

◎ 論 文

해양구조물의 피로해석기법에 대한 검토 및 전산프로그램의 개발

이 현업*

(96년 3월 15일 접수)

A Review on Fatigue Analysis of Offshore Structures and Development of a Computer Program

Hyun-Yup Lee*

Key Words : Fatigue(피로), Offshore Structure(해양구조물), Probability of Fatigue Failure
(피로파괴률), Computer Program(전산프로그램)

Abstract

For fatigue analysis of offshore structures, existing methods have been reviewed and a computer code has been developed on PC. As methods to estimate the probability distribution of the fatigue stress, three methods(the deterministic method, the stochastic method, and the simplified method) are used in this code, to choose the appropriate method according to the situations. This code estimates damage ratios, fatigue lives, and probabilities of fatigue failure considering scatterness of SN-data, based on linear damage rule and SN-curves. Also, allowable stress for the design extreme wave can be calculated by the simplified method.

1. 서 언

해양구조물의 피로파괴에 대한 안전확보는 21세기 산업이라 불리우는 해양개발에 있어서 필수적인 명제라 아니할 수 없다. 그러나, 피로파괴에 대해서는 현상자체에 대한 이론적 배경도 충분히 개발되어 있지 못하고, 특히 해양구조물의 경우에는 피로파괴를 유발하는 하중이 파도와 같은 환경에

의한 것이어서 더욱 불확실한 요소가 많이 존재하게 된다. 따라서 해양개발을 위해서는 해양구조물의 피로설계기법이 시급히 개발·확립되어야 한다. 고정식 해양구조물의 피로설계에 대해서는 비교적 많은 연구와 경험자료가 발표되어 있으나¹⁾⁻⁷⁾, 부유식 해양구조물에 대해서는 그렇지 못한 실정이다. 또한 해양구조물의 피로해석을 위한 기존의 상용프로그램은 package화 되어 있기 때문에, 이

* 홍익대학교 조선해양공학과

용하기가 용이하지 않으며 또한 사용자의 필요에 따라 수정또는 보완하여 사용하기가 어렵다.

따라서, 본 연구에서는 해양구조물의 피로해석에 대하여 기존의 방법과 경험자료들을 검토·정리하였으며, 또한 그 내용에 대해 전산프로그램(FAT-OFF1)을 개발하였다. 이 전산 프로그램에서는 사용자가 상황에 따라 합당한 방법을 선택할 수 있도록 일반적으로 사용되고 있는 세가지 기법(the deterministic method, the stochastic method, the simplified method) 모두를 전산화하였다.

FATOFF1은 SN-curve와 선형손상법칙을 사용하여, 누적손상계수와 피로수명을 계산하며, 또한 SN-data의 산란성을 고려하여 누적손상계수에 따른 피로파괴률을 산정한다. Simplified Method로는 설계최대파에 대한 허용응력도 구할 수 있다. 본 전산프로그램은 산업현장에서 용이하게 사용할 수 있도록, PC용으로 개발하였고 사용된 언어는 Fortran77이며 입력자료는 사용자와 대화형식으로 터미널에서 입력하도록 되어 있다.

2. SN-data에 의한 피로해석

해양구조물의 피로해석에서는 구조물이 일생동안 받는 피로응력범위(Fatigue stress-range)의 확률분포를 구한 다음, SN-data와 선형손상법칙을 이용하여 아래와 같이 누적손상계수, D ,를 계산한다.

$$D = \int_0^{\infty} \frac{N}{N_{SN}(\Delta\sigma)} p(\Delta\sigma) d\Delta\sigma \quad (1)$$

$\Delta\sigma$: 피로응력범위(peak-to-peak value)

N : 피로응력의 총 cycle 수

$p(\Delta\sigma)$: 피로응력범위의 확률분포 함수

여기서, $N_{SN}(\Delta\sigma)$ 는 응력범위가 $\Delta\sigma$ 인 피로응력에 의하여 파괴에 이르는 cycle 수이다. 피로설계에서는 일반적으로, 식(2)와 같이 피로강도시험자료(일정 진폭을 갖는 정현파형의 피로응력을 가하였을 때 파괴에 이르는 cycle 수)를 log-log scale에서 선형회귀해석(Linear Regression Analysis)을 하여 얻은 최적직선에서 $q \log s$ 만큼 내린 값을 사용한다.

$$\begin{aligned} \log N_{SN} &= \log a - m \log \Delta\sigma - q \log s \\ &= \log \bar{a} - m \log \Delta\sigma \end{aligned} \quad (2)$$

$\log a$ 와 $-m$ 은 최적직선의 절편과 기울기이고 $\log s$ 는 SN-data의 log scale에서의 표준편차이며, 본 전산프로그램에서는 각 용접부위에 대한 DnV의 자료를 database화 하였다^{3),8)}. q 의 값으로는 일반적으로 2를 사용하며 중요한 부재의 경우에는 3을 사용하기도 하는데, 그 의미는 3장에서 설명한다. 식(2)를 이용하면 식(1)의 손상계수는 다음과 같이 표현된다.

$$D = \int_0^{\infty} \frac{N \Delta\sigma^n p(\Delta\sigma)}{a} d\Delta\sigma \quad (3)$$

또한 이 식에서, 요구되는 누적손상계수를 대입하면 피로수명(N)을 계산할 수 있다.

3. SN-data의 산란성에 의한 피로파괴률의 추정방법

SN-data의 산란성에 의한 피로파괴률은 시험자료의 산란성을 lognormal분포(log scale에서의 정규분포)로 가정하여 다음과 같이 구한다. 주어진 응력범위로 n cycles를 받을 때 그 응력으로 파괴에 이르는 cycle 수를 N_{SN} 이라 하면, 그 때의 피로파괴률, P_f ,는 다음과 같이 손상계수의 함수로 표현된다.

$$\begin{aligned} P_f &= \int_{-\infty}^{\log n} \frac{\exp\left[-\frac{(x - \log N_{SN} - q \log s)^2}{2(\log s)^2}\right]}{\sqrt{2\pi \log s}} dx \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} ERF\left(\frac{\beta}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned} \quad (4)$$

여기서,

$$ERF(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-t^2} dt$$

$$\beta = \frac{\log N_{SN} + q \log s - \log n}{\log s}$$

$$= q - \frac{\log \frac{n}{N_{SN}}}{\log s}$$

$$= q - \frac{\log D}{\log s}$$

이 식은 균일한 진폭을 갖는 응력에 대해 유도된 식이지만, 해양구조물에서와 같이 변동진폭의 응력을 받게 되는 경우에도 선형손상법칙에 의하여 이식을 적용할 수 있다.

일반적으로 누적손상계수가 1보다 작게 되도록 피로설계를 한다. 예로써, q 의 값을 2를 사용하였는데 누적손상계수가 1이라면 SN-data의 산란성에 의한 파괴확률은 식(4)로부터 2.27%가 되며, q 의 값을 3를 사용하였는데 누적손상계수가 1이라면 파괴확률은 0.13%가 된다.

4. 해양구조물의 피로해석 기법

해양구조물이 일생동안 받는 피로응력범위의 확률분포를 구하는 데는 다음 절의 3가지 기법이 일반적으로 사용되고 있다. 본 연구에서는, 사용자가 필요에 따라 적당한 방법을 선택할 수 있도록 이 3가지 방법 모두를 전산프로그램화 하였다.

4.1 The Deterministic Method

이 기법에서는, 주어진 파도방향에 있어서 주어진 파고에 대해 주기를 wave scatter diagram이나 스펙트럼으로 부터 근사적으로 가정^{3)(8,10,11)}한 다음, 유체역해석과 구조해석을 통하여 혹은 fluid-solid 연성해석을 통하여 피로응력을 구한다. 따라서, 파고와 피로응력간의 비선형성은 쉽게 고려될 수 있으나, 구조물의 동적효과를 고려하기가 용이하지 않다. 본 전산프로그램에서는 각 방향의 각 파고에 의한 피로응력을 입력으로 받아들인다.

이 기법은 일반적으로 다음과 같은 과정으로 수행된다. 우선 설치해역에 대한 wave scatter diagram을 작성하여 대상 구조물이 일생동안 겪을 각 wave condition의 빈도수를 추정하고, 주어진 wave condition에서의 파고는 Rayleigh 분포를 갖는다고 가정한다³⁾⁽⁹⁾. 따라서, i번째 파도방향의 j번째 wave

condition에서의 파고에 대한 확률분포 함수, $p_{ij}(H)$,는 다음과 같이 표현된다.

$$p_{ij}(H) = \frac{4H}{H_{sij}^2} \exp\left[-\frac{2H^2}{H_{sij}^2}\right] \quad (5)$$

H_{sij} : i번째 방향의 j 번째 wave condition에서의 유의파고(significant wave height)

큰 파고에 의해 유발되는 피로응력이 작은 파고에 의해 유발되는 피로응력보다 크다고 가정하면, 피로응력의 확률분포, $p_{ij}(\Delta\sigma)$,와 파고의 확률분포, $p_{ij}(H)$,와의 사이에는 다음 식이 성립된다.

$$p_{ij}(\Delta\sigma)d\Delta\sigma = p_{ij}(H)dH \quad (6)$$

파고와 응력의 관계를 알면 이 식과 식(5)로 부터 응력의 확률분포를 알 수 있다. i번째 방향의 j 번째 wave condition에 의해 받게 되는 손상계수, D_{ij} 는 식(3)으로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$D_{ij} = \frac{4N_{ij}}{H_{sij}^2 a} \int_0^\infty H(\Delta\sigma_i(H))^m \exp\left[-\frac{2H^2}{H_{sij}^2}\right] dH \quad (7)$$

N_{ij} : 일생동안 i번째 방향의 j번째 wave condition에서의 파도의 수

$\Delta\sigma_i(H)$: i번째 방향의 파고 H 인 파도에 의한 피로응력범위

전체손상계수는 다음과 같이 이들의 합으로써 구한다.

$$D = \sum_i \sum_j D_{ij} \quad (8)$$

또한, 주어진 파도 방향에 있어서, 유의파고의 장기화를 분포는 아래의 식과 같이 Weibull 분포로 잘 표현되므로 이 분포를 이용하여 전체손상계수를 구할 수도 있다. 본 전산프로그램은 이 방법을 사용하였다.

$$P_i(H_s) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{H_s - x_{0i}}{b_i}\right)^k\right] \quad (9)$$

H_s : 유의파고

$P_i(H_s)$: i번째 방향에 있어서, 유의파고의 장기 누적확률분포함수

여기서, Weibull 계수(k_i, b_i, x_{0i})는 wave scatter diagram으로 부터 구한 누적분포확률과 가장 잘 일치하도록 결정한다⁹⁾.

주어진 wave condition에서, 파고에 대해 식(5)와 같이 Rayleigh 확률분포를 가정하면 주어진 방향에 대해 파고의 long-term 확률분포는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$p_i(H) = \int_{x_{0i}}^{\infty} p_i(H_s) p(H/H_s) dH_s$$

$$= \int_{x_{0i}}^{\infty} \frac{4Hk_i(H_s - x_{0i})^{k_i-1}}{b_i^{k_i} H_s^2} \exp\left[-\left(\frac{H_s - x_{0i}}{b_i}\right)^{k_i}\right] \exp\left[-\frac{2H^2}{H_s^2}\right] dH_s \quad (10)$$

$p_i(H)$: i번째 방향에서 파고의 장기확률분포함수

$p_i(H_s)$: i번째 방향에서 유의파고의 장기확률분포함수

i번째 방향의 파도에 의해 받게 되는 손상계수, D_i , 는 이 식을 이용하여 식(3)으로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$D_i = \int_0^{\infty} \frac{N_i (\Delta\sigma_i(H))^m p_i(H)}{a} dH \quad (11)$$

N_i : 일생동안 i번째 방향의 파도의 수

전체손상계수는 다음과 같이 이들의 합으로써 구한다.

$$D = \sum_i D_i \quad (12)$$

4.2 The Stochastic Method

이 기법에서는, 주어진 파도방향에 있어서 주어진 주기에 대해 파고를 근사적으로 가정하여^{3),8),10),11)} 그

방향, 주기, 파고를 갖는 파도에 의한 파로응력을 산정함으로써, 파로응력으로의 전달함수를 방향과 주파수만의 함수로 구한다. 따라서, 이 기법에서는 Deterministic Method와는 달리, 동적효과는 쉽게 고려될 수 있으나 파고와 파로응력간의 비선형성은 고려하기가 용이하지 않다. 본 전산프로그램에서는 전달함수를 입력으로 받아들인다. 스펙트랄 해석이라고도 불리우는 이 기법에서는, 파도에 대한 통계적 자료로서 파도스펙트럼이 요구된다.

이 기법은 다음과 같은 과정으로 수행된다. i번째 파도방향에 대하여, j번째 wave condition의 파도스펙트럼, $S_{\eta\eta}(\omega)$,와 전달함수를 이용하여, 다음과 같이 i번째 방향의 j 번째 wave condition에서의 파로응력에 대한 스펙트럼($S_{\Delta\sigma_{ij}}(\omega)$)과 rms 값($\Delta\sigma_{rmsij}$)을 구한다.

$$S_{\Delta\sigma_{ij}}(\omega) = G_i^2(\omega) S_{\eta\eta}(\omega) \quad (13)$$

$$\Delta\sigma_{rmsij}^2 = \int_0^{\infty} S_{\Delta\sigma_{ij}}(\omega) d\omega \quad (14)$$

$G_i(\omega)$: i번째 파도방향에서의 파도로 부터 파로응력으로의 전달함수

주어진 wave condition에 있어서, 파로응력진폭에 대해 Rayleigh 분포를 사용하면^{3),11)}, i번째 방향의 j 번째 wave condition에서의 파로응력범위의 확률분포 함수, $p_{ij}(\Delta\sigma)$,는 다음과 같이 주어진다.

$$p_{ij}(\Delta\sigma) = \frac{\Delta\sigma}{4\Delta\sigma_{rmsij}^2} \exp\left[-\frac{\Delta\sigma^2}{8\Delta\sigma_{rmsij}^2}\right] \quad (15)$$

이 식을 식(3)에 대입하면, i번째 방향의 j번째 wave condition에 의해 받게 되는 손상계수, D_{ij} ,와 누적손상계수, D ,는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$D_{ij} = (2\sqrt{2}\Delta\sigma_{rmsij})^m \frac{N_{ij}}{a} \Gamma(1 + \frac{m}{2}) \quad (16)$$

$$D = \sum_i \sum_j D_{ij} \quad (17)$$

여기서,

$$I(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

N_{ij} : i번째 방향의 j번째 wave condition에서의 일생동안의 파도의 수

4.3 The Simplified Method

Simplified Method는 다음에 설명하는 바와 같이 피로응력범위의 장기확률분포를 Weibull 분포로 표현하여 해석하는 기법으로, 식(23)에서 보듯이 손상계수가 몇 개의 계수의 함수로 표현된다. 따라서 이 기법은 단순한 해석이 요구되는 초기설계시 유용하게 사용될 수 있다. 이 기법에서는 파도에 대한 통계적 자료로서 설계최대파고(Design Extreme Wave Height)가 요구된다.

i) 방법에서는, 파고의 장기확률분포, $p(H)$,를 아래의 식과 같이 Weibull분포로 근사적으로 표현하고³⁾, 또한 피로응력범위를 아래의 식과 같이 파고의 지수함수로 가정한다³⁾.

$$p(H) = \ln N_t \frac{\epsilon}{H_d} \left(\frac{H}{H_d} \right)^{\epsilon-1} \exp \left[- \left(\frac{H}{H_d} \right)^{\epsilon} \ln N_t \right] \quad (18)$$

$$\Delta\sigma(H) = CH^{\alpha} \quad (19)$$

N_t : 일생동안의 파도의 수

H_d : 설계최대파고(정의:설계최대파고보다 큰 파고가 올 확률=1/ N_t)

ϵ : Weibull shape parameter

큰 파고에 의한 피로응력이 작은 파고에 의한 피로응력보다 크다고 가정하면 식(6)이 성립되는데, 이 식에 식(18)과 (19)를 대입하면 피로응력범위의 확률분포, $p(\Delta\sigma)$,는 아래와 같이 Weibull 분포를 갖게 된다.

$$p(\Delta\sigma) = \frac{\gamma}{q} \left(\frac{\Delta\sigma}{q} \right)^{\gamma-1} \exp \left[- \left(\frac{\Delta\sigma}{q} \right)^{\gamma} \right] \quad (20)$$

여기서

$$\gamma = \frac{\epsilon}{\alpha} \quad (21)$$

$$q = \frac{\Delta\sigma_d}{(\ln N_t)^{\frac{1}{\gamma}}} \quad (22)$$

$\Delta\sigma_d$: 설계최대파에의한 피로응력 범위($= CH_d^{\alpha}$)

식(20)과 식(22)을 이용하여 식(3)의 적분을 수행하면, 손상계수, D ,는 다음과 같이 된다.

$$D = \frac{N_t}{a} \frac{\Delta\sigma_d^m}{(\ln N_t)^{m/\gamma}} I(1 + \frac{m}{\gamma}) \quad (23)$$

이 식을 N_t 에 대해 풀어서 피로수명을 계산할 수 있으며, 또한 설계최대파고에 대한 허용응력은 이 식을 $\Delta\sigma_d$ 에 대해 정리한 다음 식을 이용하여 산정한다.

$$\Delta\sigma_d = \left(\frac{D a}{N_t I(1 + \frac{m}{\gamma})} \right)^{\frac{1}{m}} (\ln N_t)^{\frac{1}{\gamma}} \quad (24)$$

Weibull shape parameter, γ ,에 대해서는 참고문헌[3]에 파고의 long term 확률분포, 수심, 구조물의 종류, 동적효과, 부재의 구조물에서의 위치 등에 따라 정리한 결과를 활용할 수 있으며, 식(18)과 식(20)의 ϵ 과 α 를 산정하여 직접 계산할 수도 있다. 본 전산프로그램에서는 Weibull shape parameter, γ ,를 입력으로 받아들인다.

5. 결 언

본 연구에서는 해양구조물의 피로해석에 관한 기존의 방법을 검토·정리하였으며, 또한 그 내용에 대해 전산프로그램을 개발하였다. 이 프로그램은 산업현장에서 용이하게 사용할 수 있도록, PC용으로 개발하였으며 입력자료를 터미널에서 대화형식으로 입력 시키도록 되어있다. 또한, 원하는 부분을 수정하거나 추가자료를 보충하기가 쉽도록 개발하였다.

사용자가 상황에 따라 합당한 방법을 선택할 수 있도록 현재 일반적으로 사용되고 있는 the deterministic method, the stochastic method, the simplified method 모두를 전산화하였다. 본 전산프로그램은 SN-curve와 선형손상법칙을 사용하여

누적손상계수와 피로수명을 계산하고, 또한 SN-data의 산란성을 고려하여 누적손상계수에 따른 피로파괴률을 산정한다. Simplified Method로는 설계최대파(design extreme wave)에 대한 허용응력도 구할 수 있다.

Simplified Method에 대한 검증으로써, 참고문헌³⁾의 예제에 대해 터미널 입력과 출력을 Table 1

Table 1 Terminal Input for Allowable Stress Calculation by the Simplified Method

```
*****
FATOFF1
Fatigue Analysis Program
for Weld Joints of Offshore Structures
*****
*Enter output-filename
(up to 12 characters)
out.31
*Enter to calculate
 1 : Cumulative Damage Ratio
 2 : Fatigue Life
 3 : Maximum Allowable Stress for
      Design Wave by Simplified Method
3
*Enter Class of Joint
(B, C, D, E, F, F2, G, W, T)
(Refer to Manual)
t
*Enter 1; if in Water
    with Cathodic Protection
  2; if in Air (Not Ready Yet)
1
*Enter number of standard deviations to be
lowered
 1 : 84.13% Probability of Survival
  2 : 97.72% Probability of Survival
  3 : 99.87% Probability of Survival
      (2 is generally used.)
2
*Enter Life Time of the Offshore Structure
in years
50
*Enter Average Wave Period in seconds
6
*Enter Value of Weibull Parameter h
1.1
```

과 Table 2에 실었는데 참고문헌의 결과와 잘 일치한다. 다른 기법의 출력 예로써, Table 3에 Deterministic Method에 의한 피로수명 산정에 대한 출력을 실었으며, Table 4에 Stochastic Method에 의한 손상계수 산정에 대한 출력을 실었다. 추후에 대상구조물의 자료를 입수하게 되어 이 기법들에 대해서도 검증하게 되길 기대한다.

Table 2 Output for Allowable Stress Calculation by the Simplified Method

Allowable Stress and Probability of Failure (Simplified Method)			
Input :	Damage Ratio	Allowable Stress [Mega Pascal]	Probability of Failure
* T Joint in Water with Cathodic Protection	.1	.7479E+02	.000000%
* Lifetime =50.0 years	.2	.9423E+02	.000075%
* Average Wave Period =6.00 seconds	.3	.1079E+03	.002021%
* Weibull Parameter h =1.10	.4	.1187E+03	.015786%
	.5	.1279E+03	.065932%
	.6	.1359E+03	.190711%
	.7	.1431E+03	.435004%
	.8	.1496E+03	.842059%
	.9	.1556E+03	.1447272%
	1.0	.1611E+03	.2274909%
*The maximum allowable stress obtained above is for the thickness thinner than 32 mm.			
*Multiply the above results by $(32/t)^{0.25}$, if the plate thickness is more than 32 mm.			
*The above probability of failure is obtained by considering scatter of SN data.			

Table 3 Output for Fatigue Life Calculation
by the Deterministic Method

Fatigue Life and Probability of Failure (Deterministic Method)		
Input :		
* T Joint in Water with Cathodic Protection		
* Plate Thickness = 20.00 mm		
* Input Filename : det.inp		
(1)Wave Statistics		
(2)Fatigue Stress for Each Wave Height		
Damage Ratio	Fatigue Life [years]	Probability of Failure
.1	.8754E+01	.000000%
.2	.1751E+02	.000075%
.3	.2626E+02	.002021%
.4	.3502E+02	.015786%
.5	.4377E+02	.065932%
.6	.5252E+02	.190711%
.7	.6128E+02	.435004%
.8	.7003E+02	.842059%
.9	.7879E+02	1.447272%
1.0	.8754E+02	2.274909%
*The above probability of failure is obtained by considering scatter of SN data.		

Table 4 Output for Damage Ratio Calculation
by the Stochastic Method

Damage Ratio and Probability of Failure (Spectral Method)		
Input:		
* T Joint in Water with Cathodic Protection		
* Lifetime = 50.0 years		
* Plate Thickness = 20.00 mm		
* Input Filename : spc.inp		
(1)Wave Statistics		
(2)Transfer Functions for Each Frequency		
*** Results ***		
Cumulative Damage Ratio = .303		
Probability of Failure = .002161%		
*The above probability of failure is obtained by considering scatter of SN data.		

후 기

본 연구는 한국과학기술처에서 시행한 특정연구개발사업중 '94국제공동연구사업(울산대학교와 일본선박기술연구소)의 연구결과이다.

참고문현

- API RP2A, "Recommended Practice for Planning, Designing and Constructing Fixed Offshore Platforms", American Petroleum Institute, 13th Edition, January, 1982
- "Offshore Installations: Guidance on Design and Construction. New Fatigue Design Guidance for Steel Welded Joints in Offshore Structures", Recommendations of the Department of Energy "Guidance Notes", Revision Drafting Panel,August, 1983, Issue N
- Almar-Nass,A., "Fatigue Handbook", Tapir, Publishers, Trondheim, 1985
- Williams, A. K. and Rinne, J. E., "Fatigue Analysis of Steel Offshore Structures", Proceedings of the Institution of Civil Engineers 60, 635-654, 1976
- "Regulations for the structural design for the fixed structures on the Norwegian Continental Shelf", Norwegian Petroleum Directorate, 1977
- Marshall, P. W. and Luyties, W. H., "Allowable stresses for fatigue design", Proc. BOSS Conf, MIT, 1982
- Odland, J., "Response and Strength Analysis of Jack-up Platforms", Norwegian Maritime Research, Vol. 10, No. 4, 1982
- 울산대학교, "부유식 해양구조물에 관한 연구 -1차년도 보고서", 8장, 과학기술처 연구보고서, 1994
- Hogben, N., et al, "Global Wave", British Maritime Technology Limited, England, 1986
- Wilson,J.F., "Dynamics of Offshore Structures", John Wiley & Sons,Inc., New York, 1984
- Marshall, P.W. and Luyties,W.H., "Allowable Stress for Fatigue Design", BOSS 82, Boston, Aug. 1982