

# 강도변조/직접검파 광통신 수신기에서 심벌간 간섭을 고려할 경우 타이밍 지터에 의한 전력 페널티 해석

正會員 은 수 정\*, 신 요 안\*, 김 부 균\*

## Analysis on Power Penalty Due to Timing Jitters When Considering Intersymbol Interference in the Receivers of Intensity Modulation/Direct Detection Optical Communication Systems

Soo-Jeong Eun\*, Yoan Shin\*, Boo-Gyoun Kim\* *Regular Members*

※본 논문은 기초전력공학공동연구소(과제번호: 95-지-9)의 지원에 의하여 연구되었음.

### 요 약

본 논문에서는 강도변조/직접검파 디지털 광통신 시스템에서 심벌간 간섭(intersymbol interference)을 최소화하기 위해 펄스 셰이핑 필터(pulse shaping filter)를 사용하는 경우에 있어, 타이밍 지터(timing jitter)의 영향에 의한 수신기의 성능 변화를 해석하는 새로운 방법을 제안한다. 제안된 해석 방법에 의한 결과는 기존의 해석 방법보다 타이밍 지터에 의한 수신기의 성능 열화가 더욱 심각함을 보여준다. 제안된 방법에서 우리는 타이밍 지터에 의한 근사적인 전력 페널티를 해석적으로 유도하고, 수치 해석을 통해 정확한 전력 페널티를 구하였다. 또한 타이밍 지터의 확률 분포를 uniform과 Gaussian으로 가정할 경우, Gaussian 분포인 경우가 uniform 분포의 경우보다 성능이 더 나빠짐을 보였다.

### ABSTRACT

In this paper, we propose a new method to analyze the performance degradation by timing jitters in the receivers of intensity modulation/direct detection digital optical communication systems where pulse-shaping filters are used to minimize intersymbol interference. The results obtained from the proposed analytical method show that conven-

\* 송실대학교 전자공학과  
Department of Electronic Engineering Soong Sil University  
論文番號: 96074-0228  
接受日字: 1996年 2月 28日

tional analytical methods underestimate the influence of timing jitters on the receiver performance. Using the proposed analytical method, we derive an analytic equation for approximated power penalty due to timing jitters and obtain an exact power penalty by numerical analyses. Assuming Gaussian or uniform probability density function for timing jitters, we also show that assumption of Gaussian distribution for timing jitters yields more performance degradation than that of uniform distribution.

### I. 서 론

OOK(on-off keying)를 사용하는 강도변조/직접검파(intensity modulation/direct detection) 디지털 광통신 시스템에서, 수신기 내 클럭 복구 회로의 불완전성에 의한 타이밍 지터(timing jitter)의 영향으로 수신기에서는 eye diagram 등에 의해 정해지는 각 펄스의 최대 값에 못 미치는 값을 표본화하게 된다. 이러한 타이밍 지터의 영향에 의해 감소되는 표본화 전류를  $\Delta i_j$ 라

하면  $\Delta i_j$ 는 타이밍 지터  $\Delta t$ 의 함수가 된다. 이때  $\Delta t$ 와  $\Delta i_j$ 는 불규칙성 때문에 일반적으로 랜덤 변수(random variable)로 표현되며, 다음 그림 1은 일반적인 raised cosine 펄스[1-4]를 사용하는 경우 결정 회로에 입사되는 비트 "1"과 비트 "0"의 파형을 도시한다.

위 그림에서  $T$ 는 이상적인 NRZ 펄스의 비트 슬롯 폭이고, 비트 슬롯 내의 이상적인 결정 시간  $t_D$ 의 랜덤한 변동에 의하여 발생하는 타이밍 지터를 고려할 경우, 비트 "1" (전류  $I_1$ )과 "0" (전류  $I_0 \equiv 0$ ) 각각에 대한 새로운 표본화 전류는

$$I_{1j} = I_1 - \langle \Delta i_j \rangle, \quad I_{0j} = I_0 = 0 \quad (1)$$

와 같이 표현된다[1,2]. 비트 "1"과 "0" 각각에 대한 표본화 전류의 분산은 열잡음이 우세한 일반적인 수신기를 가정하고 열잡음과 지터잡음이 uncorrelated 되어 있다고 가정하면,

$$\sigma_{I_{1j}}^2 = \sigma_I^2 + \sigma_j^2, \quad \sigma_{I_{0j}}^2 = \sigma_I^2 \quad (2)$$

이 된다. 여기서  $\sigma_I^2$ 과  $\sigma_j^2$ 는 각각 열잡음과 지터잡음의 분산을 나타낸다. 위 식 (1)과 (2)에서 비트 "0"의 경우는 지터의 영향을 받지 않으며, 결국 타이밍 지터에 의한 영향은 비트 "1"일 때만 나타난다는 것을 알 수 있다. 따라서 지터잡음을 고려한 새로운 Q-라미터  $Q_j$ 는 다음과 같이 정의 된다[1-3].

$$Q_j \equiv \frac{I_{1j} - I_{0j}}{\sigma_{I_{1j}} + \sigma_{I_{0j}}} = \frac{I_1 - \langle \Delta i_j \rangle}{\sqrt{\sigma_I^2 + \sigma_j^2} + \sigma_I} \quad (3)$$

이 때의 비트오율(bit error rate)  $P_E$ 는 다음과 같이 구해진다.

$$P_E = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \frac{Q_j}{\sqrt{2}} \right) \quad (4)$$

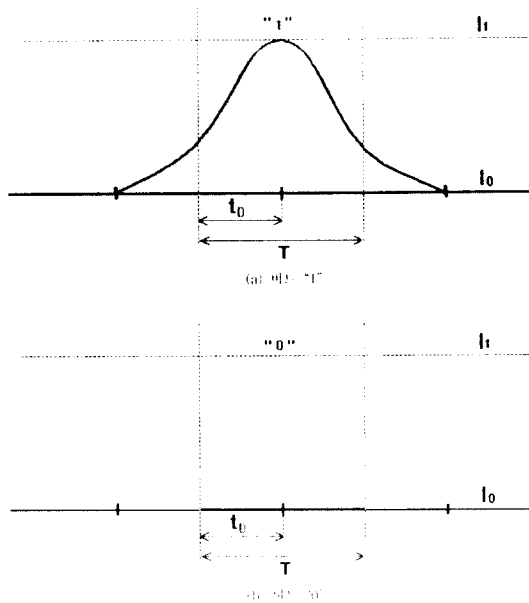


그림 1. 강도변조/직접검파 광통신 시스템 수신기의 결정 회로에 입사된 raised cosine 펄스열 "010"의 예(명확한 의미 전달을 위해 잡음의 영향은 도시하지 않음).

Fig. 1 An example of a raised cosine pulse train "010" incident on the receiver in intensity modulation/direct detection optical communication system(effect of noise is not shown for clarity).

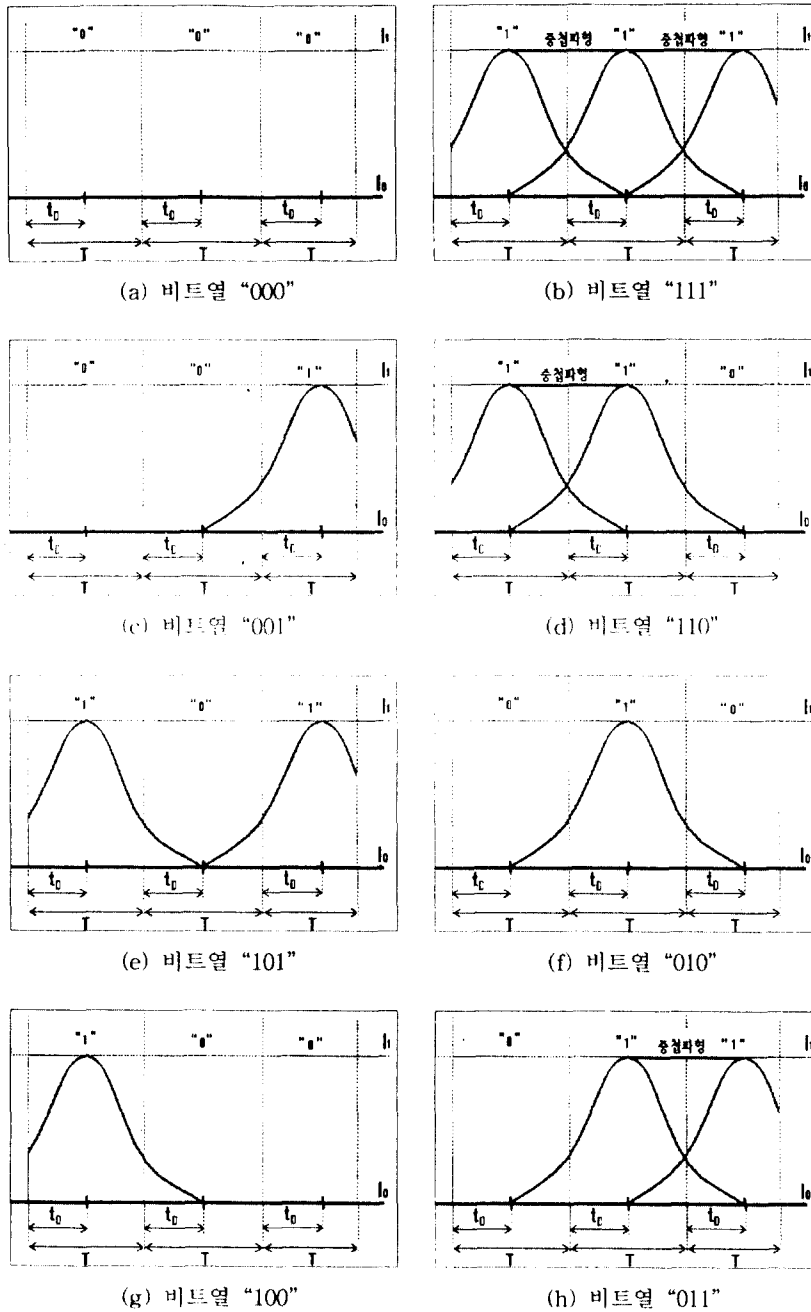


그림 2. 비트열 "ijk"의 여러 조합 ( $i$  = 이전 비트,  $j$  = 현재 비트,  $k$  = 다음 비트).

Fig. 2 Possible combinations of bit trains "ijk" ( $i$  = previous bit,  $j$  = current bit,  $k$  = next bit).

여기서  $erfc(\cdot)$ 는 상보오차함수(complementary error function)로서 아래와 같이 정의된다[4].

$$erfc(u) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_u^{\infty} \exp(-y^2) dy$$

만약 지터잡음이 발생하지 않는다면, 즉  $\langle \Delta i_j \rangle = 0, \sigma_j^2 = 0$ 이라면

$$Q_j = Q = \frac{I_1}{2\sigma_T} \quad (5)$$

가 된다.

참고문헌 [1,2]에서는 위의 논의를 바탕으로 하여, 타이밍 지터의 확률 분포를 각각 uniform과 Gaussian으로 가정한 경우에 있어 지터잡음의 영향을 해석하고 이로부터 전력 페널티(power penalty)를 유도하였다(4.1 절 참고). 하지만 이러한 방법의 문제점으로 지적될 수 있는 것은 이웃 비트들에 의한 심벌간 간섭(inter-symbol interference)을 고려하지 않았다는 점이다.

본 논문에서는 이러한 심벌간 간섭을 고려한 새로운 지터 해석 방법을 제안하며, 이를 위해 다음 2 장에서는 새로운 해석 방법의 이론적인 배경을 제시하고 3 장에서는 이러한 결과를 바탕으로 타이밍 지터의 확률 분포를 각각 uniform과 Gaussian으로 가정하여 지터잡음의 평균과 분산을 해석적으로 유도한다. 4 장은 3 장의 결과를 이용하여 타이밍 지터에 의한 전력 페널티의 해석적 근사식과 수치 해석을 통한 정확한 값을 구하며, 마지막으로 5 장에서 결론을 맺도록 한다.

## II. 제안된 해석 방법

강도변조/직접검파 시스템 수신기에서 사용되는 펄스 셰이핑 필터(pulse shaping filter)의 영향으로 각 펄스가 raised cosine 펄스와 일반적으로 가정할 수 있으며[1], 이러한 펄스의 성질에 의해 만약 각 펄스의 최대값을 표본화하는 이상적인 경우 이웃 비트들에 의한 심벌간 간섭의 영향을 무시할 수 있다. 하지만 타이밍 지터의 영향으로 이러한 최대값에서 벗어난 값을 표본화하는 경우 표본화 전류는 이웃 비트들에 의해 영향을 받으며, 결국 이러한 영향에 대한 해석이 고려되어야 한다. 이러한 관점에서 볼 때 raised co-

sine 펄스를 사용할 경우 우리는 8 가지 종류의 비트열 조합 "000", "001", ..., "111"을 고려한 새로운 지터 해석 방법이 필요함을 알 수 있다. 여기서 비트열 "ijk" ( $i, j, k \in \{0, 1\}$ )는 우리가 관심 있는 현재 비트가 "j", 그 이전 비트가 "i", 그 이후 비트가 "k" 임을 의미하며, 그림 2는 새로운 지터 해석 방법에서 고려하는 8 가지 비트열 조합들을 도시한다.

그림 2에서 왼쪽의 그림들은 현재 비트가 "0"인 경우, 오른쪽의 그림들은 현재 비트가 "1"인 경우이다. 8 가지의 비트열 조합들에 대한 전체 비트오차를 구하기 위해서, 우리가 참고문헌 [5]에서 사용한 접근 방법과 유사하게 그림 2의 4 가지 행, 즉 (a)와 (b), (c)와 (d), (e)와 (f), 그리고 (g)와 (h)의 경우를 쌍으로 하여 이들 각각에 대한 Q-파라미터를 구한다. 이 때 각 쌍에 대하여 타이밍 지터는, 현재 비트 "1"에 대해서는 신호의 감소를 그리고 현재 비트 "0"에 대해서는 신호의 증가를 유발함을 쉽게 알 수 있고, 이러한 타이밍 지터에 의한 신호의 감소(비트 "1")와 증가(비트 "0")는 서로 같으며, 따라서 본 논문에서 제안하는 해석 방법에서 타이밍 지터를 고려한 새로운 표본화 전류는 그림 2의 4 가지 행에서 모두 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$I_{1j} = I_1 - \langle \Delta i_j \rangle, \quad I_{0j} = \langle \Delta i_j \rangle \quad (6)$$

또한 이 표본화 전류의 분산은 다음과 같다.

$$\sigma_{0j}^2 = \sigma_{1j}^2 = \sigma_T^2 + \sigma_j^2 \quad (7)$$

위 식들에서 나타난 것과 같이 기존의 해석 방법에서는 타이밍 지터에 의한 영향이 비트 "1"인 경우에만 나타나는 반면, 새로운 해석 방법에서는 이웃 비트들의 간섭을 고려하여 타이밍 지터의 영향이 비트 "1"과 비트 "0"인 경우 모두 나타난다는 것을 알 수 있다. 이때 지터잡음을 고려한  $Q_j$ 는 다음과 같다.

$$Q_j \equiv \frac{I_{1j} - I_{0j}}{\sigma_{1j} + \sigma_{0j}} = \frac{I_1 - 2\langle \Delta i_j \rangle}{2\sqrt{\sigma_T^2 + \sigma_j^2}} = \frac{Q(1 - 2\langle \Delta i_j \rangle / I_1)}{\sqrt{1 + \sigma_j^2 / \sigma_T^2}} \quad (8)$$

위에서  $Q$ 는 식 (5)로 주어지는 지터잡음이 없는 경우의 Q-파라미터이며, 만약 타이밍 지터가 발생하지 않

는다면 식 (8)은 식 (5)와 일치함을 알 수 있다. 참고문헌 [5]에서 우리가 살펴본 것과 유사한 방법으로, "000", "001", ..., "111" 8 가지의 비트열 조합들이 전체 비트오율에 미치는 영향을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$P_E = \frac{1}{8} \left\{ \operatorname{erfc} \left( \frac{Q_{j1}}{\sqrt{2}} \right) + \operatorname{erfc} \left( \frac{Q_{j2}}{\sqrt{2}} \right) + \operatorname{erfc} \left( \frac{Q_{j3}}{\sqrt{2}} \right) + \operatorname{erfc} \left( \frac{Q_{j4}}{\sqrt{2}} \right) \right\}$$

여기서  $Q_{j1}$ 은 비트열 "000"과 "111",  $Q_{j2}$ 은 비트열 "001"과 "110",  $Q_{j3}$ 은 비트열 "101"과 "010", 그리고  $Q_{j4}$ 은 비트열 "100"과 "011"에 의해 결정된다. 이러한 해석 방법으로부터 출발하여 아래에서는 타이밍 지터의 영향을 고려한 각각의  $Q$ -파라미터  $Q_{ji}(i=1, 2, 3, 4)$ 를 구하기로 한다.

### 2.1 비트열 "000"과 "111"의 경우

그림 2 (a)와 (b)에서 비트열 "000"과 "111"의 경우 중첩된 파형으로부터 타이밍 지터가 발생하여도 이상적인 진류값  $I_1$  또는  $I_0$ 가 표본화되므로 지터에 의한 잡음이 발생하지 않는다. 따라서  $Q_{j1}$ 은 이전의  $Q$ , 즉 식 (5)와 동일하다.

$$Q_{j1} = Q \quad (9)$$

### 2.2 비트열 "001"과 "110" 경우

그림 2 (c)와 (d)에서 비트열 "001"과 "110" 경우 앞서와는 달리 중첩된 파형의 비대칭적인 강쇄에 의하여 지터에 의한 잡음이 발생한다. 이때 발생한 지터잡음의 평균을  $\langle \Delta i_j \rangle$ , 분산을  $\sigma_{j2}^2$ 라 하면  $Q_{j2}$ 는 다음 식과 같다.

$$Q_{j2} = \frac{I_{1j} - I_{0j}}{\sigma_{1j} + \sigma_{0j}} = \frac{I_1 - 2\langle \Delta i_{j2} \rangle}{2\sqrt{\sigma_T^2 + \sigma_{j2}^2}} = \frac{Q(1 - 2\langle \Delta i_{j2} \rangle / I_1)}{\sqrt{1 + \sigma_{j2}^2 / \sigma_T^2}} \quad (10)$$

### 2.3 비트열 "101"과 "010"의 경우

그림 2 (e)와 (f)에서 비트열 "101"과 "010"의 경우 중첩된 파형의 대칭적인 강쇄에 의해서 지터에 의한 잡

음이 가장 크게 발생한다. 이때 발생한 지터잡음의 평균을  $\langle \Delta i_j \rangle$ , 분산을  $\sigma_{j3}^2$ 라 하면  $Q_{j3}$ 는 다음 식과 같다.

$$Q_{j3} = \frac{I_{1j} - I_{0j}}{\sigma_{1j} + \sigma_{0j}} = \frac{I_1 - 2\langle \Delta i_{j3} \rangle}{2\sqrt{\sigma_T^2 + \sigma_{j3}^2}} = \frac{Q(1 - 2\langle \Delta i_{j3} \rangle / I_1)}{\sqrt{1 + \sigma_{j3}^2 / \sigma_T^2}} \quad (11)$$

### 2.4 비트열 "100"과 "011"의 경우

그림 2 (g)와 (h)에 도시된 이 경우는 비트열 "001"과 "110"의 경우와 대칭적이며, 따라서

$$Q_{j4} = \frac{I_{1j} - I_{0j}}{\sigma_{1j} + \sigma_{0j}} = \frac{I_1 - 2\langle \Delta i_{j4} \rangle}{2\sqrt{\sigma_T^2 + \sigma_{j4}^2}} = \frac{Q(1 - 2\langle \Delta i_{j4} \rangle / I_1)}{\sqrt{1 + \sigma_{j4}^2 / \sigma_T^2}} = Q_{j2} \quad (12)$$

위 식들을 종합하여 지터잡음을 고려한 비트오율  $P_E$ 를 다시 표현하면 아래 식과 같다.

$$P_E = \frac{1}{8} \left\{ \operatorname{erfc} \left( \frac{Q_{j1}}{\sqrt{2}} \right) + 2\operatorname{erfc} \left( \frac{Q_{j2}}{\sqrt{2}} \right) + \operatorname{erfc} \left( \frac{Q_{j3}}{\sqrt{2}} \right) \right\} \quad (13)$$

여기서  $Q_{ji}(i=1, 2, 3)$ 는 위에서 살펴본 대로 타이밍 지터를 고려한 각각의  $Q$ 를 나타낸다. 위 식과 기존의 해석 방법의 식 (4)를 비교하면 큰 차이가 있음을 알 수 있다. 즉 제안된 방법에서는 세 개의  $Q_{ji}$ 로 비트오율을 표현하며, 각 경우에 있어 지터의 영향이 서로 다르다. 우리는 다음 장에서  $Q_{j3}$ 가 가장 심각한 성능저하를 유발함을 보이며, 식 (13)의 각  $Q_{ji}$ 에 대한 지터의 영향을 해석하기 위하여 타이밍 지터  $\Delta t$ 의 확률분포가 uniform인 경우와 Gaussian인 경우를 가정하여 각 경우에 따른  $\Delta i_j$ 를 해석하기로 한다.

$\Delta i_j$  해석의 간소화를 위해 그림 1에서와 같은 비트 "1"에 대한 raised cosine 펄스를 아래의  $s(t)$ 로 근사한다[1, 2]. 비트 "0"의 경우는 OOK의 성질을 고려하면 0이 된다.

$$s(t) = \frac{I_1}{2} (1 + \cos(\pi Bt)) \quad (-T \leq t \leq T) \quad (14)$$

여기서  $B \equiv 1/T$ 는 신호의 전송 속도이고,  $t = -T, 0, T$ 는 각각 이전 비트, 현재 비트, 다음 비트의 이상적인 결정 시간에 해당된다. 이 때 타이밍 지터의 영향

으로 현재 비트에 대한 이상적인 결정 시간으로부터 상당히 작은  $\Delta t$  만큼 벗어난다면, 즉  $|B\Delta t| \ll 1$  이라 가정하면 표본화 전류의 감쇄량  $\Delta i_j$ 는 아래와 같이 근사될 수 있다[2].

$$\Delta i_j = I_1 - \frac{I_1}{2} (1 + \cos(\pi B\Delta t)) \approx \frac{\pi^2 B^2 \Delta t^2 I_1}{4} \quad (15)$$

식 (15)는 3 장에서  $\Delta t$ 의 확률 분포에 따른  $\Delta i_j$ 의 평균과 분산을 구하는 과정에서 기본식으로 사용된다.

### III. $\Delta t$ 의 확률 분포에 따른 $\Delta i_j$ 해석

2 장에서 살펴본 바와 같이 타이밍 지터  $\Delta t$ 가 불규칙한 특성을 갖는 랜덤 변수이므로  $\Delta i_j$ 도 랜덤 변수가 되며, 여기서  $\Delta t$ 의 확률 분포에 따라  $\Delta i_j$ 의 확률적인 특성이 변화하게 된다. 한편 식 (15)는  $\Delta t$ 가 음수 혹은 양수일 때 전류의 감쇄량을 나타내며, 그림 2의 중첩 파형들로부터 알 수 있듯이 2 장에서 해석한 4 가지 각각의 경우에 있어서  $\Delta i_j$ 는  $\Delta t$ 의 값에 따라서 0 또는 식 (15)로 표현된다. 아래 표 1은  $\Delta t$ 의 값에 따른  $\Delta i_j$ 의 표현식을 요약해 보여준다.

표 1.  $\Delta t$ 의 값에 따른  $\Delta i_j$ 의 표현식.

Table 1. Expressions for  $\Delta i_j$  according to the values of  $\Delta t$ .

$\Delta i_{ji}$ ( $i = 1, 2, 3, 4$ )	$\Delta t < 0$	$\Delta t \geq 0$
$\Delta i_{j1}$	0	0
$\Delta i_{j2}$	0	식 (15)
$\Delta i_{j3}$	식 (15)	식 (15)
$\Delta i_{j4}$	식 (15)	0

위에서  $\Delta i_{j1}$ 은 타이밍 지터의 영향을 받지 않는다는 것을 알 수 있으며  $\Delta i_{j2}$ 와  $\Delta i_{j4}$ 는 대칭적으로 같다는 것을 알 수 있다. 위 표를 바탕으로 아래에서 우리는  $\Delta t$ 에 대해 uniform과 Gaussian 확률 분포를 가정하여 이 때의  $\Delta i_j$ 의 변화를 해석하기로 한다.

#### 3.1 $\Delta t$ 의 확률 분포가 uniform인 경우

$\Delta t$ 를 범위  $|\Delta t| \leq \frac{\tau_0}{2}$  ( $0 < \tau_0 \ll \frac{1}{B}$ )에서 정의되는 uniform p.d.f. (probability density function)  $p(\Delta t) = \frac{1}{\tau_0}$ 을 갖는 랜덤 변수로 가정하면, 함수 관계를 갖는 두

개의 랜덤 변수들과 이들의 p.d.f.에 대한 변환식[6]에 의해  $\Delta i_{j2}$ 의 p.d.f.는 식 (15)로부터 아래와 같이 구해진다.

$$p(\Delta i_{j2}) = \frac{1}{\pi B \tau_0 \sqrt{I_1} \sqrt{\Delta i_{j2}}} \quad (16)$$

위의 p.d.f.를 이용하여  $\Delta i_{j2}$ 의 평균  $\langle \Delta i_{j2} \rangle$ 와 분산  $\sigma_{j2}^2$ 은 각각 다음과 같이 구해진다.

$$\langle \Delta i_{j2} \rangle = \int_0^{(\pi B \tau_0 / 4)^2 I_1} \frac{\sqrt{\Delta i_{j2}}}{\pi B \tau_0 \sqrt{I_1}} d\Delta i_{j2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi B \tau}{4} \right)^2 I_1 \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{j2}^2 &= \langle \Delta i_{j2}^2 \rangle - \langle \Delta i_{j2} \rangle^2 \\ &= \int_0^{(\pi B \tau_0 / 4)^2 I_1} \frac{\Delta i_{j2}^{3/2}}{\pi B \tau_0 \sqrt{I_1}} d\Delta i_{j2} - \langle \Delta i_{j2} \rangle^2 \\ &= \frac{13}{20} \left( \frac{\pi B \tau}{4} \right)^4 I_1^2 \end{aligned} \quad (18)$$

위 식들에서 uniform p.d.f.의 경우와 다음에 살펴볼 Gaussian p.d.f.의 경우를 비교하기 위하여 양쪽의 분산이 같도록  $\tau_0 \equiv \sqrt{3} \tau$ 를 대입하였다.

마찬가지로 대칭성에 의해  $\Delta i_{j4}$ 에 대한 p.d.f.  $p(\Delta i_{j4})$ , 평균  $\langle \Delta i_{j4} \rangle$ , 분산  $\sigma_{j4}^2$ 은 아래처럼  $\Delta i_{j2}$ 의 경우와 같다.

$$p(\Delta i_{j4}) = p(\Delta i_{j2}), \quad \langle \Delta i_{j4} \rangle = \langle \Delta i_{j2} \rangle, \quad \sigma_{j4}^2 = \sigma_{j2}^2 \quad (19)$$

마지막 경우인  $\Delta i_{j3}$ 의 p.d.f.  $p(\Delta i_{j3})$ , 평균  $\langle \Delta i_{j3} \rangle$  그리고 분산  $\sigma_{j3}^2$ 은 각각 다음과 같이 구해진다.

$$p(\Delta i_{j3}) = \frac{2}{\pi B \tau_0 \sqrt{I_1} \sqrt{\Delta i_{j3}}} \quad (20)$$

$$\langle \Delta i_{j3} \rangle = \int_0^{(\pi B \tau_0 / 4)^2 I_1} \frac{2\sqrt{\Delta i_{j3}}}{\pi B \tau_0 \sqrt{I_1}} d\Delta i_{j3} = \left( \frac{\pi B \tau}{4} \right)^2 I_1 \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{j3}^2 &= \langle \Delta i_{j3}^2 \rangle - \langle \Delta i_{j3} \rangle^2 \\ &= \int_0^{(\pi B \tau_0 / 4)^2 I_1} \frac{2\Delta i_{j3}^{3/2}}{\pi B \tau_0 \sqrt{I_1}} d\Delta i_{j3} - \langle \Delta i_{j3} \rangle^2 \\ &= \frac{4}{5} \left( \frac{\pi B \tau}{4} \right)^4 I_1^2 \end{aligned} \quad (22)$$

위 식들에서 세 번째 경우의  $\langle \Delta i_{j3} \rangle$ ,  $\sigma_{j3}^2$ 가 두 번째 경우의  $\langle \Delta i_{j2} \rangle$ ,  $\sigma_{j2}^2$  보다 더 큼을 알 수 있고 이는 지터잡음이  $Q_j$ 에 가장 크게 영향을 끼친다는 것을 의미한다.

### 3.2 $\Delta t$ 의 확률 분포가 Gaussian인 경우

$\Delta t$ 를 아래 식 (23)과 같이 평균 0, 표준 편차  $\frac{\tau}{2}$ 인 Gaussian p.d.f.를 갖는 랜덤 변수라고 가정하자.

$$p(\Delta t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\tau/2} \exp\left(-\frac{2\Delta t^2}{\tau^2}\right) \quad (23)$$

식 (15)와 (23)을 이용하여  $\Delta i_{j2}$ 의 p.d.f.를 구하면

$$p(\Delta i_{j2}) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi I_1} \phi} \exp\left(-\frac{\Delta i_{j2}}{2\phi^2 I_1}\right) \quad (24)$$

가 되며, 여기서  $\phi \equiv \frac{\pi B\tau}{4}$ 이다. 이로부터  $\Delta i_{j2}$ 의 평균  $\langle \Delta i_{j2} \rangle$ 과 분산  $\sigma_{j2}^2$ 은 각각 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} \langle \Delta i_{j2} \rangle &= \int_0^\infty \frac{\sqrt{\Delta i_{j2}}}{2\sqrt{2\pi I_1} \phi} \exp\left(-\frac{\Delta i_{j2}}{2\phi^2 I_1}\right) d\Delta i_{j2} \\ &= \frac{\phi^2 I_1}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi B\tau}{4}\right)^2 I_1 \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{j2}^2 &= \langle \Delta i_{j2}^2 \rangle - \langle \Delta i_{j2} \rangle^2 \\ &= \int_0^\infty \frac{\Delta i_{j2}^{3/2}}{2\sqrt{2\pi I_1} \phi} \exp\left(-\frac{\Delta i_{j2}}{2\phi^2 I_1}\right) d\Delta i_{j2} - \langle \Delta i_{j2} \rangle^2 \\ &= \frac{3I_1^2}{2} \phi^4 - \frac{I_1^2}{4} \phi^4 = \frac{5}{4} \left(\frac{\pi B\tau}{4}\right)^4 I_1^2 \end{aligned} \quad (26)$$

앞서 살펴본 uniform p.d.f.의 경우와 마찬가지로, 대칭성에 의해  $\Delta i_{j4}$ 에 대한 p.d.f.  $p(\Delta i_{j4})$ , 평균  $\langle \Delta i_{j4} \rangle$ , 분산  $\sigma_{j4}^2$ 은 다음과 같이 주어진다.

$$p(\Delta i_{j4}) = p(\Delta i_{j2}), \quad \langle \Delta i_{j4} \rangle = \langle \Delta i_{j2} \rangle, \quad \sigma_{j4}^2 = \sigma_{j2}^2 \quad (27)$$

마지막 경우인  $\Delta i_{j3}$ 의 p.d.f.  $p(\Delta i_{j3})$ , 평균  $\langle \Delta i_{j3} \rangle$ 와 분산  $\sigma_{j3}^2$ 은 각각 다음과 같다.

$$p(\Delta i_{j3}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \Delta i_{j3} I_1} \phi} \exp\left(-\frac{\Delta i_{j3}}{2\phi^2 I_1}\right) \quad (28)$$

$$\langle \Delta i_{j3} \rangle = \int_0^\infty \frac{\sqrt{\Delta i_{j3}}}{\sqrt{2\pi I_1} \phi} \exp\left(-\frac{\Delta i_{j3}}{2\phi^2 I_1}\right) d\Delta i_{j3}$$

$$= \phi^2 I_1 = \left(\frac{\pi B\tau}{4}\right)^2 I_1 \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{j3}^2 &= \langle \Delta i_{j3}^2 \rangle - \langle \Delta i_{j3} \rangle^2 \\ &= \int_0^\infty \frac{\Delta i_{j3}^{3/2}}{\sqrt{2\pi I_1} \phi} \exp\left(-\frac{\Delta i_{j3}}{2\phi^2 I_1}\right) d\Delta i_{j3} - \langle \Delta i_{j3} \rangle^2 \\ &= 3\phi^4 I_1^2 - \phi^4 I_1^2 = 2 \left(\frac{\pi B\tau}{4}\right)^4 I_1^2 \end{aligned} \quad (30)$$

이 경우도 uniform 분포를 가정한 경우와 마찬가지로 지터잡음이  $Q_j$ 에 가장 크게 영향을 끼친다는 것을 알 수 있다. 또한 위 식들에서 보면(식 (18)과 (26) 그리고 식 (22)와 (30)), 타이밍 지터  $\Delta t$ 의 분산이 uniform과 Gaussian 분포에서 서로 동일하다고 할 때, Gaussian 분포를 가정할 경우의 지터잡음이 uniform의 경우보다 더 큼을 알 수 있다. 이러한 결과를 바탕으로, 다음 장에서는 1장에서 살펴 본 기존의 방법과 2장에서 제안된 방법을 이용하여 지터잡음에 의한 전력 페널티를 위의 각 분포를 가정하여 해석적으로 유도하기로 한다.

## IV. 기존의 방법과 제안된 방법에 의한 전력 페널티 해석

수신단에서 타이밍 지터에 의하여 비트 “1”의 경우 파형의 최대값보다 작은 전류를 랜덤하게 표본화하게 되며, 이로부터 신호대잡음비(signal-to-noise ratio)가 감소하게 되고, 기준 비트오율을 유지하기 위해서는 감소된 신호대잡음비를 보상하기 위하여 신호의 크기를 높여 주어야 한다. 이때의 전력의 증가치를 전력 페널티(power penalty)[1-3]라 하며, 이 장에서는 이러한 타이밍 지터에 의한 전력 페널티를 기존의 방법과 새로운 방법에 의하여 해석하기로 한다.

### 4.1 기존의 방법에 의한 전력 페널티의 해석

#### 4.1.1 $\Delta t$ 의 확률 분포가 uniform인 경우

식 (3), (21), (22)를 이용하면  $Q_j$ 는 다음과 같이 구해진다.

$$Q_j = \frac{I_1 - \phi^2 I_1}{\left(\sigma_r^2 + \frac{4}{5} \phi^4 I_1^2\right)^{1/2} + \sigma_r} \quad (31)$$

여기서  $\sigma_j^2$ 는 열잡음의 분산을 나타내며, 지터잡음이 없다면, 즉  $\phi = \frac{\pi B\tau}{4} \equiv 0$ 이라면 식 (31)은 식 (5)와 같아진다. 위에서 식 (21)과 (22)를 사용한 이유는 기존 방법에서는 이웃 비트의 영향을 고려하지 않으며 비트 "1"에서만 타이밍 지터의 영향이 나타난다고 가정하므로, 기존 해석 방법인 그림 1에서의 비트 "1"은 제안된 해석 방법인 그림 2 (e)의 비트열 "010"과 동일하고, 따라서 기존 해석 방법에서의 지터잡음의 평균  $\langle \Delta i_j \rangle$ 과 분산  $\sigma_j^2$ 은 제안된 해석 방법의  $\langle \Delta i_{j3} \rangle$ ,  $\sigma_{j3}^2$ 와 각각 같기 때문이다. 전력 페널티를 유도하기 위해  $R$ 을 수신기 응답도(responsivity),  $\overline{P_{rec}}(\phi)$ 를 타이밍 지터가  $\phi$ 일 때의 수신기 감도(sensitivity)라 정의하자. 수신기 감도란 수신기가 일정한 비트오율(예를 들어,  $10^{-9}$ )을 유지하기 위한 최소 평균 수신 전력을 의미한다. 이 때 식 (31)에  $I_1 = 2R\overline{P_{rec}}$ 이라는 관계식[1]과  $Q_j \equiv Q$ 를 만족해야 한다는 조건을 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\overline{P_{rec}}(\phi) = \frac{\sigma_r Q}{R} \frac{1 - \phi^2}{(1 - \phi^2)^2 - \frac{4}{5} \phi^4 Q^2} \quad (32)$$

타이밍 지터가 증가할수록, 즉  $\phi$ 가 커질수록  $\overline{P_{rec}}(\phi)$ 는 증가하며, 이는 타이밍 지터의 증가에 의해 수신기의 성능이 저하됨을 의미한다. 또한 지터잡음이 없다면, 즉  $\phi=0$ 이라면 식 (32)는 식 (5)와 같음을 알 수 있다. 이 때 타이밍 지터에 의한 전력 페널티  $\delta_j$  (dB)는 아래와 같이 구해진다.

$$\delta_j = 10 \log_{10} \frac{\overline{P_{rec}}(\phi)}{\overline{P_{rec}}(0)} = 10 \log_{10} \frac{1 - \phi^2}{(1 - \phi^2)^2 - \frac{4}{5} \phi^4 Q^2} \quad (33)$$

#### 4.1.2 $\Delta t$ 의 확률 분포가 Gaussian인 경우

식 (3), (29), (30)을 이용하면  $Q_j$ 는 다음과 같이 구해진다.

$$Q_j = \frac{I_1 - \phi^2 I_1}{(\sigma_r^2 + 2\phi^4 I_1^2)^{1/2} + \sigma_r} \quad (34)$$

앞의 경우와 동일한 방법으로 전력 페널티  $\delta_j$ 를 구하면 다음과 같다.

$$\delta_j \equiv 10 \log_{10} \frac{\overline{P_{rec}}(\phi)}{\overline{P_{rec}}(0)} = 10 \log_{10} \frac{1 - \phi^2}{(1 - \phi^2)^2 - 2\phi^4 Q^2} \quad (35)$$

#### 4.2 제안된 방법에 의한 전력 페널티의 해석

앞서 언급된 것처럼 기존의 해석 방법에서는 하나의  $Q_j$ 에 대한 지터잡음의 영향을 고려하지만, 제안된 해석 방법에서는  $Q_{ji}$  ( $i=1, 2, 3$ ) 각각의 경우에 대한 지터 잡음의 영향을 고려해야 한다. 이 때 정확한 전력 페널티는 모든  $Q_{ji}$  ( $i=1, 2, 3$ )를 고려하여 식 (13)의 비트오율로부터 수치 해석적 방법을 통해 구해야 하며, 4.3 절에서 이를 다루기로 한다. 하지만 이 절에서는 3장에서 토의된 대로  $Q_{j3}$ 에 의한 지터의 영향이 주된 항이라고 가정하여 전력 페널티를 근사적으로 해석하기로 한다. 즉 식 (13)에서  $Q_{j3}$ 의 영향이 가장 크다는 사실을 이용하여 다음과 같이 근사한다.

$$P_E = \frac{1}{8} \left\{ \operatorname{erfc} \left( \frac{Q_{j1}}{\sqrt{2}} \right) + 2 \operatorname{erfc} \left( \frac{Q_{j2}}{\sqrt{2}} \right) + \operatorname{erfc} \left( \frac{Q_{j3}}{\sqrt{2}} \right) \right\} \\ \approx \frac{1}{8} \operatorname{erfc} \left( \frac{Q_{j3}}{\sqrt{2}} \right) \quad (36)$$

#### 4.2.1 $\Delta t$ 의 확률 분포가 uniform인 경우

식 (11)에서 나타난 것과 같이  $\Delta t$ 의 확률 분포가 uniform인 경우  $Q_{j3}$ 는 다음과 같다.

$$Q_{j3} = \frac{I_{1j} - I_{0j}}{\sigma_{ij} + \sigma_{oj}} = \frac{I_1 - 2\langle \Delta i_{j3} \rangle}{2\sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_{j3}^2}} \quad (37)$$

위 식과 식 (21), (22)를 이용하여 기존의 해석 방법에서와 동일하게 전력 페널티  $\delta_j$ 를 구하면 다음과 같다.

$$\delta_j \equiv 10 \log_{10} \frac{\overline{P_{rec}}(\phi)}{\overline{P_{rec}}(0)} = 10 \log_{10} \frac{1}{[(1 - 2\phi^2)^2 - \frac{16}{5} \phi^4 Q^2]^{1/2}} \quad (38)$$

#### 4.2.2 $\Delta t$ 의 확률 분포가 Gaussian인 경우

위와 마찬가지로 방법으로 식 (37), (29), (30)을 이용하면 전력 페널티  $\delta_j$ 는 다음과 같다.

$$\delta_j \equiv 10 \log_{10} \frac{\overline{P_{rec}}(\phi)}{\overline{P_{rec}}(0)} = 10 \log_{10} \frac{1}{[(1 - 2\phi^2)^2 - 8\phi^4 Q^2]^{1/2}} \quad (39)$$



$P_E = 10^{-9}$  즉  $Q = 6$ 일 때, 기존의 해석 방법과 제안된 해석 방법 각각의 경우에 대한 전력 페널티를  $B\tau$ 에 대하여 도시하면 다음 그림과 같다.

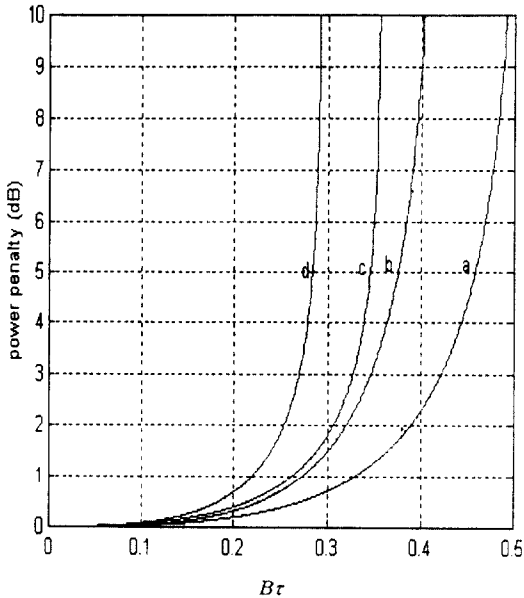


그림 3. 전력 페널티의 비교:

- (a) 기존의 해석 방법, uniform 분포
- (b) 기존의 해석 방법, Gaussian 분포
- (c) 제안된 해석 방법, uniform 분포
- (d) 제안된 해석 방법, Gaussian 분포.

Fig. 3 Comparisons of power penalties:

- (a) Conventional analytical method, uniform distribution
- (b) Conventional analytical method, Gaussian distribution
- (c) Proposed analytical method, uniform distribution
- (d) Proposed analytical method, Gaussian distribution.

위 그림으로부터 우리는 제안된 해석 방법에 의한 타이밍 지터의 전력 페널티가 기존의 해석 방법에 의한 전력 페널티보다 더 심각하다는 것을 알 수 있다. 예를 들어, 기존의 해석 방법에서는 1 dB의 전력 페널티는 uniform과 Gaussian인 경우 각각  $B\tau$ 가 0.33과 0.27 부근에서 일어나지만, 제안된 해석 방법에서는  $B\tau$ 가 0.26과 0.22 부근에서 1 dB의 전력 페널티가 발생함을 알 수 있다.

#### 4.3 제안된 해석 방법에서 전력 페널티의 근사식과 수치 해석을 통한 정확한 값의 비교

4.2 절에서는 제안된 해석 방법의 전력 페널티 식 (38), (39)를 타이밍 지터가  $Q_{j3}$ 에 가장 크게 영향을 미친다는 가정에서 근사적으로 구하였다. 이 절에서는 이러한 가정 없이 식 (13)을 그대로 사용한 수치 해석적 방법으로 전력 페널티를 구하여 이 결과를 근사식과 비교하도록 하며, 이러한 비교를 통해 우리가 구한 근사식의 타당성을 검토하도록 한다.

수치 해석을 위한 전형적인 파라미터들은 아래 표 2와 같으며, 그림 4-6은 표 2의 여러 다른 파라미터들에 대해 식 (38), (39)로 표현되는 근사식과 수치 해석을 통한 정확한 값을 비교, 도시한다. 여기서  $\sigma_T$ 는 참고문헌 [1]에서 언급된 전형적인 값  $10^{-7}$ 을 취하였고, 주어진 비트오율  $P_E$ 에 대해 식 (4)로부터  $Q$ 를 구하며, 이렇게 구해진  $Q$ 와 식 (5)로부터 해당되는 전류  $I_1$ 을 구하였다.

그림 4-6에서 알 수 있듯이 수치 해석에 의한 정확한 결과는 제안된 근사적 해석 방법보다 약간 작은 전력 페널티를 보이며, 이는 식 (36)에서와 같이 해석식으로 전력 페널티를 구하기 위하여 식의 앞의 두개 항을 무시했기 때문이다. 또한 이 그림들로부터  $Q$ 가 증가할수록 근사적 방법에 의한 결과가 수치 해석에 의한 정확한 결과에 좀 더 가까워 지는 것을 알 수 있다. 특히 우리가 주로 사용하는 비트오율 기준인  $P_E$

표 2. 수치 해석을 위해 사용된 파라미터들.

Table 2. Parameters used for the numerical analyses.

그림 번호	비트오율 $P_E$	$Q$ -파라미터 $Q$	열잡음의 표준편차 $\sigma_T$ (Amperes)	비트 "1"의 전류 $I_1$ (Amperes)
그림 4	$10^{-3}$	3.1	$10^{-7}$	$6.2 \times 10^{-7}$
그림 5	$10^{-9}$	6		$1.2 \times 10^{-6}$
그림 6	$10^{-15}$	7.9		$1.58 \times 10^{-6}$

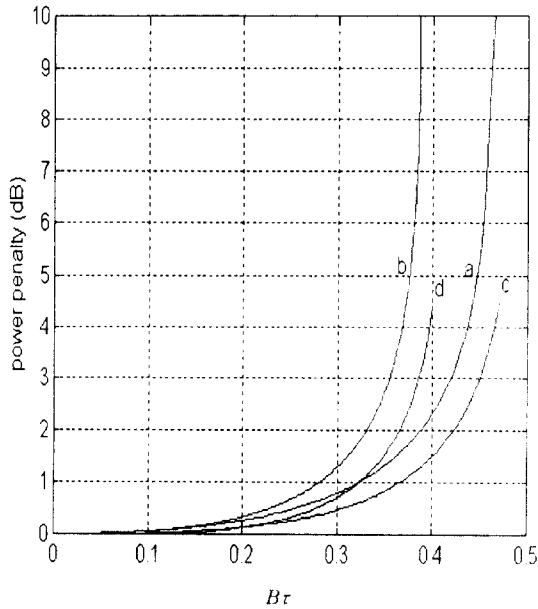


그림 4. 제안된 방법의 근사식과 수치 해석에 의한 전력 페널티의 비교:  $P_E = 10^{-3}$ ,  $Q = 3.1$ ,  $I_1 = 6.2 \times 10^{-7}$ ,  $\sigma_T = 10^{-7}$ .

- (a) 근사식, uniform 분포
- (b) 근사식, Gaussian 분포
- (c) 수치 해석, uniform 분포
- (d) 수치 해석, Gaussian 분포.

Fig. 4 Comparisons of power penalties obtained by the approximated equation and the numerical analysis of the proposed analytical method:  $P_E = 10^{-3}$ ,  $Q = 3.1$ ,  $I_1 = 6.2 \times 10^{-7}$ ,  $\sigma_T = 10^{-7}$ .

- (a) Approximated equation, uniform distribution
- (b) Approximated equation, Gaussian distribution
- (c) Numerical analysis, uniform distribution
- (d) Numerical analysis, Gaussian distribution.

$= 10^{-9}$  또는  $10^{-15}$ 에 대해서는 근사식과 수치 해석에 의한 결과가 상당히 유사하며, 따라서 이는 본 논문에서 유도한 근사식의 타당성을 보여주는 결과라 할 수 있다.

### V. 결 론

본 논문에서는 펄스 셰이핑 필터를 사용하는 강도 변조/직접검파 광통신 시스템 수신기 내 타이밍 지터

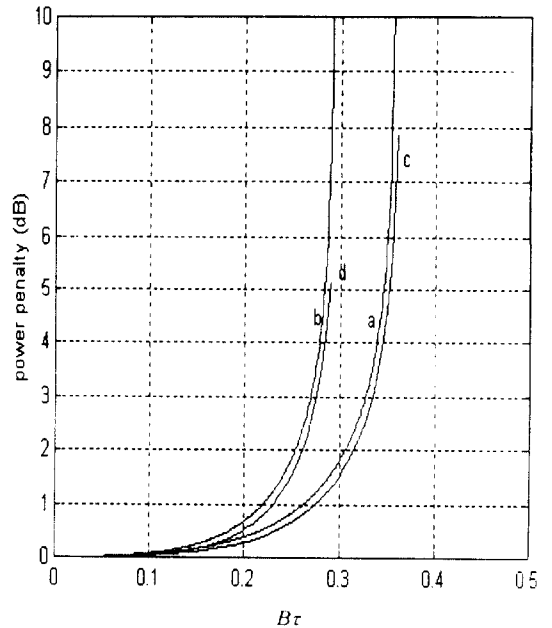


그림 5. 제안된 방법의 근사식과 수치 해석에 의한 전력 페널티의 비교:  $P_E = 10^{-9}$ ,  $Q = 6$ ,  $I_1 = 1.2 \times 10^{-6}$ ,  $\sigma_T = 10^{-7}$ .

- (a) 근사식, uniform 분포
- (b) 근사식, Gaussian 분포
- (c) 수치 해석, uniform 분포
- (d) 수치 해석, Gaussian 분포.

Fig. 5 Comparisons of power penalties obtained by the approximated equation and the numerical analysis of the proposed analytical method:  $P_E = 10^{-9}$ ,  $Q = 6$ ,  $I_1 = 1.2 \times 10^{-6}$ ,  $\sigma_T = 10^{-7}$ .

- (a) Approximated equation, uniform distribution
- (b) Approximated equation, Gaussian distribution
- (c) Numerical analysis, uniform distribution
- (d) Numerical analysis, Gaussian distribution.

에 의한 수신기의 성능 변화에 대한 새로운 해석 방법을 제안하고, 타이밍 지터의 확률 분포가 uniform인 경우와 Gaussian인 경우를 가정하여 해석하였다. 기존의 해석 방법[1,2]에 있어서는 비트가 "1"인 경우에만 타이밍 지터를 고려하지만, 제안된 해석 방법에서는 인접 비트들의 간섭에 의해 비트 "1"과 비트 "0"인 경우 모두에서 발생될 수 있는 타이밍 지터를 고려하며, 이전의 해석 방법보다 더욱 심각한 타이밍 지터의 영향을 보여준다. 예를 들어  $P_E = 10^{-9}$  즉  $Q =$

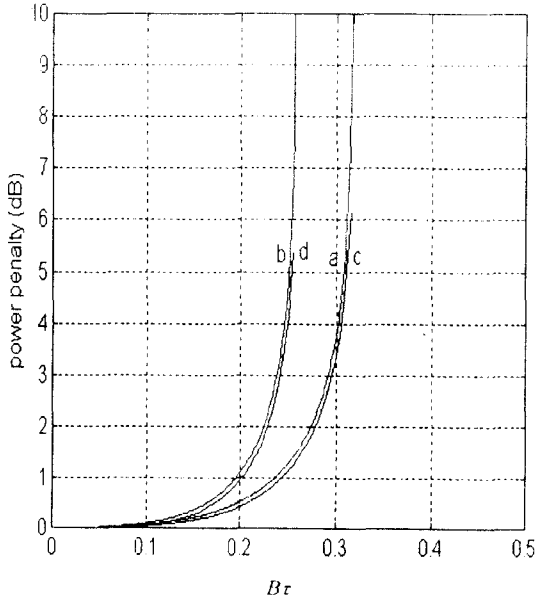


그림 6. 제안된 방법의 근사식과 수치 해석에 의한 전력 페널티의 비교:  $P_E = 10^{-15}$ ,  $Q = 7.9$ ,  $I_1 = 1.58 \times 10^{-6}$ ,  $\sigma_T = 10^{-7}$ .

- (a) 근사식, uniform 분포
- (b) 근사식, Gaussian 분포
- (c) 수치 해석, uniform 분포
- (d) 수치 해석, Gaussian 분포.

Fig. 6 Comparisons of power penalties obtained by the approximated equation and the numerical analysis of the proposed analytical method:  $P_E = 10^{-15}$ ,  $Q = 7.9$ ,  $I_1 = 1.58 \times 10^{-6}$ ,  $\sigma_T = 10^{-7}$ .

- (a) Approximated equation, uniform distribution
- (b) Approximated equation, Gaussian distribution
- (c) Numerical analysis, uniform distribution
- (d) Numerical analysis, Gaussian distribution.

6일 때, 기존의 해석 방법에서 1 dB의 전력 페널티는 uniform과 Gaussian인 경우 각각  $B\tau$ 가 0.33과 0.27 부근에서 일어나지만, 제안된 해석 방법에서는  $B\tau$ 가 0.27과 0.23 부근에서 1 dB의 전력 페널티가 발생한다.

기존의 해석 방법이나 본 논문의 해석 방법에서는 타이밍 지터가 매우 작다고 가정하여(즉  $|B\Delta t| \ll 1$ ) 식 (14)의 raised cosine 펄스  $s(t)$ 를  $\Delta t$ 의 2차 다항식으로 근사하여 식 (15)처럼  $\Delta i_j$ 를 근사적으로 표현하여  $\Delta i_j$ 의 평균과 분산을 구한다. 하지만 참고문헌 [7]에

서는 이러한 가정과 근사식을 사용하지 않고 식 (14)를 직접 이용하여 수치 해석을 통해 전력 페널티를 구한다. 참고문헌 [7]의 결과는 타이밍 지터의 분포가 Gaussian이라 가정할 경우 타이밍 지터의 영향이 기존의 해석 방법[1,2]에 의해 구해진 결과와 실제의 알려진 타이밍 지터에 의한 실험적인 전력 페널티보다도 훨씬 심각함을 보여준다. 이것은 실제 시스템의 지터 분포가 Gaussian이 아니라는 것을 암시한다고 할 수 있다[7]. 본 논문은 타이밍 지터의 영향을 해석하는 과정에서 심벌간 간섭을 고려한 새로운 방법을 적용한다는 점에서 의미가 있다고 할 수 있다.

앞으로 본 논문의 이론적인 값과 실제 시스템의 실험 결과를 비교하는 연구가 필요하고, 열잡음 이외의 다른 잡음 메커니즘에 의해 수신기의 성능이 제한되는 경우에 있어서 제안된 해석 방법을 적용하는 연구 역시 필요하리라 생각된다.

## 참고 문헌

1. G. P. Agrawal, *Fiber Optic Communication Systems*, John Wiley & Sons, 1992.
2. G. P. Agrawal and T. M. Shen, "Power penalty due to decision-time jitter in optical communication systems", *Electron. Lett.*, Vol.22, pp.450-451, 1986.
3. T. M. Shen, "Power penalty due to decision-time jitter in receivers using avalanche photodiodes", *Electron. Lett.*, Vol.22, pp.1043-1045, 1986.
4. R. E. Ziemer and W. H. Tranter, *Principles of Communications-Systems, Modulation, and Noise*, Third Ed., Houghton Mifflin Company, 1990.
5. 은수정, 신요안, 김부근, "강도변조/직접검파 디지털 광통신 시스템에서 신호의 과표분화에 의한 수신기 성능 향상에 관한 연구", 한국통신학회논문지, 제20권, 제12호, pp.3612-3626, 1995년 12월.
6. A. Papoulis, *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*, Second Ed., McGraw-Hill, 1984.
7. K. Schumacher and J. J. O'Reilly, "Power penalty due to jitter on optical communication systems", *Electron. Lett.*, Vol.23, pp.718-719, 1987.

- |                         |     |
|-------------------------|-----|
| 은 수 정(Soo-Jeong Eun)    | 정회원 |
| 한국통신학회 논문지 제20권 제12호 참조 |     |
| 신 요 안(Yoan Shin)        | 정회원 |
| 한국통신학회 논문지 제20권 제12호 참조 |     |
| 김 부 균(Boo-Gyoun Kim)    | 정회원 |
| 한국통신학회 논문지 제20권 제2호 참조  |     |