

◎ 論 文

세라믹스의 파괴강도에 관한 확률론적 해석

김 선 진*
(96년 3월 20일 접수)

A Probabilistic Analysis on Fracture Strength of Ceramics

Seon-Jin Kim*

Key Words : Size Effect(치수효과), Weakest Link Model(최약링크모델), Tensile Strength(인장강도), Fracture Probability(파괴확률), Brittle Materials(취성재료), Weibull Distribution(Weibull 분포), Monte-Carlo Simulation(몬테카르로 시뮬레이션)

Abstract

Weibull distribution function is applied very successfully to the strength of brittle materials such as ceramics and the weakest link model is applied to explain the events. This paper deals with the effect of specimen size on the strength of ceramics. The values of tensile strength were calculated by the Monte-Carlo simulation. The tensile strength obtained was plotted on Weibull probability papers and represented by the 3-parameter Weibull distribution. The strength distribution function was compared with the theoretical Weibull distribution. As a result, it was found that the Weibull shape parameter was changed due to the size and there was a possibility of a false indication as if the weakest link model holds good. We should be very careful when we apply the Weibull statistics to estimate the strength of products.

기호설명

a : 결합크기

$C.O.V$: 변동계수(coefficient of variation)

$F(\cdot)$: 누적확률분포함수

H : 시험편 높이

h : 표면에서 결합중심위치까지의 거리

K : 응력확대계수

K_c : 한계응력확대계수

L : 시험편 길이

l : 등가균열길이

M_T : 유한체의 보정계수

V : 시험편의 유효체적

W : 시험편 폭

α : Weibull 분포의 형상계수

β : Weibull 분포의 척도계수

* 부산수산대학교 공과대학 기계공학과

- γ : Weibull 분포의 위치계수
 σ : 인장강도
 σ_f : 시험편의 파괴강도
 σ_m : 시험편의 평균강도

1. 서 론

최성재료인 세라믹스는 내열성, 내식성, 내마모성, 경량성 등의 성질이 우수하여, 근년에는 가스터너빈, 자동차 엔진용 부품, 열교환기 등의 고온 용 구조부재에서부터 공작기계, 유체제어기계, 공구 등의 기계부품에 이르기 까지 광범위하게 이용이 시도되고 있다¹⁾. 그러나, 세라믹스는 금속재료에는 없는 여러 가지 이점을 가지고 있지만, 강도 등의 기계적 성질에 있어서 산포가 크므로 이의 신뢰성 향상이 활발히 요구되고 있다.

최근 세라믹스는 구조용 재료로써 그 파괴 강도에 관한 연구는 활발히 수행되고 있으며 그 특성이 해명되어 지고 있는 실정이다. 그러나, 세라믹스는 전형적인 최성재료임에도 불구하고 그 파괴인성치는 일정하지 않고 통계적 변동을 나타낸다. 또, 파괴 강도의 변동은 금속재료에 비하여 아주 클 뿐만 아니라 일반적으로 평활재의 파괴강도는 큰 치수 효과를 나타내고 있다²⁾. 이러한 특성은 재료 내부에 잠재하는 균열상의 여러 결함, 그 중에서도 최약의 결함에 의하여 지배되는 경우가 많으므로 이를 강도의 평가나 강도 설계에 있어서는 확률론적 취급이 필요로 하게 된다. 일반적으로 세라믹스와 같은 최성재료의 강도 평가에는 최약 링크 이론에 기초한 Weibull 해석이 이용되고 있다^{3) 6)}. 굽힘시험 또는 인장시험 등에 의해서 구한 강도 데이터를 Weibull 분포에 적용하여 강도의 변동이나 치수효과를 검토하고 있는 것이 많다^{7) 11)}. 그러나, 치수효과에 관한 Weibull 해석을 하고 있는 Weibull 분포는 이론적으로 극치의 점근분포¹²⁾의 하나이므로 원래의 분포가 반드시 Weibull 분포라고는 할 수 없다. 최약 링크가설에 의한 최성재료의 누적파괴확률은 다음과 같이 표현된다¹³⁾.

$$F(\sigma) = 1 - \exp \left\{ - \int_r^{\sigma} \left(\frac{\sigma - \gamma}{\beta} \right)^a dv \right\} \quad (1)$$

이 분포는 적분이나 면적분으로 표현하는 대규모 부재의 실제 강도 평가에 확장된다. 그러나 이것을 적용하려고 하면 그 대상은 가능한한 적분의 최소체적이 시험편 치수와 동등하고, 점근분포로서의 성질을 가지고 있어야 하며 인접한 부분의 강도는 상호 독립이라는 것을 전제로 한다. 이 조건이 성립하지 않으면 적분 또는 면적분에 의한 치수효과의 설명에는 무리가 있다. 이러한 점을 해결하기 위해서는 파괴의 기구를 고려한 확률론적 고찰이 필요로 하게 된다.

따라서, 본 연구에서는 국부적으로 잠재하는 결합의 크기가 중요한 문제로 되는 최성파괴의 경우에 대해서 확률모델을 구성하고 수치실험에 의하여 시험편의 인장강도의 파괴확률을 구하여 결합의 수에 따른 강도의 변동과 치수효과에 대하여 검토한다.

2. 해석방법

2.1 강도의 확률론적 모델

시험편의 형상은 Fig. 1과 같은 3차원적인 각재이고, 인장력의 방향은 x방향으로 한다. 최성파괴는 재료내의 여러 결함 중 가장 최약의 결함에 의하여 지배된다고 가정하여 시험편 내부의 결함이나 결함의 위치가 통계적 법칙성을 따른다고 전제하고 다음과 같은 모델을 설정한다.

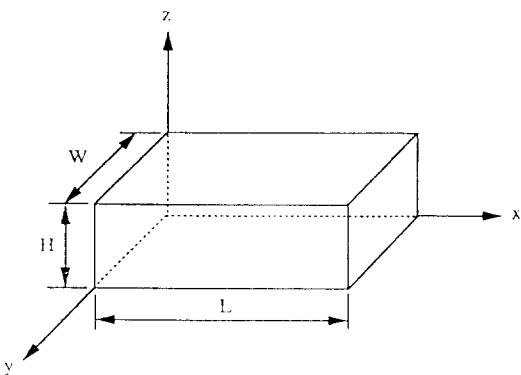


Fig. 1 Configuration of the specimen and the coordinate system

1) 미소한 균열상의 결합이 시험편 중에 분포하고, 그들 중 최약의 결합에 의하여 시험편의 강도가 결정되는 것으로 한다.

2) 결합은 yz 면내의 원판상 결합으로 한다. 또, 시험편 내의 결합의 중심위치는 랜덤한 위치에 발생한다.

3) 결합의 크기는 2-parameter Weibull 분포에 따르는 것으로 한다.

4) 시험편내의 결합 수는 단위체적당의 결합밀도와 시험편의 체적과의 곱으로 주어지는 것으로 한다.

5) 파괴는 파괴역학적 조건에 의하여 지배된다. 단, 재료파라메터 K_{IC} (한계응력확대계수)는 시험편 내에서 일정하지 않고 각 점에서 다르며, 공간적 확률분포를 하는 것으로 한다. 이 분포도 2-parameter Weibull 분포에 따른다고 가정한다.

6) 결합의 상호작용은 없는 것으로 한다.

7) 결합은 시험편의 내부결합만을 대상으로 한다.

전체 1)은 Weibull의 최소치 확률통계이론의 가정이고 이것은 종래 많이 행하여지고 있는 것이다.

또, 2)-4), 6), 및 7)은 취성적 파괴 모델에 자주 이용되는 가정이다. 5)는 실질적으로 타당한 것이라 생각된다.

2.2 인장강도

취성재료의 파괴에 대해서는 파괴역학의 출발점인 Griffith의 파괴조건식이 있고 이로부터, 균열선단에서의 응력과 변형률을 일의적으로 나타내는 파라메터로서 응력확대계수를 도입하여 파괴를 논할 수 있다.

장방형 면내의 원판상 결합에 인장응력 σ 가 작용하는 경우, 응력확대계수의 최대치는 자유표면에 가장 가까운 점에 발생한다. 그때의 응력확대계수 K 는 다음식으로 주어진다¹¹⁾.

$$K = M_T \sigma \sqrt{\pi a} \left(\frac{2}{\pi} \right) \quad (2)$$

여기서, M_T 는 유한체의 경우에 대한 보정계수이다. 이 M_T 는 다음식을 이용하였다¹¹⁾.

$$M_T = 1.283 \left(\frac{a}{h} \right)^4 - 1.400 \left(\frac{a}{h} \right)^3 + 0.541 \left(\frac{a}{h} \right)^2 - 0.066 \left(\frac{a}{h} \right) + 1.001 \quad (3)$$

여기서, h 는 자유표면에서 결합 중심위치까지의 거리이다.

식 (2)를 등가균열길이 l 로 표현하면¹¹⁾,

$$l = a (2 M_T / \pi)^2 \quad (4)$$

로 주어진다. 세라믹스의 인장강도의 평가에 등가균열길이를 이용하는 방법, 즉 다음식을 이용한다⁸⁾.

$$\sigma = \frac{K_C}{\sqrt{l}} \quad (5)$$

여기서, K_C 는 재료의 파라메터(한계응력확대계수)이다. 시험편내의 각점에서 재료의 파라메터가 다른 경우에는 $K = K_{IC}$ 가 성립하는 점이 파괴의 발생점으로 된다. 지금, 응력 σ 가 작용하고 있을 때 각 점에서의 K 치를 $K_{Ic}(\sigma)$, K_{IC} 를 K_{ICc} 라 하면, 각 점마다에 $K_{IC} = K_{Ic}(\sigma)$ 를 만족하는 σ 를 σ_{cri} 로 쓰면, σ_{cri} 이 최소의 점에서 파괴가 발생한다. 즉, 시험편의 인장강도는 최소의 σ_{cri} 로 결정된다.

2.3 Weibull의 통계적 치수효과

기준 시험편의 강도분포를 다음식과 같은 3-parameter Weibull 분포로 한다.

$$F(\sigma) = 1 - \exp \left\{ - \left(\frac{\sigma - \gamma}{\beta} \right)^\alpha \right\} \quad (6)$$

기준 시험편의 n 배한 시험편의 강도의 확률분포 함수는 최약 링크 모델에 의하여 다음과 같이 된다.

$$F(\sigma) = 1 - \exp \left\{ - \left(\frac{\sigma - \gamma}{\beta(n)^{-1/\alpha}} \right)^\alpha \right\} \quad (7)$$

치수가 다른 강도 분포의 파라메터 사이에는

$$\begin{aligned} \alpha' &= \alpha \\ \beta' &= \beta(n)^{-1/\alpha} \\ \gamma' &= \gamma \end{aligned} \quad (8)$$

의 관계가 성립한다. 이들의 관계를 이론 Weibull이라 부르기로 한다.

2.4 수치실험방법

Fig. 2는 전절에서 논한 확률모델에 기초하여 파괴기구를 고려한 취성파괴의 수치실험의 흐름도이다. 이하, 본 방법의 알고리즘을 간단히 논한다.

- Step 1. 시험편내의 결함의 중심위치를 일양난수에 의해 방향좌표에 대해서 발생시킨다.
- Step 2. 발생한 각각의 중심위치에서의 결함의 크기를 역함수법에 의해 계산한다.
- Step 3. Step 2의 결과를 이용해서 식(4)에 의한 등가균열길이를 계산한다.
- Step 4. 각각의 결함에 대한 한계응력확대계수를 역함수법에 의해서 발생한다.
- Step 5. 시험편의 파괴강도를 결정한다
- Step 6. 반복하여 시험편 수 만큼 파괴강도를 발생시킨다.

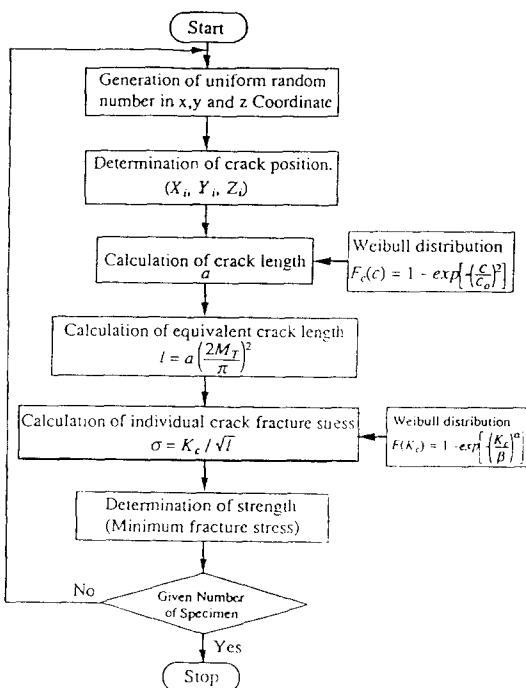


Fig. 2 Flow chart of the Monte Carlo simulation of fracture strength

또한, 본 수치실험에 사용한 각 입력 파라메터는 일반적인 세라믹스의 파괴인성치 및 결함의 크기를 참고로 하여 결정하였으며 Table 1에 나타낸다.

시뮬레이션에 의해 발생한 결함의 위치의 일례를 Fig. 3에 나타낸다. 실제 결함이 겹치는 경우에도 각각 독립한 결함이라 가정하여 강도를 결정하였다.

Table 1 Input parameters used in the simulation

type of crack	crack density per unit volume, μ	crack size distribution(μm)		critical-SIF distribution ($M\text{Pa}\sqrt{\mu\text{m}}$)	
		shape parameter	scale parameter	shape parameter	scale parameter
inherent crack	10 /mm ³	2.0	30.0	20.0	3500

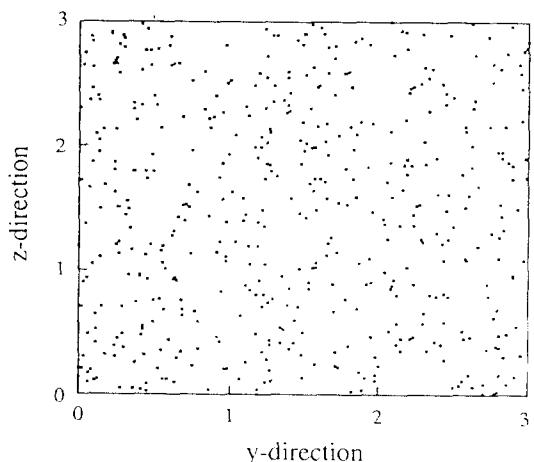


Fig. 3 Example of the crack positions distributed randomly in yz-plane

3. 수치실험결과 및 고찰

3.1 결함수에 의한 인장강도의 분포

단면($W \times H$) $3 \times 3\text{mm}$, 길이(L) 10mm 의 각재 시험편 중에 랜덤한 크기의 원판상 결함을 500, 1000, 1500개 랜덤한 위치에 발생시켰다. 50개의 시험편에 대해서 얻은 인장강도의 결과를 Fig. 4에 나타낸다. 인장강도의 누적확률은 평균순위법에 의하여

구하였다. 그림 중의 실선은 Weibull 분포함수이다. 동일 체적내에서 결함수가 증가하면 표면근방에 결함이 존재할 확률이 증가하므로, 최대직경의 결함이 시험편 중앙부분에 존재하여도 표면에서 가까운 결함이 시험편의 강도를 지배하므로 인장강도가 감소하는 결과를 보이고 있다. 한편 분포의 형상계수는 거의 동일한 결과를 보이고 있다고 할 수 있으나 그 척도계수는 결함수의 증가에 따라 감소하는 경향을 나타내었다. 그리고 위치계수도 결함수의 증가에 따라 다소 증가하는 경향이었다. 이상의 영향을 고찰하기 위해서는 많은 시험편수를 요한다고 할 수 있다.

결함수와 평균강도와의 관계를 Fig. 5에 나타내었다. 일반적으로 결함수가 증가하면 평균강도는 감소하는 경향을 나타내고 있으며 강도의 일반적 성질을 잘 반영하고 있다고 생각된다. 본 연구에서는 표면결함을 생각하지 않고 내부결함만을 대상으로 하고 있지만 이러한 변화는 파괴 원인이 되는 내부결함의 위치가 지배적이지 않은가 생각된다.

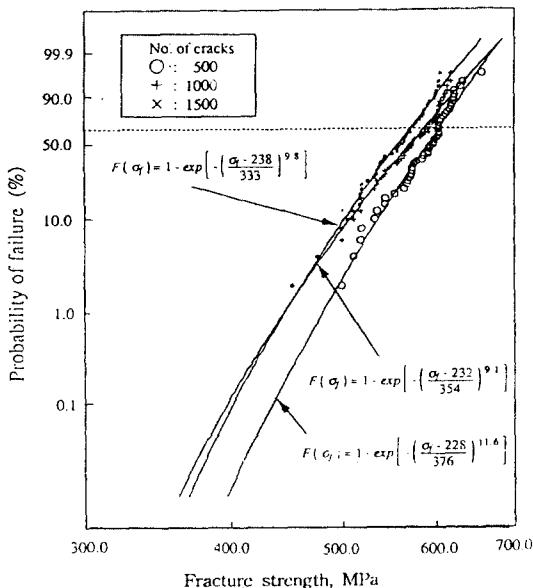


Fig. 4 Changes of the Weibull distribution depending on the number of cracks in the same volume (simulation)

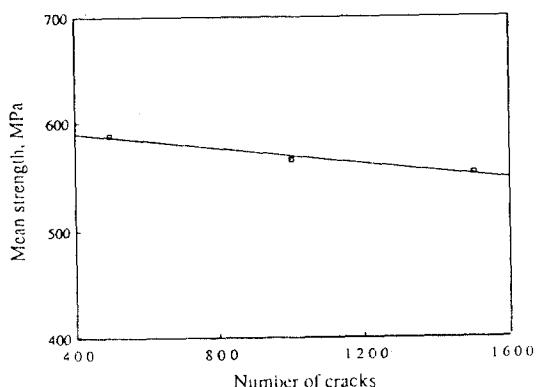


Fig. 5 Relation between mean strength and the number of cracks

3.2 시험편 치수에 의한 인장강도의 분포

인장강도가 시험편 크기에 미치는 영향을 최약령크가설에 의하여 고찰하기 위해 시험편 치수변화에 따른 인장강도의 수치실험 결과를 Fig. 6에 나타낸다. 그림 중의 실선은 직접탐색법으로 구한 Weibull 분포함수이다.

Weibull 분포의 $9 \times 9 \times 30mm$ 의 시험편에서는 다른 큰 형상계수의 값을 나타내지만 시험편 치수가 변화하여도 약 9정도의 거의 동일한 값을 보이고 있다. 실제 시험편에 의한 실험결과¹⁵⁾와 마찬가지로 치수 변화에 의해서 시험편의 강도가 변화하고 있음을 알 수 있다. 따라서 본 확률모델에 의한 계산이 실제의 세라믹스의 파괴현상을 어느 정도 표현하고 있다고 생각된다. 인장강도의 평균치는 시험편의 증가와 더불어 감소하고 거의 비슷한 값을 나타내었다. Fig. 7에 각 시험편에 대한 Weibull 계수의 실험치와 최약령크 이론에 의해 구한 이론 Weibull 실선과 비교하여 나타내었다. 또한 Table 2에 이론치와 수치실험 결과치를 정리하여 나타내었다. 그림에서 알 수 있듯이 시험편 크기가 증가하면 수치실험 결과의 분포가 이론 Weibull 분포보다는 우측에 분포함을 알 수 있다. 이것은 동일 파괴확률에 대하여 이론 Weibull 결과가 안전측에 있다는 것을 의미하지만, 기준치수의 시험편보다 작은 부분의 강도를 추정하면 위험측의 추정이 될 가능성이 있다. 따라서 치수효과에 대한 강도추정

에 충분한 주의가 요구된다. 그러나, 과도한 안전을 확보한다는 것은 경제적인 손실을 초래하므로 주의할 필요가 있다.

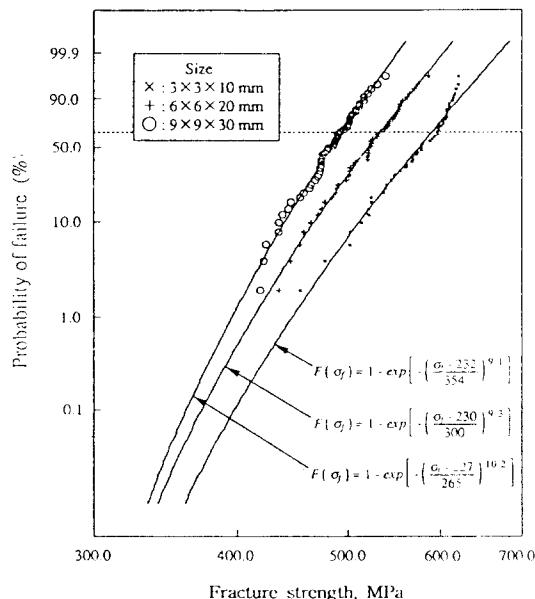


Fig. 6 Weibull distribution of tensile strength (simulation)

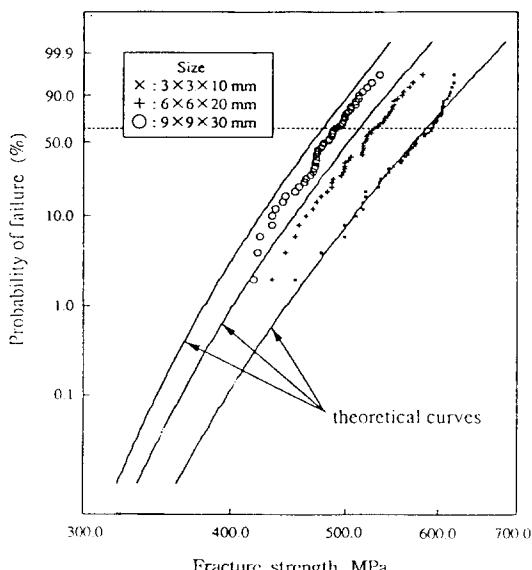


Fig. 7 Comparison of the simulation results with theoretical curves for tensile strength

Table 2 Comparison of the simulation results with theoretical Weibull

Specimen size(mm)	3-parameter Weibull distribution			Theoretical Weibull distribution			Fracture strength (MPa)	
	α	β	γ	α'	β'	γ'	mean	C.O.V
3×3×10	9.1	354	232	9.1	354	232	567	0.077
6×6×20	9.3	300	230	9.1	282	232	514	0.071
9×9×30	10.2	265	227	9.1	246	232	479	0.062

종래 세라믹스의 치수효과에 의한 강도저하는 유효체적^[16]의 방법을 이용해서 Weibull 통계에 의해 평가하고 있다. 유효체적과 Weibull 분포함수의 특성강도(scale parameter, β)와의 관계를 Fig. 8에 나타낸다. 유효체적이 증가하면 특성강도는 감소하고 있으며 이론 Weibull의 특성강도가 더 크게 감소하고 있음을 알 수 있다.

Fig. 9는 Weibull 통계해석에 자주 이용되고 있는 유효체적과 수치실험에서 얻은 평균 인장강도와의 관계를 log-log 그래프로 나타낸 것이다. 기준치수 보다도 큰 치수의 강도추정에는 안전측의 추정이 가능하다고 할 수 있지만 기준치수 보다도 적은 치수의 강도추정에는 위험측의 추정이 될 가능성이 있다. 평균강도는 유효체적에 의하여 평가할 수 있는 것처럼 보인다. Weibull 통계이론에 의하여 모든 경우에 α 가 동일하다면, 다음식이 성립한다.

$$\frac{\sigma_{m2}}{\sigma_{m1}} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{1/\alpha} \quad (9)$$

이 식에 의한 $\alpha=9.1$ 에 대한 기준시험편의 2배, 3배한 시험편의 추정 평균강도를 구해보면 각각 451, 395MPa이며 Fig. 9에 함께 나타내었다. 유효체적에 의한 평균강도의 설명이 가능한 것처럼 보인다. 그러나, 유효체적을 이용한 Weibull 해석에 있어서 가장 중요한 것은 Weibull 분포의 형상계수가 일정하다는 조건이다. 그러나, 실제로 본 수치실험 결과에서 보는 바와 같이 Weibull의 형상계수는 완전히 일치한다고 할 수 없으며, Fig. 8에서 보는 바와 같이 그 척도계수도 이론보다 다소

큰 값을 보이고 있다. 형상계수의 변동은 일반적으로 파괴에 대한 결합의 형태 또는 분포 등에 의한다고 하고 있지만 본 수치결과에서도 변화하므로 이 영향에 대해서는 여러 각도에서의 이론적 실험적 고찰이 요구된다. 이상과 같이 치수효과에 의한 시험편의 강도의 변화를 Weibull 통계이론에 의해서 설명하는 것은 다소 무리한 점이 있음을 알 수 있다.

따라서, Weibull 통계이론에 의한 강도의 해석에 충분히 주의 할 필요가 있다고 사료된다.

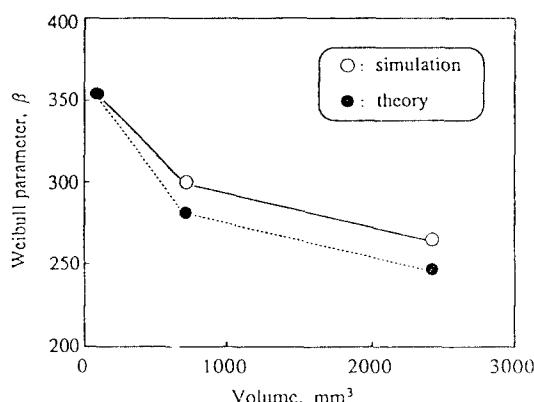


Fig. 8 Relation between Weibull parameter β and specimen volume

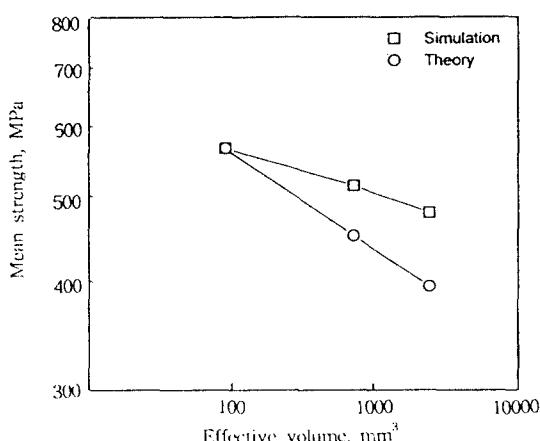


Fig. 9 Relation between mean strength and effective volume

4. 결 론

국부적으로 잠재하는 결합의 크기가 중요한 문제로 되는 취성파괴의 경우에 대해서 확률모델을 구성하여 수치실험에 의하여 시험편의 인장강도의 파괴확률을 구하여 결합의 수에 따른 강도의 변동과 치수효과에 대하여 검토한 결과 최약링크가설에 의한 강도의 치수효과 설명에 있어서 Weibull의 형상계수와 위치계수가 변화하므로 실제적 적용에 무리가 있음을 알았다. 소형 시험편에 의한 실험결과를 이용하여 대형 시험편의 강도를 추정함에 있어서 유효체적을 이용한 방법은 안전측의 평가가 될 가능성이 있으나, 기준시험편 보다 적은 강도의 추정에는 무리가 있음을 알았다. 이와 같이 치수효과에 의한 강도의 추정법에 대해서는 많은 검토가 필요하다.

5. 참고문헌

- 岡部永年, “セラミックス部品の強度評価への應用”, 材料, Vol.39, NO.437, PP.119-125, 1990
- K. Ando et al, “Process zone size failure criterion and Probabilistic Fracture Assessment Curves for ceramics”, Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct. Vol.15, NO.2, PP.139-149, 1992
- A. G. Evans and R. L. Jones, “Evaluation of a Fundamental Approach for the Statistical Analysis of Fracture”, J. Am. Ceram. Soc., Vol.61, NO.3-4, PP.156-160, 1988
- J. Lamon, “Statistical Approaches to Failure for Ceramic Reliability Assessment”, J. Am. Ceram. Soc., Vol. 71, No.2, PP.106-112, 1988
- R. L. Jones and D. J. Rowcliffe, “Tensile Strength Distributions for Silicon Nitride and Silicon Carbide Ceramics”, Am. Ceram. Soc. Bull., Vol.58, NO.9, PP.836-839, 1979
- Y. Katayama and Y. Hattori, “Effects of Specimen Size on Strength of Sintered Silicon Nitride”, Comm. Am. Ceram. Soc. Oct. PP.C164-C165, 1982

- 7) K. Matsusue, K. Takahara and R. Hashimoto, "Strength Evaluation Test of Hot-pressed Silicon Nitride at Room Temperature", Yogyo-Kyokai-Shi, Vol.90, NO.4, PP.168-174, 1982
- 8) G. K. Bansal and H. Duckworth, "Strength-Size Relations in Ceramic Materials", J. Am. Ceram. Soc., Vol.59, NO.11, PP.472-478, 1976
- 9) S. Harada, N. Noda, T. Endo and M. Nagano, "Effect of Artificial Crack Length and Specimen Size on Bending Strength and Fracture Toughness of Hot-Pressed Silicon Nitride", J. SMJ, Vol.37-419, PP.28-33, 1988
- 10) S. Dutta, "Strength Distribution in Commercial Silicon Carbide Materials", J. Am. Ceram. Soc., Vol.71, NO.11, PP.474-479, 1988
- 11) Y. Taniguchi, J. Kitazumi and T. Yamada, "A Study Strength and Size Effect of Ceramics by Computer-Simulated Experiments", J. Soc. Mat. Sci. Japan, Vol.38-435, PP.64-69, 1989
- 12) E. J. Gumbel, "Statistics of Extreme", Columbia Univ. Press, 1958
- 13) W. A. Weibull, "Statistical Distribution Function of Wide Applicability", J. Appl. Mech., Vol.18, NO.3, PP.293-297, 1951
- 14) R. C. Shah and A. S. Kobayashi, ASTM STP 513, PP.3-12, 1972
- 15) G. K. Bansal and H. Duckworth, "Effects of Specimen Size on Ceramic Strengths", Fract. Mech. Ceram., Vol.3, PP.189-188, 1979
- 16) 西田俊彦, 安田榮一編著, "セラミックスの力学的特性評価", 日刊工業新聞社, 1991