유리수로의 확장, 이차방정식의 근과 계수와의 관계, 고차방정식, 고차부등식, 유리부등식,고차함수, 무리함수의 영역에 까지 기본적인 학습이 이루어지고 있는 것이다.(서보억, 1995) 따라서, 이러한 중학교 단계에서의 대수학의 깊은 지식의 교육이 수학영재교육기관에서의 추상대수적 내용의 학습을 가능하도록 만들었다. 결국, 러시아의 경우는 몇가지 기초대수적인 이론과 정수론적인 이론을 학습한 후 치환, 역치환 개념을 학습하고, 다양한 예를 통해서 군, 환, 체의 대수적 구조의 개념을 학습하고 있다.

해석학 내용의 학습진행 순서를 보면 한국과 러시아 두 나라 모두 거의 같은 순서에 의해 학습이 진행되어지고 있다. 한국은 먼저 함수의 정의를 내리고, 다양한 대수적인 함수와 초월함수에 대한 학습이 진행된다. 특히, 삼각함수에 대한 다양하고 폭넓은 내용을 다양한 공시과 정리를 통해서 학습을 하고, 수열과 급수에 대한 학습을 하게 된다. 이러한 기초적인 학습을 거친 다음 미분을 위한 직전 단계로 함수의 극한과 연속을 학습하고 미분과 적분, 편미분, 중적분, 전미분, 미변수미분 등이 학습된다. 이러한 미적분학의 학습면에서는 한국의 학습내용이 구체적이고 학습내용이 광범위하게 학습하도록 구성되어 있었다. 해석학 영역에서도 수학II의 학습내용을 다시 수학III에서 재언급하여 학습의 연계 및 재학습을 통해 깊이있는 학습이 수행하도록 하고 있었다.

러시아 역시 한국과의 큰 차이는 보이고 있지 않았고, 부분적으로 수학사적으로 중요한 위치에 있는 해석학의 주요내용을 직접 그 순서대로 학습을 하도록 구성되어져 있었다. 예들들면, 수열 다음 학습으로 원주율을 구하기 위한 수학자들의 수천년동안의 노력의 일부를 학습하고 있고, 적분법의 학습 사이에 고대의 수학자들의 착출법과 근대의 수학사적인 중요한 사실을 학습하고 있다.

기하학 영역에서는 한국과 러시아 사이의 학습내용상의 차이가 상당히 심하여 일정한 학습의 틀 속에서 학습순서를 비교한다는 것은 어려운 일이다. 한국의 경우를 보면 학습의 전개순서가 궁긍적인 목적이 해석기하학쪽에 바탕을 두고 있었다. 직선에서 평면, 공간으로 확장되어지는 좌표의 도입과 이를 좌표상에서 도형의 방정식과 위치관계를 밝히려는 방향으로 전개되어지고 있다. 러시아는 한국과는 달리 기하에서 상당히 많은 영역을 할애하여 있는 것으로 밝혀졌는데, 먼저 평면에서의 다양한 기하적인 기초학습을 통해 기본적인 기하적인 사실과 좌표의 개념을 학습하였다. 그 다음으로는 비유클리드기하학의 창시자인 로바체브스키의 평면모델을 소개하고 아핀기하, 구면기하, 리이만기하, 사영기하, 로바체브스키의 기하모형 등을 학습하게 된다. 마직막 단계에서는 다면체, 평면에서의 넓이, 공간의 부피, 공간에서의 변환등의 학습과 유클리드기하에 대한 구체적인 학습이 이루어지고 있다.

지금까지 수학교육과정상에서 학습순서에 대한 비교를 하였다. 전체적으로 학습의 전개순서상의 차이보다는 학습내용상의 차이가 더 많았다는 것이다. 이러한 내용상의 차이와 이 내용이 구체적으로 무엇을 의미하는 것인지에 대해서 알아보자.

2. 영역별 학습내용의 비교

수학분야를 크게 대수학, 해석학, 기하학으로 분류하는 것은 가장 일반적인 분류방법이다. 하지만, 이러한 영역이 상당히 방대하고 폭이 넓어서 학습내용상의 차이를 비교하는 것은 쉬운 일이 아니다. 따라서, 각 영역을 다시 몇 개의 영역으로 나누어 비교를 수행하였다. 대수학은 수와 식(집합, 명제, 수론, 식, 방정식, 부등식,

지수, 로그), 이산대수(행렬, 수열, 순서도, 순열, 조합), 고등대수(군, 환, 체, 조합론, 선형대수, 정수론)로 나누었고, 해석학은 함수의 해석(함수, 급수, 극한, 연속), 미적분(미분법, 적분법, 미분방정식)으로 나누었고, 기하학은 해석기하, 유클리드기하, 비유클리드기하로 나누어 비교 분석하였다.

1) 대수학

대수학에서 수와 식 영역의 한국과 러시아 학습 내용을 비교해 보자. 집합과 명제 및 수리 논리적인 내용면에서는 한국은 집합의 정의와 집합에 대한 연산, 연산법칙, 명제, 조건문의 역, 이, 대우까지 모두 다루고 있다, 러시아는 한국에 비해서 상대적으로 작은 영역에서 수리 논리적인 내용을 다루고 있지만 이미 중학교 과정에서 기본적인 개념을 이미 학습된 상태에 있고, 기하학 영역에서 추론과 증명법, 엄밀성을 추구하고 있다. 논리적인 측면에서 볼 때 미국이 가장 많은 내용을 실제적으로 다루고 있어서 수학적인 사고력과 문제해결력 및 탐구력을 기르기 위한 많은 분량이 할당되어져 있음을 알 수 있다.

수체계와 수론적인 내용면에서는 한국은 유리수로부터 실수를 정의하고 그에 대한 연산과 실수의 연속성에 대해서 다루고, 복소수에 대한 정의로 연결시켜 연산을 정의내리고 있었다. 수론적인 내용으로는 약수와 배수, 정수의 잉여류 집합을 다루고 있는 정도이다. 이에 비해 러시아는 자연수의 정의와 성질, 자연수의 공리적인 정의로 Peano의 정리, 정수에 대한 분류에서 모듈과 합동의 이용, 정수론에서의 오일러의 공식, 약수와 배수와 이것의 계산을 위한 유클리드알고리듬의 원리와 사용, 복소수의 정의와 연산 등 정수론적인 내용이 포함되어져 있다.

다양한 식과 방정식, 부등식 영역에서는 한국이 가장 많은 내용을 할애하고 있는 영역이다. 한국은 다항식, 다항식의 연산, 인수분해, 전개공식, 유리식과 무리식의 개념과 연산, 유리화, 이중근호의 계산, 유리식의 통분과 약분, 일·이·삼·사차방정식과 부등식, 이차방정식의 근의 공식과 판별식, 근과 계수와의 관계, 항등식, 다양한 연립방정식, 절대부등식, 조건부등식, 유리방정식과 무리방정식 등 식과 방정식, 부등식에 대한 학습이 폭넓게 이루어진다. 이에 비해 러시아는 제한적으로 다루어지고 있다. 사차방정식은 구체적으로는 다루어지지 않고 있고 유리식과 다항식에 있어서도 많은 양은 다루고 있지 않다. 러시아에 있어서 특이한 내용은 임의의 방정식에서의 근과 계수와의 관계에 대한 비에타의 정리의 언급과 방정식의 근사근을 찾는 방법의 도입 등이다.

비에타의 정리는 근과 계수에 대한 일반적인 관계를 나타내는 것으로 대수학에서 가장 큰 관심이 되는 방정식의 근에 대한 해를 구하기 위해 생겨난 것으로 수학사적으로 볼 때 근으로부터 계수의 성질을 구했다는 면에서 큰 의미를 지니고 있는 것이다. 비에타의 정리는 다음과 같다.

$$f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_0$$

이 일차항의 곱으로 인수분해되어질 때, 각 근을 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_n$ 이라고 하면

$f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots\cdots(x-\alpha_n)$ 이다. 그러면, 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$a_0=(-1)^n\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$$

$$a_1=(-1)^{n-1}(\alpha_2\cdots\alpha_{n-1}+\alpha_1\cdots\alpha_{n-2}\alpha_n+\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_n)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$a_{n-1}=-(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)$ 이 된다.

다음은 근사해에 대한 접근이다. 한국에서는 근사해에 대한 언급이 없고 구하는 방법도 제시되어져 있지 않다. 고차방정식까지 폭넓게 다루고 있지만 정확하게 구해질 수 있는 특수한 꼴만을 다루고 있는 것으로 일반적으로 구하기 어려운 고차방정식의 해에 대한 해법이 소개되어져 있지 않다. 따라서, 구하기 어려운 방정식의 해법보다는 근사해를 구하는 방법의 학습은 실제적으로 큰 의미를 가지고 있는 학습내용이

다. 이러한 근사해를 위한 방법으로 뉴턴과 라그랑제의 보간법, 로바체바스키의 방법, Bezout 정리와 Horner의 방법이 소개되어져 있다. Horner의 방법은 한 개의 값은 근의 근사값으로 지정하여 그것으로부터 근의 값을 근사시키는 방법이고 로바체브스키방법은 그래프를 이용하여 구하고, 보간법은 그래프에서의 직선의 기울기를 이용하여 근사해를 구하고 있다.

그외 러시아에서는 디오판토스의 방정식으로 알려져 있는 부정방정식을 유클리드의 알고리듬과 연관시켜 학습을 하고 있었고, 추상대수의 엄밀성을 바탕으로 인수분해의 유일성에 대한 의미를 학습하고 있었다.

대수학에서 두 번째 부분으로 이산대수 영역의 한국과 러시아의 학습내용에 대해서 살펴보자. 행렬과 수열의 내용면에서 보면 러시아와 한국간의 차이가 분명하게 드러나고 있다. 특히, 행렬의 경우 러시아에서는 이 부분에 대한 학습이 전혀 이루어지고 있지 않다. 러시아의 일반고등학교에서도 이와 같은 현상은 마찬가지로 나타났다. (한인기, 1995) 한국의 경우는 최근의 이산수학 강화의 흐름에 편승하여 행렬, 역행렬, 정칙행렬, 역행렬, 전치행렬, 소행렬식, 행렬식의 공리적 정의, 여수인수행렬, 수반행렬, 크라머공식, 가우스소거법 등이 학습되어지고 있다. 수열에서는 러시아의 경우 해석학영역에서 대부분 다루어지고 있고 대수학 내에서는 언급을 하고 있지 않다.

여기서 수열의 단원에서 중요한 논법으로 수학적 귀납법을 생각할 수 있다. 이러한 수학적 귀납법을 다루는데 있어, 한국의 경우는 자연수에 대한 명제가 모든 자연수에 대하여 성립하는 것을 증명하기 위하여 사용하는 방법으로 수학적인 귀납법을 수열단원 마지막부분에서 도입하고 있다. 러시아는 증명의 방법으로 도입하였다기 보다는 앞에서 언급하였듯이 자연수의 공리적인 정의를 위해서 도입된 것이 우선이었다. 수학사적으로 볼 때 수학적귀납법은 19세기말 이탈리아의 논리학자인 Peano에 의해서 정립이 되었는데 그는 '수학의 공식집'이라는 책에서 명제를 설명하는데 일상적인 용어를 피하고 'Peano 의 기초' 라는 용어를 사용하였는데 그가 제시한 기초 세가지 '0', '음이 아닌 정수(N)', '후자(S)'의 개념으로 다음 5가지 공리를 내세웠는데 이 공리가 자연수의 정의나 여러 가지 증명에 사용되어지고 있다. 이 중에서 다섯번째 공리가 그 유명한 수학적귀납법인 것이다. 이러한 면에서 러시아는 수학사적 사실에 기초하여 수학적귀납법과 수학내용을 전개하고 있는 것이다.

순열과 조합 내용에서는 러시아가 가장 많은 내용을 다루고 있었다. 한국은 순열과 조합에 대한 정의와 몇가지 문제에 집중하였고, 이항정리등 몇가지 정리를 다루고 있을뿐 깊이 있는 내용의 전개는 없었다. 특히, 이항정리와 파스칼의 삼각형의 연관성을 생각할 때 학습내용의 구성면에서 큰 의미를 지니고 있다. 러시아는 이항정리뿐 아니라 다항정리, 이항정리와 파스칼의 삼각형의 상호관계에 의한 문제해결 등을 다루고 있었다.

여기서 러시아에서 자세히 다루고 있는 파스칼의 삼각형은 수학사적으로 확률론의 시작이었다는 면에서 의미가 있는 학습단원이다. 특히, 파스칼과 페르마의 서신을 통해 자극을 받아 만들어낸 파스칼의 삼각형의 삼각형에 대한 구체적인 언급과 사용은 수학을 연구하는 수학영재아에게 많은 도전이 되어질 수 있다.

대수학에서 세 번째 부분으로 고등대수 영역의 한국과 러시아의 학습내용에 대해서 살펴보자. 이 영역에서의 학습내용의 비교는 너무나 명확하게 나누어진다. 한국은 대수학의 내용에 있어서 추상적인 내용은 거의 다루지 않는 것으로 볼 수 있고 러시아는 현대 추상대수의 기본이 되는 군, 환, 체에 대한 대수적인 구조에 대한 기본적인 내용을 학습을 하고 있다. 러시아가 다루고 있는 현대추상대수적인 내용의 깊

이있는 학습은 치환, 군, 위수, 다면체군, 잉여류군, 군, 다항식환, 복소수체등까지 학습하고 있고, 정오각형과 정십칠각형의 작도문제까지 다루고 있는 것으로 나타났다. 이러한 정다각형의 작도문제는 작도가능성에 대한 충분한 사전 논의가 있어야 한다는 면에서 특히, 정십칠각형의 작도는 그렇게 간단히 작도가 되지 않는다는 면에서 그 학습수준이 상당히 높다는 것을 짐작하게 한다.

지금까지 대수학 영역에서의 한국과 미국, 러시아의 수학영재교육과정에 대한 내용을 살펴보았다. 대수학에서는 한국의 경우는 방정식과 부등식에 대한 이론과 정확한 해를 구하기 위한 다양한 공식의 이용과 해법의 학습에 집중되어져 있으면서 이산수학적인 내용으로 행렬과 수열에 대한 학습이 상당히 이루어져 있는 것으로 나타났다. 러시아의 경우는 오랜시간 동안의 독자적인 수학교육의 연구로 한국과 미국과는 방향이 상당히 다른 모양을 보여 주고 있다. 한국이 강조하고 있는 방정식과 부등식에 대한 해법에 대한 부분에도, 미국이 강조하고 있는 이산수학적인 행렬이론과 조합이론에도 큰 강조를 두지 않으면서 추상 대수학인 군, 환, 체의 대수적인 구조에 대한 이해에 학습이 집중되어져 있고, 더불어 정수론적인 입장에서 수를 해석하는데 중점되어져 학습이 진행되어져 있었다.

2) 해석학

해석학에서 함수의 해석 영역의 한국과 러시아의 학습내용을 살펴보자. 해석학의 영역중에서 함수, 급수, 극한, 연속의 부분을 보면 한국의 경우조화급수를 제외한 모든 내용을 다루고 있다는 것외에도 내용의 깊이면에서 가장 많은 내용을 다루고 있다. 러시아 역시 이 영역에서는 한국과 큰 차이는 없으나 내용의 깊이면에서는 한국에 비해 약한 편이다.

한국이 중요하게 여기는 내용으로 함수영역에서는 함수의 개념, 합성함수, 역함수, 전사함수, 단사함수, 전단사함수, 합성함수 등의 함수의 기초개념에 대한 학습이 심도깊게 이루어지고 있다. 반면 러시아의 경우는 함수의 개념, 독립변수, 기본적인 대수함수, 초월함수의 예, 우함수, 기함수 등에만 국한되어져 있어 한국에 비해서는 기초적인 함수의 개념에만 치우져 있었다.

이러한 함수에 대한 기본적인 내용이외에 다양한 함수로 한국은 유리함수, 무리함수, 이차함수, 삼차함수, 다항함수, 지수함수, 로그함수, 삼각함수, 초월함수, 역삼각함수, 쌍곡선함수, 역쌍곡선함수, 다변수함수, 벡터함수 등을 소개하고 있고, 미국은 항등함수, 대수함수, 유리함수, 무리함수, 지수함수, 로그함수, 최대정수함수, 삼각함수, 역삼각함수, 다변수함수, 초월함수 등을 다루고 있다. 러시아는 유리함수, 무리함수, 다양함수, 삼각함수, 초월함수, 지수함수, 로그함수 등을 다루고 있다. 해석학적인 함수의 종류면에서는 한국이 러시아에 비해서 다양하게 다루고 있는 것으로 나타났다. 한국이 함수의 종류면에서 폭넓게 다루고 있어 미분법과 적분법에서 이러한 함수를 이용한 다양한 미적분학의 접근을 용이하게 하고 있다.

수열의 극한과 급수의 학습에서는 한국은 수열의 정의, 수열의 극한, 극한의 여러 가지 성질, 무한수열의 수렴과 발산, 등비수열의 극한, 무한급수, 무한등비급수, 급수의 수렴판정법(적분판정법, 비교판정법, 비판정법), 절대수렴, 조건수렴, 멱급수와 Taylor전개와 정리, Maclaurin급수 등이 주로 다루어지고 있다. 러시아는 등차수열, 등비수열, 등차수열과 등비수열의 성질, 수열의 극한, 수열의 극한에 대한 정리, 실수에서의 증가수열과 감소수열, 피보나찌수열, 원주율을 이용한 수열, 교대수열, 조화급수, Taylor전개식 등을 학습하고 있다. 한국은 수렴판정법에 대한 학습으로 대학에서 본격적으로 학습하게 되는 적분판정법, 비교판정법, 비판정법 모두를 대학교 수준에서 학습하고 있

어 무한급의 수렴 및 발산에 대한 명확한 이해를 가능하게 구성하고 있어서 다른 나라에 비해 속진된 모습을 보여주고 있다. 또한 절대수렴과 조건수렴에 대한 정리도 함께 학습함으로서 급수의 수렴과 발산에 대한 폭넓은 지식의 습득이 가능하도록 구성하고 있는 것이 가장 큰 특징이다. 급수의 전개면에서도 Taylor급수의 전개뿐 아니라 Maclaurin급수까지 다루고 있어 초월함수와 유리함수 등에 대한 근사값의 계산과 정확성을 학생이 검증할 수 있게끔하고 있다. 러시아의 학습에서 볼 수 있는 특이한 것은 피보나찌수열의 도입에 대한 내용과 원주율을 이용한 수열이다. 피보나찌수열은 그 많은 수열중에서 가장 흥미롭고 신비한 성질을 지니고 있는 수열이다. 이것에 대한 역사적인 일화도 많이있는데 그 기원은 이집트의 파피루스에서부터 시작되어진다. 또한, 이 피보나찌수열로부터 황금비를 얻을 수 있다는 사실로부터 충분한 흥미를 학생들이 가질 수 있는 것이다. 러시아의 경우 수학영재교육과정의 설립 원칙에서도 볼 수 있듯이 학생들이 보고 재미있고 흥미있는 것을 수학교육과정내에 삽입한 것으로 볼 수 있다. 러시아의 원주율을 통한 수열의 학습은 원주율을 구하려고 노력한 아르키메데스와 Huygens, 뉴턴의 방법의 소개와 함께 원주율의 값에 대한 수학사적인 사실을 학습하고 있다. 또한, 미적분학의 단원에서는 Wallis의 공식, Stirling공식을 다루어 수치 해석적인 π 값에 대한 계산을 학습하고 있었다. P. Bechemann 이 쓴 'π의 역사' 라는 책에서 그는 π는 인간 역사의 작은 거울이다라고 표현을 하였다. 사실 B.C 2000년 바빌로니아인과 이집트인들 조차 π의 값을 $3\frac{16}{9}$, $\frac{16}{9}$로 규정하고 사용한 것으로 전해지고 있고, B.C 3세기에 아르키메데스에 의해 혁기적인 방법으로 π의 값을 구하게 되었다. 그를 뒤를 이은 일단의 아르키메데스학파의 구성원에 의해 지속적으로 연구되었고, 이 학파의 마지막 인물인 Huygens까지 이어져 아르키메데스적인 방법으로 π의 값을 구하여려고 노력하였다는 것이다. 그 이후 뉴턴에 의해 전환점이 되어 미적분학적으로 π의 값을 정확하게 정의내리게 된다. π에 관련된 이러한 역사적인 전통을 학습한다는 것은 수학의 전반에 걸친 시대적인 인식이 가능하고, 고대의 수학적인 접근법을 통해 폭넓은 수학적 이해와 기초 방법적인 사고를 습득할 수 있게 되는 이점이 있는 것이다. 또한, 수학적인 사실에 대한 흥미와 개인연구에 대한 관심을 더 높여주는 것이다. 이러한 의미에서 원의 외접다각형을 이용한 근사적 π값의 계산의 시초인 아르키메데스와 그 마지막인 Huygens의 방법을 학습하는 것은 효과적일 것이다.

해석학에서 두번째로 미적분 영역의 한국과 러시아의 학습내용에 대해서 살펴보자. 미분법과 적분법의 학습내용을 보면 한국의 학습내용이 러시아에 비해서 월등이 많음을 알 수 있다. 한국은 함수단원에서 유리함수, 무리함수, 이차함수, 삼차함수, 다항함수, 지수함수, 로그함수, 삼각함수, 초월함수, 역삼각함수, 쌍곡선함수, 역쌍곡선함수, 다변수함수, 벡터함수에 대한 학습을 하였는데 이들 함수에 대한 모든 미분계수를 결정하고 있고, 미분법을 응용한 다양한 응용문제를 학습하고 있다. 미분법에서 다변수함수에서 편미분과 전미분, 고계도함수를 학습할 뿐 아니라 고도의 미적분학의 내용인 유향미계수(방향도함수)와 물매(Gradient)까지 학습을 하고 있다. 적분법에서는 정적분, 부정적분, 치환적분법, 부분적분법, 이중적분, 다중적분 등을 학습하고 있다. 또한 미분방정식의 일계미분방정식까지 학습하여 대학교 미분적분학의 기초적인 영역까지 모두 학습하고 있어 학습내용면에서는 대학교 미적분학의 전영역을 포함하고 있고, 수준면에서도 대학 미적분학의 기초개념 수준으로 미적분학의 속진형태를 그대로 가지고 있다.

러시아의 경우는 미분법과 적분법의 영역에서는 상당히 간단한 학습내용을 가지고 있는

것으로 나타났다. 기본적인 미분과 적분의 개념, 여러 가지 함수의 미분과 그 응용을 다루고 있지만 한국과 미국에 비해서는 부족한 편이다. 러시아의 미분과 적분 영역에서 특이한 것은 적분의 개념에 대한 학습에 있어서 수학사적 발달단계에 입각한 학습의 전개가 적분의 단원에서 이루어지고 있다는 것이다. 역사적으로 미분법보다 적분법이 먼저 발견되었다는 사실이 적분법에 대한 학습 단원에서 이러한 방법을 도입하고 있는 것으로 보여진다. 구체적으로 적분의 단원을 보면, 직사각 사다리꼴 계산을 위한 아르키메데스의 방법, 곡선상의 직사각 사다리꼴 면적 계산을 위한 심슨의 방법, 카발리에르의 원리, 뉴턴과 라이프니찌의 공식의 순으로 학습이 진행되고 있는 것이다. 아르키메데스는 역사적으로 최초로 축출법이라는 방법으로 원의 면적을 계산하려고 시도하였고, 카발리에르 불가분량이라는 개념을 도입하여 현재의 미적분의 개념과는 조금 다르지만 무한의 개념을 도입하여 도형의 면적과 체적을 카발리에르의 원리에 의해 구하였고, 뉴턴과 라이프니찌는 근대 미적분학의 독자적인 창시자로 현재의 미적분의 기초 개념과 사상을 확립한 수학자들이다. 즉, 러시아는 적분의 학습에 있어서 수학사적 사실을 바탕으로 미적분의 기본 원리를 학습하도록 구성하고 있는 것이다.

지금까지 해석학 영역에서의 한국과 미국, 러시아의 수학영재교육과정에 대한 내용을 살펴보았다. 해석학에서 한국의 경우는 폭넓은 함수를 도입하여 도함수를 구하고 그에 따른 함수의 해석과 적분법의 정확한 이해를 통해 다양한 적분문제들에 대한 정확한 계산을 위해 학습이 중점적으로 이루어져 있는 것으로 나타났고, 러시아의 경우는 한국에 비해 상대적으로 좁은 학습내용과 낮은 수준을 나타내고 있었지만 적분의 도입과 개념의 이해, 적분의 응용에서 수학사에 입각하여 순차적으로 학습을 진행하고 있는 것이 특징적이었고, 피보나찌수열의 도입으로 학습의 흥미를 가져오려고 시도하고 있었다.

3) 기하학

기하학에서 해석기하 영역의 한국과 러시아의 학습내용을 살펴보자. 해석기하에 대한 내용의 학습을 보면 한국은 평면과 공간의 좌표의 개념을 도입하여 다양한 이차평면도형과 공간상의 직선과 평면의 방정식을 결정하고, 극좌표를 도입하여 극방정식을 학습하고 벡터에 대한 학습을 진행하고 있다. 러시아는 대수적인 기본 벡터의 정의, 평면과 공간좌표의 정의, 좌표 중심의 개념, 공간에서의 직선과 평면의 방정식, 극방정식 등 기본적인 해석기하적인 개념과 카발리에르 정리를 이용한 다양한 평면 및 공간 도형들의 넓이와 부피를 계산하고 있다. 러시아의 경우 해석기하에 있어서는 한국은 물론 미국에 비해서도 학습량이 적게 구성되어져 있다. 여기서 러시아에서 학습하는 카발리에르의 정리는 앞에서 언급했듯이 미적분학의 발달 단계에 생겨한 것으로 그 정리 내용은 '만약 두 개의 평면 도형이 한 쌍의 평행선 사이에 끼어 있고, 그리고 만약 그 평행선들과 평행인 임의의 선으로 그 두 평면 도형을 잘랐을 때 생기는 두 선분의 길이가 항상 일정한 비를 가지면, 두 평면 도형의 넓이도 또한 그 비를 갖는다.', '만약 두 개의 입체 도형이 한 쌍의 평행면 사이에 끼어 있고, 그리고 만약 그 평행면들과 평행인 임의의 면으로 그 두 입체 도형을 자랐을 때 생기는 두 단면의 넓이가 항상 일정한 비를 가지면, 두입체 도형의 부피도 또한 그 비를 갖는다.' 이다. 이 정리는 넓이와 부피를 계산하는데 유용한 도구가 된다. 그리고 그것들의 직관적인 근본 원리는 현대적인 적분법에 의해서 엄밀하게 밝힐 수 있다는 면에서 이 정리의 학습은 큰 의미를 지니고 있다.

기하학에서 두 번째로 유클리드 및 비유클리드기하 영역의 한국과 러시아의 학습내용에 대

해서 살펴보자. 한국의 유클리드기하와 비유클리드 기하에 대한 학습내용은 공간에서의 직선과 평면의 위치관계, 정사영 등의 학습에 한정되어져 있다. 한국의 경우는 닮음과 합동, 논증기하의 엄밀성과 다양한 증명, 다각형과 삼각형, 원, 사각형의 증명문제, 다면체에 대한 학습 등은 중학교에서 이미 학습되어진 상태이다. 러시아는 유클리드기하의 영역에서 논증기하의 엄밀성 이외에 유클리드기하를 재정립한 힐버트의 공리적 기하학에 대한 학습과 다면체에 대한 학습이 이루어지고 있다. 그리고, 삼각형의 꼭지점을 지나는 세 선분에 관련된 체바의 정리와 메넬라오스의 정리, 원에 내접하는 사각형의 변의 길이에 관련된 프톨레이의 정리를 학습하게 된다. 비유클리드기하의 영역은 러시아에서만 다루어지는 것으로 그 학습 내용에 있어서는 기본적인 개념과 이해 수준에 머물어 있는 것으로 보인다. 하지만, 비유클리드기하는 인류의 정신세계를 2000년 이상 이끌어온 유클리드기하의 한계를 극복하였다는 그 자체의 의미만으로도 학습의 의의는 크다. 또한, 학생이 기존의 사고와는 전혀 다른 사영기하적인 내용과 Desargues의 정리, 파트칼의 정리 등을 학습하고, 아핀기하, 구면기하, 리이만기하, 로바체바스키기하에 대한 학습으로 사고의 전환과 폭넓은 공간개념의 이해가 가능하여진다.

지금까지 기하학 영역에서의 한국과 미국, 러시아의 수학영재교육과정에 대한 내용을 살펴보았다. 기하학에서 한국의 경우는 유클리드기하에 대한 내용을 중학교에서 이미 학습하였기에 과학고등학교에서는 새로운 다른 학습은 거의 보이지 않았다. 하지만, 좌표를 도입하여 원, 포물선, 타원, 쌍곡선 등의 도형의 방정식을 학습하고 있고, 공간좌표의 개념으로 공간상에서의 직선의 방정식과 평면의 방정식을 학습하는 등 심도깊은 학습내용을 해석기하학적인 측면에서 진행하고 있다. 러시아는 해석기하학적인 면은 좌표의 도입과 몇몇 도형의 방정식을 구하는 정도만 다루고 있고, 유클리드기하의 경우는 엄밀성을 강조하는 논증기하의 입장에서 삼각형, 사각형, 원에 대한 내용을 학습하고, 자와 컴퍼스를 사용한 작도 문제, 체바의 정리, 메넬라우스의 정리, 탈레스의 정리 등을 다루고 있다. 특히, 비유클리드기하의 경우는 비유클리드기하의 시조인 로바체브스키, 리이만이 발견한 기하적인 기초개념과 구면기하, 사영기하 등을 여러 가지 정리와 함께 학습되어지고 있다. 미국은 한국이 해석기하에 러시아가 논증기하에 치중되어져 있는 것의 중간형태를 가지고 있다. 해석기하에 대한 내용을 다양하게 다루면서 기하학적인 도형의 여러 증명과 용어의 공리적 정의, 작도 등을 다양하게 다루고 있었다.

기하학의 경우 유클리드의 엄밀성을 강조하는 내용의 도입, 비유클리드기하학인 타원기하와 쌍곡기하의 도입이 쉬운 일이 아니다. 그리고, 해석기하에서 더 심화된 미분기하의 개념을 도입하는 것도 마찬가지이다. 하지만, 심리학적인 고려와 논증기하와 비유클리드기하의 학습수준의 고려, 학생들이 느끼는 흥미의 고려 등을 감안하여 수학영재아를 위한 학습내용을 구체적으로 결정하여야 할 것이다.

VI. 결론

본 연구의 주요 목적은 러시아의 수학영재교육과정을 한국의 수학영재교육과정과 비교 분석하여 이들 사이의 유사점과 차이점을 통해 수학영재교육의 선진국인 러시아의 수학영재교육과정이 우리에게 주는 시사점이 무엇인지 알아보는 것이다. 한국은 과학고등학교를 연구대상으로 삼았고, 러시아는 세계적으로 유명한 국립모스크바대학교 부설 꼴모고로프학교를 연구대상으로 삼았다.

한국의 과학고등학교가 개교된지 적지 않은 시간이 흘렀다. 그 동안 15개의 학교가 설립되는 등 양적인 성숙과 함께, 2학년 수료후 과학기술대학교의 진학하는 속진 및 조기진학의 교육과정을 운영으로 우수한 인력을 사회에 조기 배출하였고, 수학Ⅲ의 적용으로 수학교육내용의

질적 성숙을 이룩하였다. 교사의 수준이나 교수법, 학교 교육시설 측면에서도 그 우수성은 우리 사회에 입증되었고, 특히 대학입학에서는 최고의 합격률로 그 우수성이 입증되었다.

하지만 과학고등학교는 그 설립과정에서 볼 수 있듯이 지나친 입시위주의 수학교육으로 이미 수학영재교육으로서의 기능을 많은 부분에서 상실하고 있다. 특히, 수학Ⅲ의 경우는 전문선택 과목이라는 규정을 이용하여 편법으로 운영하고 있는 사례가 많다. 게다가, 이러한 수학교육과정을 자세히 분석하여 보면 과학고등학교의 수학교육과정이 일반학교와 별차이 없는 교육과정으로 구성되어져 있음을 쉽게 알 수 있다. 더욱이 과학고등학교의 경우 공통수학, 수학Ⅰ, 수학Ⅱ를 1년에 모두 끝내기 때문에 나머지 2년동안을 입시수학에만 매달려 진정한 수학적 지식을 깨닫기도 전에 수학에 대한 매력과 흥미, 수학적 사고력, 상상력 등을 매장시키는 결과를 초래할 수 있어 미래의 수학자적인 자질에 악영향을 미치고 있는 것이 사실이다.

수학내적으로 보면, 공통수학이 대수부분에 많이 할당된 것을 제외하고는 수학Ⅰ, 수학Ⅱ, 수학Ⅲ 모두 해석학 위주로 편성되어 있어 균형적인 수학영재교육이 이루어지지 못하고 있다.

이처럼 한국의 과학고등학교는 개교후 적지 않은 시간이 흘렀지만 그 학교의 근본적인 설립취지와는 부합되지 않고 운영되어지고 있음을 알 수 있다. 그래서, 우리는 본 연구에서 비교한 러시아의 수학·물리학교 교육운영, 교육과정, 수학교과운영, 수학교육과정을 통해서 한국의 과학고등학교가 지닌 한계점을 조금이나마 극복할 수 있는 몇가지 제안을 내리고자 한다.

첫째, 일반교과목의 운영과 편제, 단위수가 일반고등학교와 다르게 운영되어져야 한다.

둘째, 수학교과의 운영에 있어서 각 영역별 독립교과로의 전환과 수업시수의 증가, 선택과목의 신설이 필요하다.

셋째, 수학내용에 있어서 각 영역별 균형적인 교육과 함께 각 영역별 교육과정의 수정이 이루어져야 한다. 현재, 해석학중심의 수학교육내용은 수학적인 사고력을 향상시키는 불균형을 초래할 수 있고 결국에는 편향적인 수학적인 성향을 가진 수학자로 배출하게 될 우려가 높다.

각 영역별로, 대수분야에서는 기본적인 현대추상대수의 개념을 도입하여 전체적인 대수적인 구조에 대한 이해를 시킬 수 있는 교육이 필요하다. 해석학영역에서는 계산위주의 미적분학 학습에서 벗어나 다양한 미적분학의 원리에 접근하도록 하여야 한다. 특히, 러시아가 적분학의 학습을 위해서 도입한 수학사적인 단계를 따라 거슬러 올라가면서 학습하여 나가는 학습의 형태도 우리에게 좋은 본보기가 될 수 있다. 미분법 그 자체보다도 그 한가지의 개념이 형성되기까지의 여러 가지 시행착오와 그에 따른 개념의 형성과 발전 등을 연대기적으로 학습하는 것은 학생들에게 수학에 대한 지속적인 흥미와 함께 수학에 대한 깊은 이해를 도울 수 있을 것이다. 기하학영역에서는 내용의 분량면에서 상대적으로 다른 영역에 비해 적은 편이다. 중학교에서 배우는 유클리드 기하학에 엄밀성을 강화한 내용의 도입과 가장 큰 수학적 사건중의 하나인 비유클리드기하의 원리와 모형에 대한 소개도 요구된다. 지금의 해석기하학에 치중되어진 학습형태가 아니라 적당히 혼합되어진 형태의 교육과정의 운영이 필요하다.

넷째, 수학영재교육내에서의 컴퓨터의 도입이 필요하다.

다섯째, 수학영재교육의 정규교육과정 이외의 과외교육의 강화가 필요하다. 학생 개개인의 개별적인 수학적인 활동이 보장되어져야 한다. 지금의 수학반활동을 확대시켜 수학세미나 그룹의 결성, 주제별 토픽그룹의 형성, 수학내용의 토의활동, 개인연구학점의 신설 등으로 구체적인 과외 수학활동이 도입되어야 할 것이다.

여섯째, 수학영재교육을 운영하는 기관에서의 인식의 전환이 필요하다.

일곱째, 수학영재교육기관에서의 인식의 전환과 더불어 수학영재아들을 받아들이는 대학교 특히, 서울대학교에서의 인식의 전환이 더불어 요구된다. 다행히 서울대학교에서 극소수이기는 하지만 수학올림피아드 입상자에 대한 특별전형을 검토하고 있다는 것은 의미있는 일이다.(한겨레신문, 1996)

참 고 문 헌

고등학교 수학Ⅱ(상)(하) (1991). 검인정 8종류.

고등학교 일반수학 (1991).검인정 8종류.

문교부 (1990). 과학고등학교 교육과정 해설, 서울 : 국정교과서 주식회사.

서보억, 신현용 (1995). 한·소 수학교육과정 비교 연구, 한국수학교육학회 논문집 수학교육 제 34권 2호.

석용징, 신현성 (1992). 영재를 위한 수학과 교육과정의 시안 개발, 대한수학교육학회 논문집 제 2권 제 2호, 서울 : 대한수학교육학회.

이숙경, 신현용, 서보억 (1995). 한국과 러시아의 수학교과서 비교분석Ⅲ, 한국수학교육학회 논문집 수학교육 제 34권 1호.

이용곤, 신현용, 서보억 (1995). 한국과 러시아의 수학교과서 비교분석Ⅱ, 한국수학교육학회 논문집 수학교육 제 34권 1호.

정태범, 손인수, 이병진, 권이종, 권낙원, 단현국 (1989). 교육학개론, 서울 : 배영사.

최영한 (1994). 국제수학올림피아드에서 나타난 문제점과 결과 분석, 대한수학교육학회 논문집 제 4권 제 2호, 서울 : 대한수학교육학회

최정화, 신현용, 서보억 (1995). 한국과 러시아의 수학교과서 비교분석Ⅳ, 한국수학교육학회 논문집 수학교육 제 34권 1호.

한겨레신문 (1996). 한겨레신문 1996. 10. 6일자 기사.

한국교원대학교 수학교육연구소 (1993). 수학Ⅲ, 서울 : 대한교과서 주식회사.

한인기, 신현용, 서보억 (1995). 한국과 러시아의 수학교과서 비교분석Ⅰ, 한국수학교육학회 논문집 수학교육 제 34권 1호.

홍창기 (1988). 과학고등학교의 교육, 서울 : 배영사

Guilford, J.P. (1967). The Nature of Human Intelligence, New York : MaGraw-Hill Book Co.

NCSSM (1996). Mathematics Curriculum : Competency Goals ,Internet(http://ncssm.edu.).

NCTM (1987). Providing Opportunities for the Mathematically Gifted, K-12, Reston, Virginia : The Council.

Renzulli, J.S. (1978). What makes giftedness? Reexamining a definition, Phi Delta Kappa, 60-3.

Sisk, D. (1984). An International Perspective on Gifted and Talented Programs, A commissioned paper, contained in EC162812.

Thomas, J. C. (1975). Dynamics of Teaching Secondary School Mathematics, Boston : Houghton Milflin Co.

Колмогоров,А.Н. Д.Р (1981). ФМШ при МГУ, Москва : Знание.

МГУ (1995). Плограмы по Математике, Школа Имени академика Андрея Колмогорова, Москва : МГУ.

МГУ. (1994). Плограмы по Математике, Москва : МГУ

Олехник,С.Н (1991). НЕСТАНДАРТНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕН ИЯ УРАВЕННИЙ И НЕРАВЕНСТВ, МОСКВА : МГУ.

Понтрягин,Л.С. (1988). Дифференчиальные Уравени я и Их Приложения, МОСКВА : НАУКА.

Понтрягин,Л.С. (1988). Метод Коодинат, МОСКВА : НАУКА.