한국 CAD/CAM 학회 논문집
제 1 권 제 2 호 1996년 8월 pp. 158-162

베지어 곡면의 도메인 곡선의 이미지 곡선에 대한 베지어 조정점의 계산

신 하 용*

Bézier Control Points for the Image of a Domain Curve on a Bézier Surface

Ha-Yong Shin*

ABSTRACT

Algorithms to find the Bézier control points of the image of a Bézier domain curve on a Bézier surface are described. The diagonal image curve is analysed and the general linear case is transformed to the diagonal case. This proposed algorithm gives the closed form solution to find the control points of the image curve of a linear domain curve. If the domain curve is not linear, the image curve can be obtained by solving the system of linear equations.

Key words : Bézier control point, Curve on surface, Image curve

1. 서 론

매개변수곡면은 2차원 도메인공간에서 3차원 물체 공간(object space)으로의 사상이다. 대부분의 CAD/CAM 시스템들은 곡면의 표현을 위해 매개변수 부분곡면(trimmed parametric surface)을 사용한다. 매개변수 부분곡면은 곡면에 대한 매개변수식과 아울러 곡면의 경계를 나타내기위한 도메인상에서의 2차원 경계곡선(trimming boundary curve)으로 표현된다[1, 2, 3]. 곡면의 3차원 경계곡선은 2차원 경계곡선을 곡면위로 사상한 이미지곡선이 된다. 이러한 매개변수 부분곡면을 다루는 작업을 하다보면, 3차원 경계곡선(이미지곡선)에 대한 정확한 수식을 알고있으면 편리한 경우가 많이 있다. 본 논문에서는 곡면과 2차원 경계곡선이 모두 베지어 곡면/곡선으로 표현되어있는 경우에, 이미지 곡선에 대한 베지어 곡선식을 계산하는 방법을 다루고자 한다. 이미지 곡선의 기하학적 개념에 대해서는 참고문헌[4, 5, 6]등에 잘 설명되어 있다. 베지어 곡선/곡면은 모든 다항식 매개변수 곡선/곡면을 표현할 수 있을 뿐 아니라 다루기가 편해서 B-spline과 아울러 가장 널리 사용되는 표현법이다. 앞으로 특별한 언급이 없는 한 "곡선" 또는 "곡면"은 베지어 곡선 또는 베지어 곡면을 뜻한다.

함수 $f(t)$와 $g(t)$가 각각 n차 및 k차의 다항식이라 하면 복합함수 $f(g(t))$ 또한 nk차의 다항식이 된다. 따라서 도메인상의 2차원 베지어 곡선을 베지어 곡면에 사상한 이미지 곡선 또한 베지어 곡선이 됨은 자명하다. 도메인 곡선이 k차이고 곡면이 $m \times n$차라면 이미지 곡선은 $km + kn$차가 된다. (좀더 엄밀히 말하면 도메인곡선의 $u(t)$ 와 $v(t)$가 각각 k_1차 및 k_2차라면, 이미지곡선은 $k_1m + k_2n$ 차가 된다. 일반적으로 차수가 낮은 쪽의 차수를 올려서 $k_1 = k_2$이 되게 만들어 줄 수 있다. u값이 일정한 등매개변수곡선(iso-parametric curve)은 k_1=0, k_2=1인 경우이고 v값이 일정한 등매개변수 곡선은 k_1=1, k_2=0인 경우이다. 잘 알려져있듯이 이미지곡선의 일종인 등매개변수곡선에 대한 정확한 수식은 곡면의 식으로부터 손쉽게 구할 수 있다.)

본 논문은 약간의 수식을 기술하기위한 기호정의와 이미지곡선의 베지어 조정점계산을 위한 알고리즘으로 구성되어 있다. 이 알고리즘은 도메인의 대각선에 대한 이미지 곡선의 경우에서 시작해서 도메인상의 일반적인 직선에 대한 경우가 설명되고, 다음 절에는 임의의 차수의 도메인 곡선의 경우로 점차 일반화된다.

*종신회원, (주)큐빅테크 연구소

2. 기호 정의

본절에서는 앞으로 사용될 베지어 곡선/곡면에 관한 수식과 기호들을 아래의 식(1)-(5)에서 미리 정의해두고자 한다.

• Bernstein 다항식

$$B_i^n(u) = \binom{n}{i}(1-u)^{n-i}u^i \tag{1}$$

• 베지어 곡선

$$\mathbf{b}\ (t) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{b}_i\ B_i^n(t), \text{where } \mathbf{b}_i \text{ is the control point} \tag{2}$$

• 베지어 곡면

$$\mathbf{s}(u,v) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} \mathbf{b}_{ij}\, B_i^m(u)\, B_i^m(v), \text{ where } \mathbf{b}_{ij} \text{ is the control point} \tag{3}$$

• 1차 도메인 곡선 (도메인 상의 직선)

$$\mathbf{c}(t) = (1-t)\mathbf{u}_0 + t\mathbf{u}_1, \text{ where } \mathbf{u}_0 = (u_0, v_0) \text{ and } \mathbf{u}_1 = (u_1, v_1) \tag{4}$$

• 이미지 곡선

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{s}(\mathbf{c}(t)) = \sum_{i=0}^{d} \mathbf{r}_i\ B_i^d(t) \tag{5}$$

위의 식 (5)에 있는 이미지 곡선의 베지어 조정점 $\{\mathbf{r}_i, i=0..d\}$를 구하는 알고리즘을 다음절부터 설명하겠다.

3. 도메인 대각선에 대한 이미지 곡선

베지어 곡면의 도메인은 그림 1과 같은 단위 정사각형 영역이다. 도메인상의 일반적인 곡선에 대한 이미지 곡선은 복잡한 계산을 요하는 반면, 직선에 대한 이미지곡선은 다소 손쉽게 구할 수 있다. 특히 도메인 상의 직선중 그림 1에 나타낸 대각선의 경우는 가장 간단한 경우이고 일반적인 직선의 경우로 발전시키는데 매우 중요한 역할을 하므로, 대각선에 대해서 먼저 살펴보도록 하자. 그림 1에 있는 도메인 대각선에 대한 식은 $\mathbf{c}(t)=(t, t)$로 표현된다. 이 도메인 대각선에 대한 이미지곡선을 간단히 대각이미지곡선(Diagonal image curve)이라 하자. 우선 식(1)을 이용하여 약간의 정리과정을 거치면 두 Bernstein 다항식의 곱에 대한 식 (6)과 같은 항등식을 얻을 수 있다.

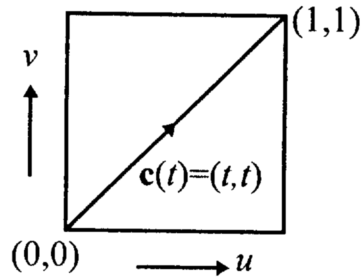


그림 1. 도메인 대각선.

$$\begin{aligned} B_i^m(t)B_j^n(t) &= \binom{m}{i}(1-t)^{m-i}t^i\binom{n}{j}(1-t)^{n-j}t^j \\ &= \binom{m}{i}\binom{n}{j}B_{i+j}^{m+n}(t) \Big/ \binom{m+n}{i+j} \end{aligned} \tag{6}$$

이제 곡면의 식 (3)에 (u, v) 대신 대각선의 식인 (t, t)를 넣고 식 (6)을 이용하여 정리하면

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) = \mathbf{s}(\mathbf{c}(t)) = \mathbf{s}(u, v) &= \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} \mathbf{b}_{ij}\ B_i^m(t)B_j^n(t) \\ &= \sum_{k=0}^{m+n}\sum_{i+j=k} \mathbf{b}_{ij}\ B_i^m(t)B_j^n(t) = \sum_{k=0}^{m+n}\sum_{i=0}^{k} \mathbf{b}_{i(k-i)}\ B_i^m(t)B_{k-i}^n(t) \\ &= \sum_{k=0}^{m+n}\left[\sum_{i=0}^{k} \mathbf{b}_{i(k-i)} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i} \Big/ \binom{m+n}{k}\right] B_k^{m+n}(t) \end{aligned} \tag{7}$$

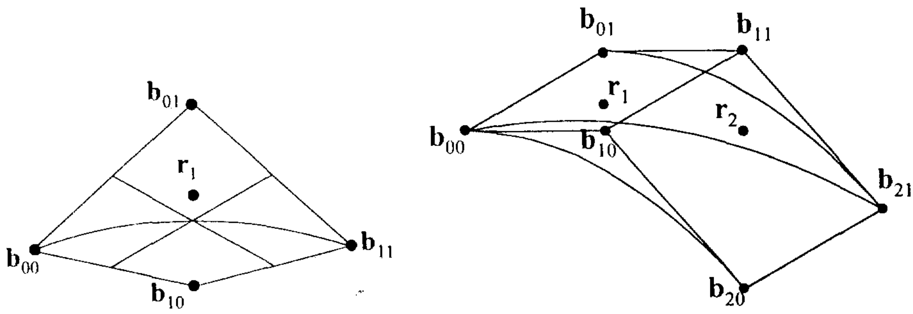
이 된다. 여기서 $i<0$ 또는 $i>n$인 경우에는 $\binom{n}{i}=0$으로 정의한다.

$$\mathbf{r}_k = \left[\sum_{i=0}^{k} \mathbf{b}_{i(k-i)} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i}\right] \Big/ \binom{m+n}{k} \tag{8}$$

이라고 두면, 식 (7)은

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{k=0}^{m+n} \mathbf{r}_k\ B_k^{m+n}(t) \tag{9}$$

이 된다. 따라서 식 (8)에 있는 $\mathbf{r}_k$가 대각이미지곡선의 베지어 조정점임을 알수 있다. 식 (8)에서 0이 되



(a) (b)

그림 2. 대각이미지곡선의 조정점: (a) bilinear 곡면, (b) m=2, n=1.

는 항을 제외하고 남는 부분만을 다시쓰면

$$\mathbf{r}_k = \left[\sum_{i=max(0,\,k-n)}^{min(m,k)} \mathbf{b}_{i(k-i)} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i} \right] \Big/ \binom{m+n}{k} \qquad (10)$$

이 된다. 위의 식 (10)에서 베지어 곡선의 처음과 끝 조정점인 $k=0$ 과 $k=m+n$인 경우를 계산해 보면

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{b}_{00},\ \mathbf{r}_{m+n} = \mathbf{b}_{mn} \qquad (11)$$

이된다. 이것은 대각이미지곡선의 양끝점은 곡면의 모서리점이라는 사실 (식 (12))에 잘 부합된다.

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0 = \mathbf{s}(0,0) = \mathbf{b}_{00},\ \mathbf{r}(1) = \mathbf{r}_{m+n} = \mathbf{s}(1,1) = \mathbf{b}_{mn} \qquad (12)$$

4. 대각이미지곡선의 예

식 (10)을 이용하여 곡면이 1×1 차 , 2×1 차, 2×2 차 등의 간단한 경우에 대각이미지곡선의 조정점을 계산해보면 다음의 식 (13)-(15)와 같이 된다.

• 경우 1: bilinear 곡면 (m=n=1)

$$\mathbf{r}_1 = (\mathbf{b}_{01} + \mathbf{b}_{10})/2 \qquad (13)$$

• 경우 2: quadratic-linear 곡면 (m=2, n=1)

$$\mathbf{r}_1 = (\mathbf{b}_{01} + 2\mathbf{b}_{10})/3$$
$$\mathbf{r}_2 = (2\mathbf{b}_{11} + \mathbf{b}_{20})/2 \qquad (14)$$

• 경우 3: biquadratic 곡면 (m=n=2)

$$\mathbf{r}_1 = (\mathbf{b}_{01} + \mathbf{b}_{10})/2$$

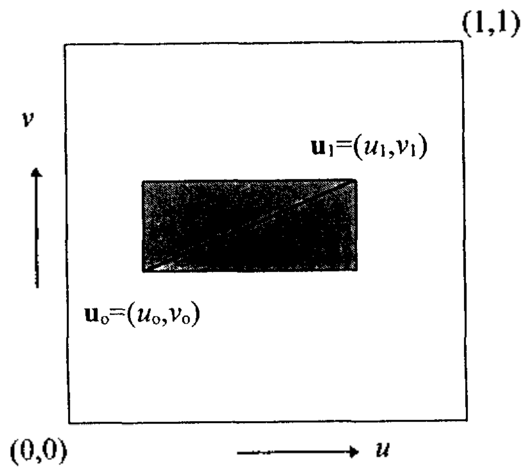


그림 3. $\mathbf{c}(t)$의 bounding box 와 subdomain.

$$\mathbf{r}_2 = (\mathbf{b}_{02} + 4\mathbf{b}_{11} + \mathbf{b}_{20})/6 \qquad (15)$$
$$\mathbf{r}_3 = (\mathbf{b}_{02} + \mathbf{b}_{20})/2$$

그림 2는 경우 1과 경우 2에 대한 예제이다.

5. 도메인상의 임의의 직선에 대한 이미지곡선

대각이미지곡선에서 한걸음 더 나아가 도메인상의 임의의 직선에 대한 이미지곡선의 경우를 생각해 보자. 일반적 도메인 직선의 식 (4)를 곡면식 (3)에 대입하여 앞서와 같은 방식으로 정리하는 것은 쉽지 않다. 따라서 본 절에서는 임의의 직선의 경우를 대각선의 경우로 변환하는 알고리즘을 제안한다.

도메인상에 임의의 직선이 그림 3과 같이 주어져 있다고 하자. 우선 $u_0 \le u_1$이고 $v_0 \le v_1$라고 가정하자.

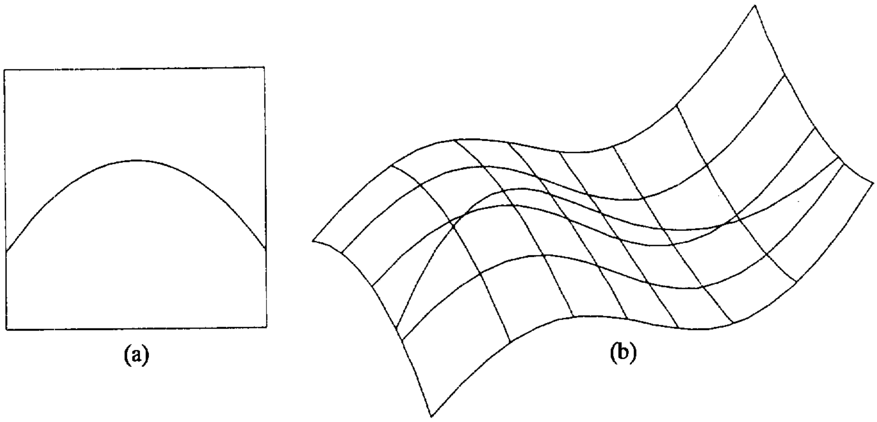


그림 4. 2차 도메인곡선 (a)에 대한 3×2차 곡면상의 이미지곡선 (b).

도메인직선 **c**(t)의 bounding box (그림 3에서 빗금친 영역)를 곡면 **s**(u,v)상에 사상하면 전체 곡면의 일부분인 일부곡면 (subpatch) **ss**(u,v)가 된다. 이 일부곡면 **ss**(u,v) 또한 베지어 곡면이고 이에 대한 식(조정점)은 베지어 곡면 분할 알고리즘을 이용하여 얻을 수 있다[1,3]. 이렇게 하여 얻어진 곡면 **ss**(u,v)는 단위정사각형 도메인을 갖게되고, 이제 직선 **c**(t)에 대한 원곡면 **s**(u,v)상의 이미지곡선 **r**(t)는 일부곡면 **ss**(u,v)상의 대각이미지곡선이 된다 (즉, **r**(t)=**s**(**c**(t))=**ss**(t,t)). 따라서 **r**(t)의 조정점은 곡면을 분할하여 **ss**(u,v)의 조정점을 구한 후, 앞의 식 (10)을 이용하여 구하면 된다. (**ss**(u,v)의 조정점을 구하는 방법은 참고문헌[3]등에 나와있으므로 본 논문에서는 다루지 않겠다.) 이제 만일 $u_0 > u_1$(또는 $v_0 > v_1$)인 경우에는 **ss**(u,v)에 대한 조정점을 구한 후, 그 조정점행렬의 순서를 u (또는 v) 방향으로 뒤집어줌으로써 $\mathbf{s}(\mathbf{u}_0) = \mathbf{ss}(0,0)$ 이고 $\mathbf{s}(\mathbf{u}_1) = \mathbf{ss}(1,1)$인 일부곡면 **ss**($u,v$)를 구할 수 있고, 따라서 또다시 **c**(t)의 이미지곡선 **r**(t)가 **ss**(u,v)의 대각이미지곡선이 된다.

6. 임의차수 도메인곡선에 대한 이미지곡선

만일 도메인곡선 **c**(t)가 1차곡선(직선)이 아니라면 직선의 경우와 같은 방법으로 해를 구하는 것은 대단히 어렵다. 왜냐하면 임의차수 도메인 곡선의 식을 곡면식 (3)에 대입하여도 손쉽게 정리되지 않기 때문이다. 따라서 이경우에는 앞서와 전혀 다른 접근 방법을 취하기로 한다.

s(u,v)가 $m \times n$차 곡면 , **c**(t)가 k차 곡선이라면 이미지곡선 **r**(t)의 차수는 $d = k(m+n)$이 된다는 점을 이용하자. **r**(t)는 또한 베지어 곡선이므로 **r**(t)에 대한 조정점 $\{\mathbf{r}_i,\ i=0..d\}$는 $(d+1)$개의 조건식으로부터 계산할 수 있다. 즉, 이미지 곡선이 곡면상에 놓인 d차의 베지어 곡선이므로 $(d+1)$개의 매개변수 값과 그에 해당하는 곡면상의 점들을 주고 그 조건들을 만족하는 d차의 베지어 곡선을 구하면 그것이 곧 이미지 곡선이 됨은 자명한 일이다.

이제 $t_i = i/d$, $\mathbf{u}_i = \mathbf{c}(t_i)$ 및 $\mathbf{s}_i = \mathbf{s}(\mathbf{u}_i)$라 하면 $\{\mathbf{r}(t_i) = \mathbf{s}_i,\ i = 0..d\}$를 만족하는 d차의 베지어 곡선 **r**(t)이 단 하나 존재하며 그것은 다음의 1차연립방정식 (16)을 $\mathbf{r}_i$에 대해서 풀면 된다.

$$\left\{ \sum_{i=0}^{d} \mathbf{r}_i B_i^d(t_i) = \mathbf{s}_i, \quad i = 0..d \right\} \tag{16}$$

위의 과정에서 $t_i = i/d$로 주는 대신 서로 다른 임의의 [0,1] 사이의 값을 주어도 된다. 이론적으로는 식 (16)이 해를 갖는 한 t_i들을 어떻게 주어도 정확히 같은 결과를 얻게 된다. 하지만 두개의 t_i가 같은 값을 갖는 경우에는 식 (16)은 중복적이되어 해를 구할 수 없다. 이것은 두개의 t_i가 서로 비슷한 값을 갖게 될 경우 그 해가 수치적으로 불안정해 질 수 있음을 의미하기도 한다. 따라서 계산상의 수치적 안정성을 위해 [0,1] 사이를 균등분할하여 $t_i = i/d$로 주는 것이 바람직하다고 판단된다.

다음의 그림 4는 2차 도메인곡선에 대한 3×2차

곡면상의 이미지곡선(10차)을 앞서 설명한 방법으로 구한 예이다.

위의 과정을 뒤집어서 정리해보면 다음과 같은 흥미있는 정리를 얻을 수 있다.

정리

$\mathbf{s}(u,v)$가 $m \times n$차의 베지어 곡면이고, 어떤 정수 k에 대해 $d=k(m+n)$라 하자. $\mathbf{s}(u,v)$ 상의 $(d+1)$개의 임의의 서로 다른 점들의 집합을 $\mathbf{S}=\{\mathbf{P}_i \in \mathbf{s},\ i=0..d\}$라 하고 $\mathbf{u}_i$는 점 $\mathbf{P}_i$에 대한 도메인상의 점(inverse image)이라 하자. 또한 $\mathbf{r}(t)$는 임의의 t_i에 대해서 $\{\mathbf{r}(t_i)=\mathbf{P}_i,\ i=0..d\}$를 만족하는 d차의 베지어 곡선이라 하자. 만일 $\mathbf{u}_i=\mathbf{c}(t_i)$를 만족하는 k차의 도메인곡선 $\mathbf{c}(t)$가 존재한다면 곡선 $\mathbf{r}(t)$는 $\{t_i,\ i=0..d\}$에서 뿐 아니라 모든 $t \in [0,1]$에서 곡면 $\mathbf{s}$상에 놓인다.

위의 정리는 앞서 밝힌 명제에 대한 대우 명제이므로 증명은 생략하겠다. 이 정리로 부터 "곡면상의 특정한 몇개의 점을 지나며 곡선전체가 곡면상에 완전히 놓이는 곡선을 찾는 문제"에 대한 해결의 실마리를 구할 수 있다. 그에 대한 알고리즘의 개요를 서술하면 다음과 같다.

1) 꼭 지나야 할 특정한 주어진 점들의 집합 $\{\mathbf{P}i\}$로 부터 그에 해당되는 inverse image $\{\mathbf{u}_i\}$를 찾는다.
2) $\{\mathbf{u}_i\}$를 보간하는 최소차수의 도메인곡선 $\mathbf{c}(t)$를 구한다.
3) $\mathbf{c}(t)$에 대한 이미지곡선 $\mathbf{r}(t)$를 구한다.

이에 대한 상세한 알고리즘은 본 논문의 범위를 벗어나므로 여기서 더이상 다루지 않겠다.

7. 결 론

본 논문에서는 곡면상의 이미지곡선에 대한 정확한 (근사적이 아닌) 수식을 구하는 과정을 정리하였다. 정확한 수식의 차수는 곡면의 차수와 도메인곡선의 차수의 곱이 되기때문에 차수가 너무 높아진다는 단점이 있고 이로 인해 실용적인 의미에서는 근사적 수식이 더 적합한 경우도 많다. 하지만 정확한 수식이 꼭 필요한 경우 또는 정확한 수식이 있으면 더 효율적으로 처리할 수 있는 경우도 있다. 이의 대표적인 예는 아이러니컬하게도 이미지곡선의 근사화과정으로, 정확한 수식을 갖고 있으면 더욱 빠르고 정밀도 높게 근사화 시킬 수 있다.

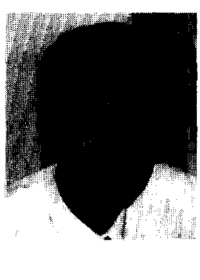
본 논문에서 제시한 임의차수곡선에 대한 알고리즘은 매우 간단할 뿐 아니라, 아주 기초적인 수학적 사실에 근거하고 있다. 물론 이것은 직선의 경우를 포함하기도 한다. 직선의 경우에 어떤 알고리즘이 효율적으로 우수한 가는 비교해보지 않았고, 오히려 일반적인 경우를 다루는 알고리즘이 우수할 수도 있다. 그럼에도 불구하고 본 논문에서 직선의 경우를 특별히 분리해서 취급한 것은 그 경우가 곡면상의 곡선(이미지곡선)의 본성에 대한 명확한 통찰력을 준다고 믿기 때문이다. 제 6절의 마지막 부분에 제시한 정리와 문제 및 대략적 알고리즘에 대해서는 추후에 더 연구가 필요할 것으로 보인다.

감사의 글

본 논문의 작성에 많은 도움을 주신 KAIST의 최병규교수님과 조수경씨, 한양대학교의 김덕수교수님께 깊은 감사드립니다. 또한 본 논문의 심사과정에서 많은 조언을 주신 심사위원 여러분께도 감사드립니다.

참고문헌

1. Farin, G, *Curves and surfaces for computer aided geometric design: a practical guide*, 3rd edition, Academic Press, pp.316-317, pp.293-294, 1993
2. Piegl, L and Richard, A.M., "Tessellating trimmed NURBS surfaces," *Computer-Aided Design*, Vol.27, No.1, pp.16-26, Jan. 1995
3. Choi, B.K, *Surface modeling for CAD/CAM*, Elsevier, pp.313-317, 1991
4. Zeid, I, *CAD/CAM theory and practice*, McGraw-Hill, p.314, 1991
5. Mortenson, M.E, *Geometric Modeling*, John Wiley & Sons, pp.230-233, 1985
6. Boehm, W and Prautzsch, H., *Geometric concepts for geometric design*, A.K. Peters, pp.366-374, 1994



신 하 용
1985년 서울대학교 산업공학과 학사
1987년 KAIST 산업공학과 석사
1991년 KAIST 산업공학과 박사
1991년~1993년 LG 생산기술원 선임연구원
1993년~현재 (주)큐빅테크 연구소 부소장/소장
관심분야 : 형상모델링, CAD/CAM, PDM, 시스템 모델링