韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
1996. 6. 제 35권, 제 1호, 95-99.

Journal of the Korea Society of Mathematical Education
Series A: Jun. 1996, Vol. 35, No. 1, 95-99.

러시아 꼴모그로프 영재학교에서의 수학교육

꼼바로프 A. (모스크바 대학 교수)
한 인 기 (모스크바 국립 사범대 박사과정)

러시아 영재 교육에 있어서, 가장 깊은 역사를 가진 중등학교 중에서 하나가 꼴모그로프 영재학교이다. "꼴모그로프"는 러시아에서 가장 위대한 현대 수학자의 이름이다. 순수 수학 분야에서뿐만 아니라 수학 교육에 있어서도 큰 업적을 남겼고, 영재 학교 설립에 중요한 역할을 했을 뿐만 아니라 그 학교에서 직접 학생들에게 수학을 가르쳤었다. 이 학교는 10, 11학년의 두 학년으로 구성되어 있고, 각 학년은 세 학급으로, 그리고 각 학급마다 20 - 25명의 학생들이 공부를 하고 있다. 졸업 후에는 대학을 진학하게 된다는 측면에서는 우리 나라의 고등학교와 그 성격을 같이 하고 있다.

I. 꼴모그로프 학교의 수학 교수 - 학습 체계

러시아의 영재교육에 있어서, 결정적인 발전이 이루어졌는데, 1936년 모스크바 대학교에 처음으로 수학 동아리가 생겨났다. 이때 동아리 활동은 슈끌야르스키에 의해 지도되었으며, 이러한 동아리 활동은 지금까지 계속되고 있으며, 수학자들이나 수학교육자들이 중심이 되어 수학에 관심이 있는 아동들을 지도하고 있다. 수학 동아리에서의 슈끌야르스키 교수-학습 방법은 지금까지 수학 우수 아동의 지도에 있어서 큰 영향을 끼치고 있으며, 꼴모그로프 학교와 수학 특수 학급의 수학 교수법의 근간을 이루었다.

우선, 교사는 큰 강의실에서 한 반 혹은 두 반의 학생들을 대상으로 30 - 40분 정도의 강의를 하는데, 이때, 기본적인 정의, 정리들이 제시하며, 학습자들이 흥미를 느낄 수 있도록 한다. 그 후에, 학생들은 학급 별로 분산되어 두 시간의 세미나가 진행되고, 이 세미나 시간에는 학급 별로 두 명의 교사가 배정된다. 이때는 첫째, 강의에서 제시된 내용이 다시 한번 토론되고, 둘째, 강의에서 제시된 정의, 정리들을 정교화하는 특별히 선정된 문제들을 푼다. 이 문제들은 어떤 사이클을 형성하고, 학습자가 문제 풀이에 성공하면 그보다 더 심화된 문제들을 계속해서 제시해 준다. 이때, 학습자들은 처음에는 자신이 생각한 풀이를 교사에게 이야기하고, 만약 이 풀이가 성공적이라면, 다시 한번 자신의 학급에서 이것을 이야기한다.

꼴모그로프 영재학교에서는 모스크바 대학의 교수들이 학생들을 지도하고 있다. 약 60년 전에 모스크바 대학과 레닌그라드(지금의 싼 뻬쩨르부르그) 대학의 수학자들이 대학 교수들이 중등학교에서 지도하는 것의 필요성에 대한 결론에 이끌어 냈으며, 지금까지 많은 유명한 수학자, 교육학자들이 대학에서 가르치는 것뿐만 아니라 실제로 초·중등 학교에서 아동들을 가르쳤고, 지금도 가르치고 있다. 이러한 것에 대해서는 여러 가지 해석을 내릴 수 있는데, 예를 들면, 수학을 학문으로써 깊이 있게 가르치는 것을 대학에서부터 시작한다는 것은 수학자의 양성하는 것에 대한 책임을 모두 대학에 전가해 버린다는 해석이 가능하다. 게다가, 아동들의 수학에 대한 흥미가 13 - 14세 정도에 최고조에 달한다는 꼴모그로프의 주장을 상기해 본다면 재능 있는 아동들의 수학에 대한 흥미 유

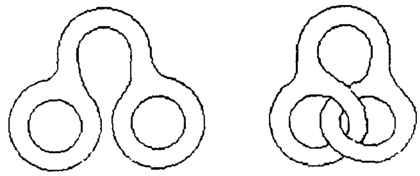
발이나 순수 수학 자체에 대한 방향 제시 등과 관련해서 대학 교수들이 중등학교에서 가르치는 것은 매우 의미 있는 일이다. 그리고, 수학을 전공하는 많은 사람들의 경우를 살펴보면, 그들은 이미 중등학교 시절에 수학자들에게서 지도를 받았거나, 대학교에서 운영하는 수학 동아리 활동 등을 통해서 수학에 관심을 가지고 공부를 하여, 대학교의 수학과에 진학해서 계속적인 연구를 수행했다는 것을 알 수 있다.

II. 학습자의 수학적 재능 개발

꼴모그로프는 수학적 재능을 구성하는 세 가지의 요소를 추출해 냈는데, 기하학적, 논리적, 그리고 알고리즘적 요소 등이다. 기하학적 재능은 공간적 표상, 그리고 수학 문제를 풀 때 기하학적 직관 매체(첫눈에 보면, 기하학과 동떨어 보일 지도 모르는)의 도입 등과 관계된다. 논리적 재능은 순차적으로 정확하게 논리적 고찰을 하는 것, 즉 문제를 풀 때, 경제적이고 모순되지 않는 모델을 생각해 내는 능력, 귀류법으로 증명을 하는 능력, 직접적인 그리고 그것에 대한 역 논증을 하는 능력을 의미한다. 마지막으로, 알고리즘적인 재능은 예를 들어, 인수분해를 할 때, 방정식을 풀 때, 식을 변환할 때 나타나는 재능을 말한다. 이러한 생각들에서 출발하여, 꼴모그로프 영재학교에서는 적합한 문제를 선정하고, 이러한 재능을 개발할 수 있는 교수법을 만들어 내고, 수학적 재능의 모든 요소들의 개발에 항상 주의를 기울이고 있다.

특수 학교에서의 기본적인 교수법 원리 중의 하나는 무엇보다도 사고력을 개발하는 것이고, 이러한 것들은 학생들의 연령에 맞는 내용들을 통해서 이루어진다. 지금까지, 풍부한 자료들이 축적되어 있으며, 슈끝야르스끼 체제를 이용하여 학생들 개개인에게 많은 양의 개인 학습 과제를 제시하고 있으며, 이를 통해서 학습자의 적극적인 개인 활동의 원리가 실현되고 있다.

중등학교 과정에서 고등수학의 내용들을 도입하는 데에 있어서는 매우 조심해야 한다. 경험상으로 보면, 이때 많은 경우에 있어서, 학습자들은 그 내용의 본질을 이해하지 못하고, 단지 계산 알고리즘만을 기억하는 경우가 발생하기 때문이다. 그러나, 수학 우수 아동들에게 현대 수학의 영역들을 알게 하는 것은 매우 중요하기 때문에, 수업 시간에 이러한 내용의 도입 또한 매우 중요하다. 이러한 것들은 고등 수학의 내용을 제시하는 것만을 통해서 이루어지는 것은 아니다. 즉, 아주 간단한 예를 통해서 현대 수학의 중요한 영역들과 관계되는 어려운 개념들을 도입하고 학습자들을 개발시킬 수 있다. 예를 들면, 그림 1에 제시된 물체가 구부러질 수 있는 유연성 있는 것으로 만들어졌다면, 그림 1을 변형시켜서 그림 2와 같은 형태로 만들 수 있다는 것을 증명하라는 문제를 생각해 보자.



<그림 1> <그림 2>

이 문제는 국민학교 아동들에게도 이해가 되는 것이다. 이러한 문제를 통해서 학습자들에게 위상학적인 발견술, 동형성에 대한 개념으로 유도하고, 위상기하학의 기초 개념들에 대한 연구를 유발시킬 수 있다. 특히, 위상수학 분야는 엄밀한 정의들이 학생들에게 큰 부담을 준다는 것을 생각해 본다면, 이러한 문제를 통한 접근은 학생들에게 큰 도움을 줄 것으로 기대된다.

III. 교사와 학생의 관계

학습자의 수학적 재능의 개발은 전적으로 교사 개인에 달려있다. 만약 학생이 그에게 관심

이 없다면, 자신의 가능성의 성장을 느끼지 못한다면, 그들은 수학을 깊게 공부하지 않을 것이다. 그렇기 때문에 교사의 권위는 높아야 한다. 이 말은 교사는 자신의 교과에 대해서 알아야 하고, 문제를 풀 수 있어야 하고, 학생들의 예상치 않은 질문에 정확히 반응을 할 수 있어야 한다는 것을 의미한다.

그러나, 동시에 학습자의 재능을 개발하기 위해서 교사는 자신의 박식함이나 지식으로 학습자들을 억누르면 안된다. 즉, 교사-학생의 경쟁에서 가끔씩은 학생이 이겨야 하고, 좋은 교사가 되기 위해서는 약간은 배우 기질이 있어야 한다. 유명한 러시아의 수학자 루진의 일화를 예로 들어보겠다. "해석의 기초" 라는 교과에서 그는 두 유리수의 합이 무리수가 된다는 정리를 제시하고, 그것을 증명하기 시작한다. 그러나, 강의는 끝나고, 정리는 덜 증명된 상태로 남는다. 다음 강의에서 복잡한 토론이 계속되지만 필요한 증명은 얻지 못하고, 결국, 이 정리는 틀린 것이라는 학생의 확신이 없는 목소리가 나온다. 그는 그 학생을 칠판으로 불러세우고, 그때 그러한 예를 제시한다. 그리고 나서, 루진은 배우와 같은 제스추어를 취하면서, 그 학생을 칭찬하고, 다음과 같이 말한다 : "우리는 왜 이전에 이것을 알아채지 못했을까?"

꼴모그로프 영재학교에서는 수학 교과서와 문제집에 대한 비판적인 태도가 장려된다. 그러나, 이것은 우리가 책을 가지고 공부하는 것의 필요성을 부정하는 것은 아니고, 수학책, 수학적인 문장에는 가끔 수학적인 오류가 있고 학생들이 빨리 이것을 알아챌수록, 그들의 수학적 개발에 있어서는 유익하다는 것을 의미한다. 몇 가지 예를 들어보기로 하자.

1. $\log_{\frac{x}{y}}(x^7) = \log_{\sqrt{y}}\frac{y}{x}$일 때

$$\log_{\frac{x}{y}} x^2 + \log_{\frac{y}{x}} y^2 \log_{\frac{x}{y}} x^2$$

을 계산하여라.

시험 위원회에서 제시된 해답 : $\frac{3}{7}$, 정답 : 그러한 x, y는 존재하지 않는다.

이 문제는 모스크바 대학교의 입학 시험 중에서 한 문제이고, 이 문제는 수험생들에게 엄청난 심리적인 부담을 주었다. 수험생들은 이 문제가 잘못된 문제라는 것을 생각하지 못했기 때문에 소중한 시간을 허비하면서 자신의 계산을 재차 확인해야 했다. 그러나, 꼴모그로프 학교의 졸업생들은 이러한 상황에 슬기롭게 대처할 수 있었다.

2. 사다리꼴 ABCD에서 BC ∥ AD, AB = CD, AB = 7, AD = 6, AM : MD = 1 : 3, CN : ND = 4 : 3이다. BC의 길이를 구하여라.

이 문제는 1988년 모스크바 대학교의 언어학부의 입학시험에 출제되었다. 이것은 아주 평이한 문제였고, 풀이와 함께 많은 문제집에 출판되었다. 그러나, 약간만 생각해 본다면, 그러한 사다리꼴은 존재하지 않는다는 것을 쉽게 알 수 있다. 게다가, 이것을 우리 학교의 학생이 처음으로 발견하였다. 한편, 수학-물리 잡지인 "끄반트"에는 이 문제가 변형되어 실렸다. 그 이유는 끄반트에 삽화를 넣는 삽화가가 편집자에게 이 사다리꼴을 작도할 수 없다고 말했다고 한다.

IV. 수학 경시대회

러시아에서 치러지는 수학 경시대회의 유형을 소개하려고 한다. 수학교육에 대한 연구의 역사가 깊은 만큼 다양한 유형과 소재의 수학 문제들 또한 매우 많기 때문에 흥미 있는 수학 경시 대회의 유형이 많다.

(1) 수학 경기

우선 학급을 두 팀으로 나눈다. 교사는 미리 서로 다른 난이도의 문제들의 목록을 말하고,

이 목록을 각 팀에 전달한다. 팀별로 모여서, 일정한 시간 동안 같이 문제를 푼다. 그후에, 문제를 푼 팀들 중에서 한 팀이 다른 팀에게 목록에 있는 어떤 문제를 풀도록 하는 제안을 한다. 이때, 상대편은 이 문제를 푸는 것을 거절할 수 있고, 이때 문제를 제안한 팀에서 문제를 풀어 보여줘야 한다. 물론, 문제 풀이를 제안 받은 팀에서 문제를 풀 수도 있다. 그러나, 모든 경우에서, 만약 어떤 팀에서 한 학생이 칠판에 문제를 풀었다면, 다른 팀에서는 반드시, 그 문제 풀이의 타당성 여부에 대해서 이야기를 해야 한다.

모든 경우에서, 한 팀이 계속 경기를 진행해 나가지 못하면, 권리가 다른 팀에게로 넘어가고, 교사는 이 과정을 통제해 나가면서, 문제의 완전한 해결 후에는(교사의 도움으로 완전히 해결할 수도 있다), 두 팀에 점수를 부여한다. 이때, 점수는 칠판에 문제를 푼 팀뿐만 아니라, 그 문제 풀이 후에 문제 풀이에 대한 진지한 평가를 제시한 상대편에도 부여된다.

(2) 수학 시합

수학 경기와는 달리, 이것은 개인적인 경기이다. 이것은 실력이 충분히 비슷한 학급에서 수행하는 것이 권장된다. 학생들에게 몇 문제가 제시되고, 문제의 조건은 교사가 칠판에 쓰는데, 이때, 각 문제에 대해 점수가 옆에 제시된다. 문제의 풀이를 이야기하려면 학생은 즉시 자신의 손을 들어서 문제의 번호를 말한다. 만약 풀이가 맞았다면, 대답한 학생은 이에 상응하는 점수를 받는다. 만약 풀이가 틀렸다면, 문제의 점수가 더 높아지고, 이때 그 증가폭은 교사가 정한다. 물론, 틀린 학생에 대해서는 그 증가된 점수만큼 점수를 빼게 된다. 이 경기는 만약, 어떤 문제가 지나치게 어려운 것이라면 오랫동안 지연될 수 있다. 교사는 이러한 일이 발생되지 않도록 배려해야 한다. 학생들에게 준비된 풀이가 맞는 지에 대한 세심한 확인이 필요하다는 주의를 제시해야 한다. 그렇지 않으면, 학생들은 경기가 끝났는 데도 음수의 점수를 가지고 있을 수도 있다. 이 수학 시합을 통해서 학생들은 스스로를 통제하는 습관을 기른다.

(3) 수학 하키

이 경기는 특히 어린 학년의 학생들이 좋아한다. 두 팀이 참여하고, 각 팀은 5명의 학생으로 구성된다. 각 팀에는 골키퍼, 두 명의 수비, 두 명의 공격수가 있어야 한다. 교사는 계산 문제와 같은 평이한 문제들의 목록을 많이 가지고 있어야 하고, 각 문제의 풀이에 있어서, 학생들은 5분을 넘어서는 안된다. 경기가 시작될 때, 하키팩은 하키장의 중앙에 있고, 두 팀의 경기자들에게 목록에서 첫 번째 문제를 제시하는 것으로 시작된다. 빨리 정확한 풀이를 찾아내는 팀(가령, A팀이라고 하자)이 이기게 되고, 하키팩은 B팀 쪽으로 이동하게 된다.

이제, A팀의 공격수와 B팀의 수비수가 서로 맞서게 되고, 그들의 대결은 두 번째 문제를 통해서 해결된다. 누가 이기느냐에 따라, 하키팩은 중앙으로, 혹은 상대편 골키퍼 앞으로 이동하게 된다. 이제, A팀의 공격수와 B팀의 골키퍼와 맞서게 된다. 만약, 골키퍼가 다음 문제를 풀지 못하면, 하키 팩은 골문 안으로 들어가게 되고, 1:0으로 A팀이 앞서게 된다. 이 후에, 경기는 다시 중앙에서 시작된다.

(4) 수학 경매

교사는 특별한 탐구 문제들의 목록을 제시하고, 문제들은 중간 대답이 허용된다. 각 팀 혹은 각 학생은 같은 만큼의 재산을 받게 된다. 예를 들면, 1000마리의 코끼리. 그리고 나서, 교사가 주관하는 경매가 시작된다. 교사는 문제의 판매에 대해서 설명하고, 그것의 가격을 말한다 (예를 들면, 200마리의 코끼리). 이것은 승자가 받을 몫의 합이다. 경매 후에, 가장 많이 자신의 코끼리를 제시한 팀이 문제의 풀이에 대한 자신의 풀이를 말할 권리를 가진다. 그 다음에 한 번 풀이가 제시된 이 문제는 다시 경매에

붙여지고, 이번에 가장 많은 금액을 제시한 팀은 이전의 것보다 더 나은 풀이를 이야기할 수 있다. 그리고 나서, 다시 이 문제는 다시금 경매에 붙여지고, 이와 같은 과정은 모든 팀이 이 거래를 포기할 때까지 계속된다. 그 후에, 가장 훌륭한 풀이를 제시한 팀이 문제의 금액, 즉 200마리의 코끼리를 받게 된다. 나머지 팀들은 자신이 제시한 금액을 상실하게 된다. 만약, 승리자 팀에서 좀더 완전한 풀이를 이야기한다면, 그 팀은 추가적인 점수를 받게 된다.

(5) 모스크바 대학교 수학과의 올림피아드

매년 3월에 모스크바 대학교에서는 중학생, 고등학생들을 위한 경시대회를 개최한다. 이 올림피아드는 재능 있는 학생들을 모스크바 대학으로 유치하는 중요한 도구가 된다. 졸업반 학생들에게 있어서 이 올림피아드는 입학 필기 시험을 보지 않아도 되는 가능성을 제시하기 때문에 매우 중요한 의미를 가진다. 즉, 올림피아드 수상자들은 이 시험이 면제된다. 그러나, 구두 시험은 치러야 한다.

V. 조기 교육의 문제에 대하여

모스크바 대학에는 가끔씩 신동들(13-14살에 대학에 입학하는)을 가끔씩 볼 수 있습니다. 이러한 학생들은 중등학교 과정에 대한 시험에 합격하고, 중등교육에 대한 증명서를 취득한 후에, 대학에 입학하게 된다. 그 학생들은 항상 언론의 초점이 되어 왔고, 많은 사람들의 주목을 끌게 되는데, 그들에 대한 간단한 연구 결과를 소개하면, 그 학생들이 가지고 있는 수학적인 지식은 아주 형식적인 것으로써, 어린 학생들의 성과는 큰 의미를 가지지 못한다. 즉, 대체로 이러한 학생들은 대학교를 끝까지 다니지 않고, 중도에 그만 두는 경우가 많고, 게다가 공부를 계속하여 박사 과정에 진학해 연구를 계속 수행했다는 연구 결과를 보지 못했다.

이 결과는 무엇을 의미하는가? 이러한 학생들이 재능은 있지만, 그 재능이 교사나, 부모들의 전통인 방법의 틀 속에서 지나치게 일찍 다 그쳐지고, 개발되어, 재능이 쉽게 죽고만 것이다. 만약, 학교 교사들이 그 학생들의 기억 속에 새로운 사실들을 지나치게 많이 담는 대신에, 기초적인 수학 내용 중에서 어려운 문제들을 제시함으로써 사고 능력을 개발했다면, 결과는 달라졌을 것이라는 추측이 가능하다.