韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
1996. 6. 제 35권, 제 1호, 101-107.

Journal of the Korea Society of Mathematical Education
Series A: Dec. 1996, Vol. 35, No. 1, 101-107.

교과과정상의 미분의 개념에 관한 대수적 고찰

연용호, 이상한, 임성모, 한재영 (충북대학교)

I. 서 론

이 논문은 Leibnitz rules을 만족하는 사상으로 정의된 미분의 개념을 대수적인 관점에서 고찰하는데 목적이 있다. 교과과정에서는 해석학적인 방법으로 전개되고 있는 미분과 적분의 개념과 의의를 대수적인 측면에서 고찰하고자 한다. 미분의 성질은 극히 기본적인 것 이외에는 Leibnitz rules에 의하여 유도된다. 교과과정에서는 해석학적인 측면에서 미분과 적분을 정의하여 미분규칙을 유도하고, 이를 활용하는데 주안점을 두고 있다. 다항식의 항 (x^n)의 미분은 극한의 개념으로 유도되며 $(x^n)' = nx^{n-1}$이다. 이러한 미분을 다항식의 보통미분(usual derivation)이라 한다. 다항식의 미분은 이것만 있는 것은 아니다. 적당한 다항식 $l(x)$가 존재하여 $\delta(x^n) = nx^{n-1}l(x)$로 주어진 선형사상 δ도 하나의 미분이다. 어떤 미분이든 보통미분에 의하여 표시되므로 고교 교과과정에서는 보통미분만을 다루고 있다. 다항식환의 텐서곱과 가군의 성질로부터 이들 범주내의 보편적 대상(universal object)의 존재를 확인하였다. 이 미분과 미분가군의 성질을 이용하여 보통미분, 미분, 국소미분 등의 상호관계를 규명하고자 한다.

II. 미분과 미분가군

정수환 $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, 유리수체 $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, 실수체 $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, 복소수체 $(\mathbb{C}, +, \cdot)$은 수체계를 이루는 기본구조들이다. 이러한 구조체계 이외에도 많은 것들이 존재한다. Gauss 정수환 $\mathbb{Z}[i]$, $\mathbb{Q}$위의 이차체 $(\mathbb{Q}(\sqrt{m}, +, \cdot))$, 비가환인 4원수체 $Q = \{a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$ 등이 있다. 실변수 실함수 $\mathbb{R}[x]$, 실변수 유리함수 $\mathbb{R}(x)$의 도함수 $f' = df/dx$에 관한 기본성질은 다음과 같다.

(1) $(f(x)g(x))' = g(x)f'(x) + f(x)g'(x)$
[Leibnitz rules]

(2) $(f(x)/g(x))' = \dfrac{(g(x)f'(x) - f(x)g'(x))}{g(x)^2}$, $g(x) \neq 0$

여기서

$$f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

(1)의 조건은 $f(x)g(x)$의 미분이 $g(x)f'(x)$와 $f(x)g'(x)$의 두 부분으로 나누어 더하여짐을 의미한다. 다음은 사상의 준동형성을 뜻하는 것으로 미분과 구별된다.

$$\alpha(xy) = \alpha(x)\alpha(y)$$

환 R위의 다원환 A와 A-가군 M에 관한 대수적 미분의 정의를 일반화하여 보자. A가 가환환이면 A-좌가군 M은 $am = ma$, $a \in A$, $m \in M$에 의하여 A-우가군을 이룬다. A에서 M로의 R-선형사상 d가 모든 $a, b \in A$에 대하여 $d(ab) = ad(b) + bd(a)$를 만족할 때, 이를 A에서 M로의 미분이라 한다. A에서 M으로의 미분 전체의 집합을 $Der(A, M)$으로 표시한다. 그러면 $1^2 = 1 \cdot 1$

이므로

$$d(1)=0,\ d(r)=rd(1)=0,\ r\in R$$

이다. $A=M$ 이면 $Der(A,A)$ 를 $Der(A)$ 로 나타낸다. 소수 p 를 표수로 갖는 가환환 A 에 대하여

$$d(a^p)=pa^{p-1}d(a)=0.$$

따라서

$$dA^p=0$$

이다.

범주 $Der(A,M)$ 의 보편적 대상(universal oject)를 연구하여 보자. A 를 R-다원환, $A\otimes_R A$ 를 A 의 텐서다원환이라 하자. R-다원환 준동형사상 $\lambda_1,\lambda_2 : A \to A\otimes_R A$, 곱사상 $\pi : A\otimes_R A \to A$ 를 다음과 같이 정의하자. 모든 $a,b\in A$ 에 대하여

$$\lambda_1(a)=a\otimes 1,\ \lambda_2(a)=1\otimes a,$$

$$\pi(a\otimes b)=ab.$$

그러면 $A\otimes_R A$ 는 λ_1 에 의하여 A-가군을 이룬다. 즉,

$$\lambda_1(c)(a\otimes b)=(c\otimes 1)(a\otimes b)=ca\otimes b.$$

A 가 가환이면 $A=A^{op}$ 이므로

$$(a\otimes b)\lambda_1(c)=\lambda_1(c)(a\otimes b)$$

에 의하여 $A\otimes_R A$ 는 A-쌍가군이다. 이 때는 좌우가군의 곱이 같게 된다. 그런데 $A\otimes_R A$ 는 λ_1 에 의한 A-좌가군이고 λ_2 에 의한 A-우가군이다. 가군의 이러한 두 가지 성질을 가군의 범주(category)에서 다루어 보자.

곱사상 π 의 핵을 I 라 놓으면 $I^2, I/I^2$ 은 모두 λ_1 에 의하여 A-가군이다. A-가군 I/I^2 을 Kähler의 미분가군이라 하고 $\Omega_{A/R}$ 로 나타낸다. 자연준동형사상

$$\nu : A\otimes_R A \to (A\otimes_R A)/I^2,\ d^*=\lambda_2-\lambda_1$$

에 대하여 $d=\nu\cdot d^*$ 는 A 에서 $\Omega_{A/R}$ 로의 미분이다.

실제로 모든 $a,b\in A$ 에 대하여

$$\begin{aligned} d(ab) &= (\nu\cdot d)(ab)=\nu(d(ab)) \\ &= \nu(1\otimes(ab)-(ab)\otimes 1) \\ &= 1\otimes(ab)-(ab)\otimes 1+I^2 \\ &= (1\otimes a-a\otimes 1)b+a(1\otimes b-b\otimes 1)+I^2 \\ &= (1\otimes a-a\otimes 1+I^2)b+a(1\otimes b-b\otimes 1+I^2) \\ &= d(a)b+ad(b). \end{aligned}$$

그런데 $(A\otimes_R A)/I^2$ 은 λ_1 에 관한 A-가군이므로 모든 $a,b\in A$ 에 대하여

$$d(ab)=ad(b)+bd(a)$$

이다. $\lambda_1(A)=A\otimes 1$ 이므로

$$A\otimes_R A=\lambda_1(A)\oplus I,$$

$$(A\otimes_R A)/I^2=A\otimes_R\Omega_{A/R}$$

이 성립한다.

정리 1. A가 R-가환다원환, M이 임의의 A-가군이면 A의 미분범주 $(\Omega_{A/R}, d)$ 내에서 $(\Omega_{A/R}, d)$는 보편적 대상(universal object)이다.

[증명] $A\otimes_R A$ 의 원은

$$\begin{aligned} x\otimes y &= xy\otimes 1+x(1\otimes y-y\otimes 1) \\ &= xy\otimes 1+xd^*(y) \end{aligned}$$

이므로 $x\otimes y\in I$ 이면

$$x\otimes y=xd^*(y).$$

$\sum x_i\otimes y_i\in I$ 에 대하여

$$\sum x_i\otimes y_i=\sum x_i d^*y,\ \ d^*y+I^2=dy$$

이므로

$$\Omega_{A/R}=I/I^2=\{\sum x_i dy_i \mid x_i, y_i\in A\}.$$

즉, Ω는 $\{dy \mid y \in A\}$에 의하여 생성된 A-가군이다. 이러한 사실에서 임의의 미분가군과 미분의 쌍 (M, δ)에 대하여 $f \cdot d = \delta$가 되는 A-선형화사상 $f: \Omega \to M$이 유일하게 존재함을 알 수 있다. A-가군으로서 $Der(A, M)$과 $Hom_A(\Omega_{A/R}, M)$은 동형관계에 있다.

따름정리 1. A가 환 R위의 변수 $x_1, x_2, \cdots, x_n$의 다항식환이면 $A = R[x_1, x_2, \cdots, x_n]$의 보편적 미분가군 $\Omega_{A/R}$은 $\{dx_1, dx_2, \cdots, dx_n\}$에 의하여 생성된 A-가군이다.

[증명] $A = R[x_1, \cdots, x_n]$이라 하면 $\sum g_i dx_i$일 때 모든 $g_i = 0$임을 보이자. 편미분 $\partial/\partial x_i \in Der_R(A)$에 대하여 $(f \cdot d)(x_j) = \partial x_j/\partial x_i$가 되는 A-준동형사상 $f: \Omega_{A/R} \to A$가 존재한다. $f(\sum g_i dx_i) = \sum f(g_i dx_i) = \sum g_i (f dx_i) = \sum g_i \delta_i^j = 0$에서 모든 $g_i = 0$.

즉, $\{dx_1, \cdots, dx_n\}$은 A 위에서 일차독립이다.

A가 가환인 다원환일지라도 $A \otimes_R A$은 A-쌍가군으로 다음의 관계를 갖는다.

$\lambda_1(a)(c \otimes d) = (a \otimes 1)(c \otimes d) = ac \otimes d,$

$(c \otimes d)\lambda_2(a) = (c \otimes d)(1 \otimes a) = c \otimes da.$

그러므로 $\lambda_1(a)(c \otimes d) = (c \otimes d)\lambda_2(a)$일 필요는 없게된다. 이러한 문제를 극복하기 위하여 미분의 개념을 확장하여 보자.

R을 단위원 1을 갖는 가환환, A를 유니타리 R-다원환이라 하자. 모든 $a, b \in A$, $m \in M$에 대하여 $(am)b = a(mb)$를 만족하는 A-좌우가군 M을 A-쌍가군이라 한다. 쌍가군 M은 $A \otimes_R A^{op}$에 관한 좌가군이다. 여기서 A^{op}는 $a * b = ba$를 곱으로 갖는 다원환이다.

정의 1. 다원환 A에 관한 미분과 쌍미분가군 M의 쌍 (M, d), (N, δ)에 대한 A-쌍가군 준동형사상 $f: (M, d) \to (N, \delta)$가 $f \cdot d = \delta$를 만족할 때, f를 미분가군 준동형사상이라 한다. 일대일이고 전사인 미분가군 준동형사상을 미분가군 동형사상이라 한다. 다원환 A의 미분가군과 미분의 쌍 (U, d)가 있어서 임의의 미분가군과 미분의 쌍 (M, δ)에 대하여 미분가군 준동형사상 $f: (U, d) \to (M, \delta)$, $d \cdot f = \delta$이 일의적으로 존재할 때, (U, d)를 A의 보편적 미분가군과 보편적 미분이라 한다. 앞으로 (U, d)를 간단히 A의 보편적 미분가군이라 한다.

정리 2. 항등원 1을 갖고 있는 R-다원환 A의 텐서곱 $A \otimes_R A \otimes_R A$와 모든 $1 \otimes ab \otimes 1 - a \otimes b \otimes 1 - 1 \otimes a \otimes b$, $a, b \in A$에 의하여 생성된 A-쌍부분가군 J에 대하여 $U = (A \otimes_R A \otimes_R A)/J$, $d: A \to U$, $d(a) = 1 \otimes a \otimes 1 + J$, $a \in A$는 A의 보편적 미분가군과 보편적 미분이다.

[증명] R-다원환 $A \otimes_R A \otimes_R A$은

$$a(b \otimes c \otimes d) = (ab) \otimes c \otimes d,$$
$$(b \otimes c \otimes d)e = b \otimes c \otimes (de)$$

에 의하여 A-쌍가군이 된다. 모든 $a, b \in A$에 대하여

$$\begin{aligned} d(ab) &= 1 \otimes ab \otimes 1 + J \\ &= a \otimes b \otimes 1 + 1 \otimes a \otimes b + J \\ &= a(1 \otimes b \otimes 1 + J) + (1 \otimes a \otimes 1 + J)b \\ &= ad(b) + d(a)b. \end{aligned}$$

그러므로 $d: A \to U$는 미분이다. (U, d)의 보편성을 보이기 위하여 (M, δ)를 A의 임의의 미분가군이라 하자. $\phi': A \times A \times A \to M$을 $\phi'(a, b, c) = a\delta(b)c$, $a, b, c \in A$으로 정의된 사상이라 하고, ϕ'의 R-선형화사상을 ϕ_1이라 하자. 그러면 ϕ_1은 $J \subseteq \ker\phi_1$인 A-쌍가군 준동형사상이다. $\phi: U \to M$을 ϕ_1에 의하여 유도된 사상이라 하면 $\phi \cdot d = \delta$이다. U의 모든 원소는 $\sum a_i \otimes b_i \otimes c_i + J = \sum a_i d(b_i) c_i$의 꼴이므로 $dA = \{d(a) \mid a \in A\}$는 U의 기저이다. 따라서 (U, d)는 A의 미분과 미분가군의 범주 내에서 보편적 대상이다.

정리 3. 항등원 1을 갖고 있는 R-다원환 A의 곱사상 $\pi: A \otimes_R A \to A$, $\pi(a \otimes b) = ab$, $a, b \in A$의 핵을 $U = \ker\pi$라 하자. 사상 $d: A \to U$를 $d(a) = 1 \otimes a - a \otimes 1$, $a \in A$로 정의하면 (U, d)는 A의 보편적 미분가군이다.

[증명] A의 미분가군 M, 미분 δ에 대하여 $\phi': A \times A \to M$, $\phi'(a, b) = a\delta(b)$, $a, b \in A$의 R-선형화사상을 ϕ_1, $\phi_1|_U = \phi$라 하면 ϕ는 $\phi \cdot d = \delta$가 되는 A-쌍가군 준동형사상이다. 실제로 $\sum a_i \otimes b_i \in U$에 대하여

$$\begin{aligned}\sum a_i \otimes b_i &= \sum (a_i b_i \otimes 1 + (a_i \otimes 1)(1 \otimes b_i - b_i \otimes 1)) \\ &= \sum a_i b_i \otimes 1 + \sum a_i d(b_i) \\ &= \sum a_i d(b_i) = -\sum d(a_i) b_i.\end{aligned}$$

따라서 U는 $d(A) = \{da \mid a \in A\}$에 의하여 생성된 A-쌍미분가군이다. 즉, (U, d)는 A의 또 다른 하나의 보편적 대상이다.

기호집합 $X (\neq \emptyset)$ 위의 유한수열 전체의 집합 G_X는 수열의 곱을 병렬로 정의하면 공수열을 단위원으로 갖는 자유모노이드이다. X에서 어떤 모노이드 H로의 임의의 사상은 G_X에서 H로의 모노이드 준동형으로 일의적으로 확장 가능하다. 자유 R-다원환을 $RG_X = R[X]$라 하자. 그러면 X에서 어떤 R-다원환 A로의 임의의 사상은 $R[X]$에서 A로의 R-다원환 준동형사상으로 일의적으로 확장 가능하다하다. 이러한 성질을 $R[X]$의 미분에 적용하여 보자.

정리 4. 임의의 $x \in X$에 대하여 U_x를 $R[X] \otimes_R R[X]$와 동형인 $R[X]$-쌍미분가군이라 하고, $\phi_x: X \to U_x$를 다음과 같이 정의하자.

$$\phi_x(y) = \begin{cases} 1_x, & y = x, \\ 0, & y \neq x. \end{cases}$$

여기서 1_x는 $R[X] \otimes_R R[X]$의 단위원 $1 \otimes 1$에 대응하는 U_x의 원소이다. $U = \oplus_{x \in X} U_x$. $\phi = \sum_{x \in X} \phi_x$를 확장하는 유일한 미분을 $d: R[X] \to U$라 하면 (U, d)는 다항식환 $R[X]$의 보편적 미분가군이다.

[증명] 먼저 $\{\phi(x) \mid x \in X\}$가 $R[X]$-쌍가군 U의 기저임을 보이자. $p_x \in R[X] \otimes_R R[X]^{op}$에 대하여 $\sum_{x \in X} p_x \phi(x) = 0$이라 가정하자. 그러면

$$\begin{aligned}0 &= \sum_{x \in X} p_x \phi(x) = \sum_{x \in X} p_x \Big(\sum_{y \in X} \phi_y(x)\Big) \\ &= \sum_{x \in X} \sum_{y \in X} p_x \phi_y(x) = \sum_{x \in X} p_x 1_x \\ &= \sum_{x \in X} p_x.\end{aligned}$$

따라서 모든 $p_x = 0$이다. 이는 U가 U_x, $x \in X$의 직합이기 때문에 가능하다. 각 U_x가 $\phi_x(x)$

$=1_x$ 로 생성되므로 ϕX 는 U 의 생성원이다. 즉, ϕX 는 U 의 기저이다. X 의 자유모노이드인 G_X 에서 U 로의 사상을 다음과 같이 정의하자.

$$d'(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}x_1\cdots x_{i-1}\phi(x_i)x_{i+1}\cdots x_n.$$

그러면 d' 는 모든 $u,v\in G_X$ 에 대하여 $d'(uv)=d'(u)v+ud'(v)$ 를 만족하는 오직 하나의 사상이다. 다음과 같이 정의된 사상 d: $R[X]\to U$ 는 d' 를 확장하는 유일한 미분이다.

$$d(\sum_n\alpha_n x_1\cdots x_n)$$

$$=\sum_n\alpha_n(\sum_{i=1}^{n}x_1\cdots x_{i-1}\phi(x_i)x_{i+1}\cdots x_n).$$

이 때 $dX=\phi X$ 이므로 U 는 dX 를 기저로 갖는다. (M,δ) 를 $R[X]$ 의 어떤 미분가군과 미분의 쌍이라 하자. U 를 $R[X]\otimes R[X]^{op}$-가군으로 보고 다음과 같이 정의된 사상 f: $U\to M$ 을 생각하여 보자.

$$\sum_{x\in X}p_x\phi(x)\mapsto\sum_{x\in X}p_x\delta(x),$$

$$p_x\in R[x]\otimes_R R[x]^{op}.$$

그러면 f 는 $f\cdot d=\delta$ 를 만족하는 $R[X]\otimes R[X]^{op}$-가군 준동형사상이다. $\{\phi(x)\mid x\in X\}$ 가 U 의 기저이므로 이러한 조건을 만족하는 f 는 일의적으로 결정된다. 따라서 U 는 보편적 미분가군이고 d 는 보편적 미분이다.

따름정리 2. $R[x]$ 가 일변수 다항식이고 U 를 $R[x]\otimes_R R[x]$ 와 동형인 $R[x]\otimes_R R[x]$-좌우가군이라 하자. 다음과 같이 정의된 R-미분 d 는 $R[x]$ 의 보편적 미분이다.

$$d(x^n)=\sum_{i=1}^{n}x^{i-1}1_x x^{n-i},\quad n\geq 0$$

여기서 1_x 는 $R[x]\otimes_R R[x]$ 의 원 $1\otimes 1$ 에 대응하는 U 의 원이다.

체 F 위의 다항식환 $F[x]$ 는 가환이므로 $F[x]\otimes_F F[x]$ 도 가환 F-다원환이다. 그러나 $F[x]$-가군으로서 $x(1\otimes 1)=x\otimes 1$, $(1\otimes 1)x=1\otimes x$ 가 되므로 $x(1\otimes 1)=(1\otimes 1)x$ 일 필요는 없다. $U=R[x]\otimes_R R[x]$ 이면 보편적 미분 d: $R[x]\to U$ 는

$$d(x^n)=\sum_{i=1}^{n}x^{i-1}(1\otimes 1)x^{n-i}=\sum_{i=1}^{n}x^{i-1}\otimes x^{n-i}.$$

정리 5. 다항식 환 $R[x]$ 위의 임의의 미분 δ 에 대하여 $\delta(x^n)=nx^{n-1}l(x)$ 가 되는 적당한 다항식 $l(x)$ 가 존재한다. 이 $l(x)$ 는 δ 에 따라 결정되는 특수한 다항식이다.

[증명] 따름정리 2의 미분 d 와 미분가군 $U\cong R[x]\otimes_R R[x]$ 에 대하여 $f\cdot d=\delta$ 가 되는 $R[x]$-쌍가군 준동형사상 f : $U\to R[x]$ 가 오직 하나 존재한다. 이 때 $R[x]$ 는 $R[x]$-좌우가군으로 본 것이다. 보편적 대상의 정의에 의하여 이러한 f 는 단하나 존재하여

$$\begin{aligned}f(d(x^n))&=f(\sum_{i=1}^{n}x^{i-1}\otimes x^{n-i})\\&=f(\sum_{i=1}^{n}x^{i-1}(1\otimes 1)x^{n-i})\\&=\sum_{i=1}^{n}x^{i-1}f(1\otimes 1)x^{n-i}.\end{aligned}$$

그런데 x^{i-1}, x^{n-i}, $f(1\otimes 1)$ 은 모두 $R[x]$ 의 원이고 $R[x]$ 는 가환이므로

$$\begin{aligned}x^{i-1}f(1\otimes 1)x^{n-i}&=x^{i-1}x^{n-i}f(1\otimes 1)\\&=x^{n-1}f(1\otimes 1).\end{aligned}$$

모든 $n\geq 0$ 에 대하여 $\delta(x^n)=nx^{n-1}$

$f(1\otimes 1)$ 이므로 $f(1\otimes 1)=l(x)\in R[x]$ 로 놓으면,

$$\delta(x^n)=nx^{n-1}l(x)$$

이다. 다항식

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n\in R[x]$$

에 대하여

$$\begin{aligned}\delta(f) &= \delta(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n)\\ &= \delta(a_0)+a_1\delta(x)+\cdots+a_n\delta(x^n)\\ &= (a_1+2a_2x+\cdots+na_nx^{n-1})\,l(x)\\ &= f'(x)\,l(x),\quad l(x)\in R[x].\end{aligned}$$

정의 2. R-다원환 A 로부터 A-쌍가군 M 으로의 R-선형사상 $\sigma: A\to M$ 이 있어서 모든 $a\in A$ 에 대하여 $\delta_a(a)=\sigma(a)$ 가 되는 미분 $\delta_a: A\to M$ 이 존재할 때, σ 를 A 에서 M 로의 국소미분(local derivation)이라 한다.

정리 6. $\mathbf{C}(x)$ 를 복소수체 $\mathbf{C}$ 위의 유리함수로 이루어진 다원환이라 하면 $Der(\mathbf{C}(x))=\{\delta:\mathbf{C}(x)\to\mathbf{C}(x)\mid \delta(f)=lf',\ f\in\mathbf{C}(x),\ l\in\mathbf{C}(x)$ 는 적당한 다항식$\}$ 이 성립한다.

[증명] 사상 $\delta:\mathbf{C}(x)\to\mathbf{C}(x)$, $\delta(f)=lf'$ 라 놓자. 임의의 $a,b\in\mathbf{C}$, $f,g\in\mathbf{C}(x)$ 에 대하여

$$\begin{aligned}\delta(af+bg) &= l(af+bg)'\\ &= a(lf')+b(lg')\\ &= a\delta(f)+b\delta(g),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta(fg) &= l(fg)'=l(fg'+gf')\\ &= f(lg')+g(lf')=f\delta(g)+g\delta(f).\end{aligned}$$

역으로 $\delta\in Der(\mathbf{C}(x))$ 이면 $\delta(x)=l$ 이라 놓자. 그러면 $\delta(f)=\delta(x)f'=l(x)$. 따라서 δ 는 주어진 조건을 만족하는 사상이다.

정리 7. $\mathbf{C}(x)$ 의 국소미분은 상수에서의 값이 영인 선형사상이다. 또 이의 역도 성립한다.

[증명] $\alpha:\mathbf{C}(x)\to\mathbf{C}(x)$ 가 국소미분이고 $c\in\mathbf{C}$ 라 하자. $\delta_c(c)=\alpha(c)$ 인 $\mathbf{C}(x)$ 의 미분 δ_c가 존재한다. 상수 c 에서의 미분값은 항상 영이므로 $\alpha(c)=\delta_c(c)=0$. 따라서 $\alpha(\mathbf{C})=0$. 역으로 $\alpha:\mathbf{C}(x)\to\mathbf{C}(x)$ 가 상수에서의 값이 영인 $\mathbf{C}$-선형사상이라 하자. 상수에서의 모든 미분값은 영이므로 $\alpha(c)=\delta_c(c)=0$, $c\in\mathbf{C}$. $f\in\mathbf{C}(x)$ 가 상수다항식이 아니면 $f'\neq 0$이다. 이 때 $\delta_f(g)=(\alpha(f)/f')g'$, $g\in\mathbf{C}(x)$ 라 놓으면 $\delta_f:\mathbf{C}(x)\to\mathbf{C}(x)$ 는 $\delta_f(f)=\alpha(f)$ 가 되는 미분이다. 그러므로 α 는 $\mathbf{C}(x)$ 의 국소미분이다.

미분이 아닌 $\mathbf{C}(x)$ 의 국소미분이 존재한다. $\mathbf{C}$ 위의 벡터공간 $\mathbf{C}(x)$ 의 2차원부분공간 $X=\langle 1,x\rangle$와 $X^{\perp}=Y$에 대하여 X 에 따르는 Y 위에서의 $\mathbf{C}(x)$ 의 정사영은 국소미분이나 미분은 아니다. 또 복소수 $\mathbf{C}$ 위의 3차원다원환 $\mathbf{C}[x]/[x^3]$ 의 국소미분은 미분이 되지 않는다.

정리 8. 국소미분 $\alpha:\mathbf{C}[x]\to\mathbf{C}[x]$ 가 미분이 될 필요충분조건은 $f_i\cdot d=\delta_i$, $\delta_i=\delta_{x^i}$, $i\geq 0$ 이 되는 $\mathbf{C}[x]$-쌍가군 준동형사상 f_i 가 모두 같게 되는 것이다.

[증명] 모든 $i\geq 0$ 에 대하여 $\alpha(x^i)=\delta_i(x^i)$ 가 되는 미분 $\delta_i:\mathbf{C}[x]\to\mathbf{C}[x]$ 가 존재한다. α 가

미분이면 모든 δ_i는 미분이므로 따름정리 2에 의하여 $f_i \cdot d = \delta_i$가 되는 $C(x)$-쌍가군 준동형 f_i가 존재하여 $f_i(1_x)$의 값에 의하여 완전히 결정된다. 모든 $\delta_i = \alpha$이면 모든 $f_i = f$이다. 역으로 모든 f_i가 같으면 모든 δ_i는 α와 같다. 따라서 α는 미분이다. R. V. Kadison [8]에 의하면 $C[x]$의 모든 국소미분은 미분이다. 따라서 모든 $\delta_i(x^i) = \alpha(x^i)$인 선형사상 α에 대하여 $f_i = f$로 일정하다.

3. 제 언

Leibnitz rules를 만족하는 선형사상을 (대수적)미분이라 정의하면 편리한 점이 많다. 항 x^n의 보통미분 $(x^n)'$를 $d(x^n)$으로 나타내면

$$(x^n)' = nx^{n-1},\ d(x^n) = nx^{n-1}d(x)$$

에서 $d(x) = 1$이다. 미분의 정의를 만족하는 사상은 이것 이외에도 많이 있으므로 $\delta(x) \neq 1$일 수 있다. 보편적 미분과 미분가군의 성질로 부터 $\delta(x)$의 값이 정해지면 $\delta(x^n) = (x^n)'\delta(x)$, $\delta(f(x)) = f'(x)\delta(x)$의 값을 알 수 있다. 이러한 관점으로 볼때 고교 교과과정에서는 $\delta(x) = 1$로 정해주면 충분하다. 미분의 집합

$$\{\delta_1, \cdots, \delta_n \mid \delta_i = \delta_{x^i},\ i = 1, \cdots, n\}$$

에 대하여 $\delta_i(x^i) = \alpha(x_i)$가 되는 선형사상 α와 미분들의 관계를 밝히는데 미분자체보다 미분집합족의 성격을 규명하였다. 수학적 개념의 유도에 이어 그로부터 얻어지는 대수적 규칙의 활용능력을 기르는데 학교교육의 중요성도 강조되어야 한다. 교과과정의 각 항목은 별개의 것이 아니라, 상호 관련성 때문에 함께 편성된 것이다.

예를 들어 2×2행렬은 미분의 개념과 대수적으로 상통하다는 것에 기반을 두고 있다. 교과과정의 편성과 수업은 그 내용의 활용도와 이론적 배경에 유의할 필요가 있다. 각 항목에 따른 논리적 뒷받침을 확고히 하는 것은 매우 중요한 일이라 생각한다. 이 논문이 이러한 요구에 어느 정도 부응하길 기대한다.

참 고 문 헌

Kovacs, A. (1979). On derivations in prime rings and a question of Herstein. Can. Math. bull. 22(3). 339-344.

Bergman, G. M. (1975). On universal derivations. J of A 36. 193-211.

Herstein, I. N. (1979). Center-like elements in prime rings. J of A 60. 567-574.

Han, J. Y. (1987). On universal derivation modules. J of Math. Education Korea. 115. 51-55.

Smith, L. (1972). On two-sided Artinian quotient rings. Glasgow. 13. 159-163.

Zariski, O., Samual, P. (1960). Commutative Algebras. Von. Nost.

Pierce, R. S. (1982). Associative algebras. Springer-Verlag. New York Heidelberg Berlin.

Kadison, R. V. (1990). Local derivation. J of A 130. 494-509.

Lang, S. (1961). Algebras. Addison-Wesley. London.

Wallace, S. (1969). 3rd. Martindal. Prime rings satisfying a generalized polynomial identity. J of A 12. 576-584.

Hungerford, T. W. (1980). Algebra. Springer - Verlag. New York Heidelberg Berlin.