

## 유한수심 자유표면파 문제에 적용된 해밀턴원리

김 도 영\*  
(95년 12월 5일 접수)

### Hamilton's Principle for the Free Surface Waves of Finite Depth

Do-Young Kim\*

**Key Words** : Free surface wave(자유표면파), Variational principle(변분원리), Hamilton's principle(해밀턴원리), Canonical equation(카노니칼방정식), Nonlinear wave theory(비선형파이론), Higher order wave theory(고차파이론), finite depth(유한수심)

#### Abstract

Hamilton's principle is used to derive Euler-Lagrange equations for free surface flow problems of incompressible ideal fluid. The velocity field is chosen to satisfy the continuity equation *a priori*. This approach results in a hierarchical set of governing equations consist of two evolution equations with respect to two canonical variables and corresponding boundary value problems. The free surface elevation and the Lagrange's multiplier are the canonical variables in Hamilton's sense. This Lagrange's multiplier is a velocity potential defined on the free surface. Energy is conserved as a consequence of the Hamiltonian structure. These equations can be applied to waves in water of finite depth including shallow water and relatively deep water conditions. These equations are canonical generalization of Hamilton's equations given by Miles and Salmon.

#### 1. 서 론

유체동력학 문제에서 변분원리는 오래 전부터 사용되어져 왔다. 그러나 고전역학(classical mechanics)에서 일반적으로 쓰이는 운동에너지와 위치 에너지의 차로 정의되는 라그랑지안(Lagrangian)은 자유표면에서의 정확한 경계조건을 제공하지 못

하게 된다. Clebsch, Hargreaves, Bateman은 비점성, 비압축성 유체에 대한 라그랑지안으로 압력을 사용하였으나, 자유표면에서의 경계조건까지 만족한다는 것은 보여주지 못하였다<sup>1)</sup>. Luke는 Friedrichs, Garabedian & Spencer가 정상상태의 자유표면파 문제에서 적용한 변분원리를 비정상상태 문제에 적용하였다<sup>1)</sup>. 그리고, 압력을 라그랑지

\* 홍익대학교 조선해양공학과

안으로 사용할 경우 유체영역 내에서 속도장함수 (velocity potential)에 대한 라플라스방정식(Laplace equation)뿐만 아니라 자유표면에서의 경계조건도 포함되는 완전한 경계치문제가 구성됨을 보였다<sup>1)</sup>.

라그랑지안이 정의되면 오일러-라그랑제(Euler-Lagrange)방정식을 통하여 운동방정식을 얻을 수 있다. 고전역학에서는 해밀턴원리(Hamilton's principle)를 이용하여 운동방정식을 구하는 방법이 많이 사용되고 있다. 이러한 이유로 일반적으로 해밀턴역학(Hamilton mechanics)은 고전역학과 같은 의미로 불린다. Goldstein<sup>2)</sup>은 해밀턴역학의 기본적인 내용을 잘 설명하고 있다. 자유표면파 문제에 고전역학의 해밀턴원리와 구조가 매우 비슷한 형태의 변분원리가 적용될 수 있다. 그러나 라그랑지안 표현법(Lagrangian description)에서는 해밀턴원리를 쉽게 적용할 수 있지만 오일러리안 표현법(Eulerian description)에서는 어려움이 따르게 된다. 이러한 어려움은 Lin<sup>3)</sup>에 의해서 운동학적 구속조건을 통하여 입자의 궤도를 결정하는 것을 허용함으로써 해결되었다. Miles<sup>4)</sup>는 해밀턴원리에 따른 변분원리가 Luke의 변분원리와 동일함을 보여 주었다. Miles와 Salmon<sup>5)</sup>은 해밀턴원리의 대칭성을 가지는 근사식을 도입하면 에너지와 운동량이 보존된다는 점을 지적하였다. 해밀턴원리를 이용하면 얻어지는 장점 중 하나는 해밀턴역학 구조에서 얻어지는 카노니칼방정식(canonical equation)을 얻는다는 점이다. 일반적으로 해밀토니안을 이용하여 운동방정식을 얻는 과정 중 가장 어려운 점은 바닥부터 자유표면까지의 수직방향의 적분이다<sup>6)</sup>. Salmon<sup>7)</sup>, Miles와 Salmon<sup>6)</sup>은 유체가 수직 기둥 내에서 움직인다는 가정을 도입하여 비선형성(nonlinearity)과 분산(dispersion)이 모두 약한 경우에 적용되어질 수 있는 근사식을 얻었다.

기존의 해밀턴원리에서 얻은 근사식들은 고차로 확장성이 없는 경우가 대부분이다. 본 논문에서는 해밀턴원리에 따른 변분원리를 이용하여 비선형성이 강한 문제에도 적용할 수 있으며, 계층 구조를 가지는 방정식을 얻으려고 한다.

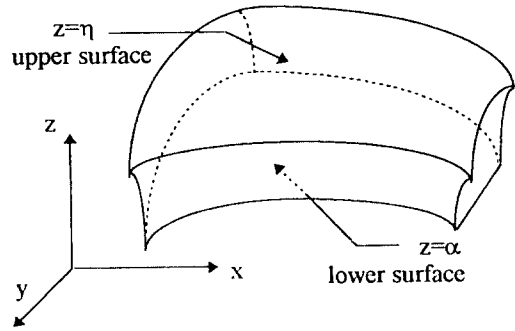


Fig. 1 Definition Sketch and the coordinate system.

## 2. 라그랑지안

유체는 비점성이며 비압축성이라고 가정을 한다. 유체의 밀도는  $\rho$ , 중력가속도는  $g$ 로 표시한다. 여기서 좌표계는 Fig. 1에서 표시한 3차원 직교좌표계를 사용한다. 유체영역은 두개의 물질면을 경계면으로 가진다. 이 두 면의 위치는 각각  $z = \alpha(x, y, t)$ , 그리고  $z = \eta(x, y, t)$ 에 위치한다. 일반적으로 아래 면은 바닥으로 고정되어 있으며 윗면은 자유표면으로 구성되어 있다. 본 논문에서는 바닥이 고정된 경우를 생각하기로 한다. 그러나 바닥이 자유표면인 경우도 큰 어려움 없이 고려되어질 수 있다.

유체영역에서의 운동에너지와 위치에너지는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$T = \frac{1}{2} \iiint \rho \vec{u} \cdot \vec{u} dV \quad (1)$$

여기서,  $\vec{u} = u(\vec{x}, t)$ 는 유동장에서의 속도벡터를 나타낸다.

$$U = \iiint \rho g z dV \quad (2)$$

압력  $P_e$ 가 자유표면상에서 한 일의 크기는 다음과 같다.

$$W = -\frac{1}{\rho} \iiint P_e dV \quad (3)$$

위의 식들을 토대로 다음과 같은 변분원리를 생각할 수 있다.

$$\delta I = \delta \int L_o dt = 0 \quad (4)$$

라그랑지안 함수(Lagrangian function) 또는 간단히 라그랑지안(Lagrangian)을 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$L_o = T - U + W \quad (5)$$

표면장력을 고려하고자 하는 경우는 표면장력에 의한 항을 식 (5)에 추가하면 된다. 서론에서 언급했듯이 자유표면과 물체에서는 식(4)만을 가지고 표현한 라그랑지안은 자유표면에서의 경계조건을 만족하지 못한다. 이를 만족하려면, 추가로 속도벡터가 운동학적인 경계조건들, 즉 유체영역  $D$ 에서의 연속방정식, 경계면  $\partial D$ 에서의 운동학적 구속조건을 만족해야 한다. 이러한 조건들은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad \text{in } D \quad (6a)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = V_n \quad \text{on } \partial D \quad (6b)$$

여기서  $\vec{n}$  은 유체영역 밖의 방향이 양인 법선 벡터이다. 특별히 자유표면에서는  $V_n = n_2$ 이다. 이제 자유표면과 물체에서의 운동학적 구속조건을 만족하는 새로운 라그랑지안은 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$L^* = L_o + \int_D \beta \nabla \cdot \vec{u} dV + \int_{\partial D} \phi_i (\vec{u} \cdot \vec{n} - V_n)_i dS \quad (7)$$

여기서  $\beta$ ,  $\phi_i$ 는 라그랑제 구속변수(Lagrange multiplier)이다. 식 (7)은 유체가 비점성, 비압축성이라는 가정만 포함한 엄밀한 식이 된다. Luke에 의하면 일반적으로 사용되는 라그랑지안  $L_o$ 와 압력을 라그랑지안으로 사용한 차이는 연속방정식이 되며, 속도장함수와 자유표면의 위치함수가 연속방정식을 만족하는 경우에는 두 가지의 변분원리가 동일하다는 것을 보였다<sup>1)</sup>. 따라서 식 (7)의 라그랑

지안은 Luke의 변분원리와 그리고 Miles의 변분원리와 일치한다. 김장환과 배광준<sup>8)</sup>은 두 가지의 변분원리를 제시하였다. 하나는 유체의 유동이 비회전성을 미리 만족하는 경우이고, 다른 하나는 연속방정식을 미리 만족하는 경우이다. 본 연구에서는 유동이 연속방정식을 미리 만족하는 경우의 변분원리를 이용하기로 한다.

본 논문에서는 수직방향 속도분포의 형태를 미리 가정한 함수로 전개하여 수직방향으로 적분된 근사적인 라그랑지안을 얻은 후, 이를 이용하여 헤밀토니안을 정의하고 운동방정식을 유도한다. 이러한 과정을 통하여 자유표면과 물체의 가장 문제점인 자유표면의 위치를 운동방정식 안으로 자연스럽게 포함시킬 수 있다. 미리 가정한 함수가 연속방정식을 만족하는 경우에는, 연속방정식에 관한 구속조건을 별도로 고려할 필요가 없다. 결과적으로 운동학적 구속조건은 자유표면과 바닥을 제외한 경계면에서의 운동학적 경계조건만으로 나타나게 된다. 연속방정식을 미리 만족하는 경우에는 라그랑지안을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$L^* = \int \int_{\partial D} \phi_i (\vec{u} \cdot \vec{n} - V_n) dS + L_o \quad (8)$$

만약 유체의 유동이 비회전성이라 가정할 수 있다면 속도장함수를 정의할 수 있고, 또한 운동량 보존식, 또는 운동방정식이라 불리는 오일러 방정식이 직접 적분되어 비정상상태에서도 쓸 수 있는 베르누이 방정식이 된다. 식(8)의 변분원리를 사용할 경우 유동장 내에서의 압력 분포는 베르누이 방정식에 의해서 얻어질 수 있다<sup>9)</sup>.

### 3. 해밀토니안과 운동방정식

이 절에서는 앞에서 정의한 라그랑지안과 해밀톤원리를 사용하여 운동방정식을 얻는 과정을 살펴보기로 한다. 식(8)은 비점성 비압축성 유체라는 가정 아래 엄밀한 식이다. 여기서 사용하게 될 시도함수(trial function)는 연속방정식을 만족시키는 형태를 취하기로 한다. 아래와 같은 형태의 3차원 속도장을 취하면 연속방정식이 자동적으로 만족되는 것을 알 수 있다.

$$\vec{v}(x, y, z, t) = \sum_{m=1}^K \frac{d\lambda_m(z)}{dz} \vec{\varphi}_m(x, y, t) \quad (9a)$$

$$w(x, y, z, t) = - \sum_{m=1}^K \lambda_m(z) \nabla \cdot \vec{\varphi}_m(x, y, t) \quad (9b)$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} \quad (9c)$$

여기서  $\lambda_m(z)$ 는 시도함수이며  $z$ 만의 함수이다. 이 함수는 수심에 따라서 적절한 형태를 선택하면 된다. 또  $\vec{\varphi}_m(x, y, t)$ 는 미지변수(unknown variable)이며 공간변수가 한 차원 줄어든 2차원임을 주목할 수 있다. 그리고,  $\vec{v}$ 는 속도벡터의  $x$ 와  $y$  성분을 가지는 이차원 벡터이고  $w$ 는 속도벡터의 수직 성분이다. 본 논문에서는  $\lambda_m(z)$ 를  $z^m$ 으로 선택한다. 이러한 함수는 Shields와 Webster<sup>9)</sup>가 사용하여 천수 및 유한수심 문제에 걸쳐 좋은 결과를 얻은 바가 있다. 이러한 시도함수를 이용하여 속도장을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\vec{v}(x, y, z, t) = \sum_{m=1}^K m z^{m-1} \vec{\varphi}_m(x, y, t) \quad (10a)$$

$$w(x, y, z, t) = - \sum_{m=1}^K z^m \nabla \cdot \vec{\varphi}_m(x, y, t) \quad (10b)$$

식(10)을 이용하여 식(8)에서  $L_0$ 에 포함되어 운동에너지를 나타내는 항의 적분 중 수직방향의 적분을 먼저 수행하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \int_a^\eta \vec{u} \cdot \vec{u} dz &= \int_a^\eta (\vec{v} \cdot \vec{v} + w w) dz \\ &= \sum_{m=1}^K \sum_{n=1}^K \left\{ \frac{mn}{m+n-1} [\eta^{m+n-1} - \alpha^{m+n-1}] \right. \\ &\quad \left. \vec{\varphi}_m \cdot \vec{\varphi}_n + \frac{1}{m+n+1} [\eta^{m+n+1} - \alpha^{m+n+1}] \right. \\ &\quad \left. \nabla \cdot \vec{\varphi}_m \nabla \cdot \vec{\varphi}_n \right\} \quad (11) \end{aligned}$$

마찬가지로 위치에너지와 압력에 의한 항의 수직방향의 적분을 수행하면 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} L_0 &= \iint dx dy \left[ \sum_{m=1}^K \sum_{n=1}^K \left\{ \frac{mn}{m+n-1} [\eta^{m+n-1} - \alpha^{m+n-1}] \vec{\varphi}_m \cdot \vec{\varphi}_n \right. \right. \\ &\quad \left. \left. (\nabla \cdot \vec{\varphi}_m) (\nabla \cdot \vec{\varphi}_n) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{m+n+1} [\eta^{m+n+1} - \alpha^{m+n+1}] \right\} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} [\eta^2 - \alpha^2] - \frac{1}{\rho} P_e (\eta - \alpha) \right] \quad (12) \end{aligned}$$

이제 자유표면에서의 운동학적 구속조건을 생각해 보기로 한다. 자유표면에서의 운동학적 경계조건은 자유표면 방정식의 전미분(total derivative)이 영이라는 식으로 주어진다. 이것을 수식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial \eta(x, y, t)}{\partial t} + \nabla \eta \cdot \vec{v} - w = 0 \quad \text{on } z = \eta \quad (13)$$

식(10)을 식(13)의 두 번째와 세 번째 항에 대입하면 다음과 같이 된다.

$$\nabla \eta \cdot \vec{v} - w |_{z=\eta} = \sum_{m=1}^K \nabla \cdot [\eta^m \vec{\varphi}_m] \quad (14)$$

이제 식(8)에서 표시한 바와 같이 자유표면에서의 운동학적 경계조건을 만족하기 위해서 라그랑제 구속변수  $\phi$ 를 도입하기로 한다. 구속변수  $\phi$ 는 경계면인 자유표면에서 정의되는 함수이다. 이 구속변수와 식(13), (14)를 사용하여 라그랑지안에 아래와 같은 항을 추가하면 자유표면에서의 경계조건을 고려한 라그랑지안이 된다.

$$\phi \left( \eta_t + \sum_{m=1}^K \nabla \cdot [\eta^m \vec{\varphi}_m] \right) \quad (15)$$

다음은 바닥에서의 경계조건을 고려하기로 한다. 이를 위하여 또 하나의 라그랑제 구속변수를 도입하여야 한다. 이것을  $\bar{\phi}$ 로 표시하기로 한다. 여기서 바닥은 움직이지 않는다고 생각한다. 만약 바닥이 움직일 경우에는 식(15)와 비슷한 형태를 가지게 된다. 바닥 경계조건은 바닥의 위치인  $z = \alpha(x, y)$ 에서 적용되므로 식(14)를 참고하면 다음과 같은 형태를 갖는다.

$$\bar{\phi} \sum_{m=1}^K \bar{\nabla} \cdot [\alpha^m \vec{\varphi}_m] \quad (16)$$

이제 자유표면과 바다 경계조건을 고려한 라그랑지안 밀도(Lagrangian density)를 식(8), (12), (15), (16)을 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} L = & \phi \left( \eta_t + \sum_{m=1}^K \bar{\nabla} \cdot [\eta^m \vec{\varphi}_m] \right) \\ & + \bar{\phi} \sum_{m=1}^K \bar{\nabla} \cdot [\alpha^m \vec{\varphi}_m] \\ & + \frac{1}{2} \rho \sum_{m=1}^K \sum_{n=1}^K \left\{ \right. \\ & \frac{m n}{m+n-1} [\eta^{m+n-1} - \alpha^{m+n-1}] \vec{\varphi}_m \cdot \vec{\varphi}_n \\ & + \frac{1}{m+n+1} [\eta^{m+n+1} - \alpha^{m+n+1}] \\ & \left. \bar{\nabla} \cdot \vec{\varphi}_m \bar{\nabla} \cdot \vec{\varphi}_n \right\} \\ & - \frac{1}{2} \rho g [\eta^2 - \alpha^2] - P_e (\eta - \alpha) \end{aligned} \quad (17)$$

만약 물체의 경계면과 같은 추가적인 경계조건이 있는 문세에서는 적절한 경계조건과 라그랑지안 밀도함수를 사용하여 라그랑지안 밀도함수에 추가해야 한다.

라그랑지안 밀도함수가 정의된 후, 운동방정식을 구할 수 있다. 식(5)에 의해서 주어진 변분원리가 해밀턴원리에서는 다음과 같이 표현된다.

$$\delta I = \delta \int \int \int \quad (18)$$

$$\{ \phi \eta_t - H(\phi, \eta, \vec{\varphi}_m) \} dx dy dt = 0$$

$$H(\phi, \eta, \vec{\varphi}_m) = \phi \eta_t - L \quad (19)$$

여기서  $H$ 는 해밀토니안(Hamiltonian)이라고 불려진다. 식(18)은 종종 변형된 해밀턴원리라고 일컬어진다<sup>2</sup>. 이 원리에서 주목되는 것은 식(18)로부터 카노니칼(canonical) 형태의 운동방정식을 얻을 수 있다는 것이다. 이 경우 특히 시간영역에서의 비정상상태 문제의 해석에 매우 편리한 계산 형태를 가진 운동방정식을 얻을 수 있다. 식(19)를 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} H = & -\phi \left( \eta_t + \sum_{m=1}^K \bar{\nabla} \cdot [\eta^m \vec{\varphi}_m] \right) \\ & - \bar{\phi} \sum_{m=1}^K \bar{\nabla} \cdot [\alpha^m \vec{\varphi}_m] \\ & - \frac{1}{2} \rho \sum_{m=1}^K \sum_{n=1}^K \left[ \right. \\ & \frac{m n}{m+n-1} (\eta^{m+n-1} - \alpha^{m+n-1}) \vec{\varphi}_m \cdot \vec{\varphi}_n \\ & - \frac{1}{m+n+1} (\eta^{m+n+1} - \alpha^{m+n+1}) \\ & \left. \bar{\nabla} \cdot \vec{\varphi}_m \bar{\nabla} \cdot \vec{\varphi}_n \right] \\ & + \frac{1}{2} \rho g (\eta^2 - \alpha^2) + P_e (\eta - \alpha) \end{aligned} \quad (20)$$

식(20)을  $\phi$ ,  $\bar{\phi}$ ,  $\eta$ ,  $\vec{\varphi}_m$ 에 관해서 변분을 취하면 해밀턴 또는 오일러-라그랑제 운동방정식을 얻게 된다. 이것은 다음과 같이 된다.

$$\eta_t = \frac{\delta H}{\delta \phi} \quad (21a)$$

$$\phi_t = -\frac{\delta H}{\delta \eta} \quad (21b)$$

$$\frac{\delta H}{\delta \vec{\varphi}_m} = 0 \quad (21c)$$

$$\frac{\delta H}{\delta \bar{\phi}} = 0 \quad (21d)$$

여기서  $\delta$ 는 Frechet 미분(또는 variational derivative)으로 함수가 스칼라와 벡터에 따라 다음과 같이 주어진다.

$$\frac{\delta}{\delta \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} - \bar{\nabla} \cdot \left( \frac{\partial}{\partial \bar{\nabla} \xi} \right) \quad (22a)$$

$$\frac{\delta}{\delta \vec{\varphi}_m} = \frac{\partial}{\partial \vec{\varphi}_m} - \bar{\nabla} \cdot \left( \frac{\partial}{\partial \bar{\nabla} \cdot \vec{\varphi}_m} \right) \quad (22b)$$

$\eta$ 에 대한 변분인 식(21a)에서 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\eta_t = -\sum_{m=1}^K \bar{\nabla} \cdot [\eta^m \vec{\varphi}_m] \quad (23)$$

$\phi$ 에 대한 변분인 식(21b)의 우변을 먼저 연산을

하면 다음과 같이된다.

$$\begin{aligned} \frac{\delta H}{\delta \eta} &= -\frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \phi \sum_{m=1}^K \nabla \cdot (\eta^m \vec{\varphi}_m) \right\} \\ &- \frac{1}{2} \rho \sum_{m=1}^K \sum_{n=1}^K m n \eta^{m+n-1} \vec{\varphi}_m \cdot \vec{\varphi}_n \\ &- \frac{1}{2} \rho \sum_{m=1}^K \sum_{n=1}^K \eta^{m+n+1} \nabla \cdot \vec{\varphi}_m \nabla \cdot \vec{\varphi}_n \\ &+ \rho g \eta + P_e \\ &+ \nabla \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial \nabla \eta} \left\{ \phi \sum_{m=1}^K \nabla \cdot (\eta^m \vec{\varphi}_m) \right\} \right] \quad (24) \end{aligned}$$

식(24)에서 우변의 첫 항과 마지막 항의 미분 연산을 수행하면 수식은 다소 간단히 할 수 있다. 이것을 위해 다음과 같은 연산을 살펴보기로 한다. 첫 번째 항에서 음의 부호와 합 기호를 제외한 나머지의 연산을 수행하면 아래와 같이 된다.

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \phi \nabla \cdot (\eta^m \vec{\varphi}_m) \right\} \\ &= \phi \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \nabla \cdot (\eta^m \vec{\varphi}_m) \right\} \\ &= \phi \left[ m(m-1) \eta^{m-2} \nabla \eta \cdot \vec{\varphi}_m \right. \\ &\quad \left. + m \eta^{m-1} \nabla \cdot \vec{\varphi}_m \right] \quad (25) \end{aligned}$$

또 식(24)의 마지막 항의 합 기호를 제외한 나머지의 연산을 수행하면 아래와 같이된다.

$$\begin{aligned} &\nabla \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial \nabla \eta} \left\{ \phi \nabla \cdot (\eta^m \vec{\varphi}_m) \right\} \right] \quad (26) \\ &= \phi \left[ m(m-1) \eta^{m-2} \nabla \eta \cdot \vec{\varphi}_m \right. \\ &\quad \left. + m \eta^{m-1} \nabla \cdot \vec{\varphi}_m \right] \\ &\quad + m \eta^{m-1} \nabla \phi \cdot \vec{\varphi}_m \end{aligned}$$

식(25)와 식(26)을 이용하면 식(24)를 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\frac{\delta H}{\delta \eta} = - \sum_{m=1}^K m \eta^{m-1} \nabla \phi \cdot \vec{\varphi}_m$$

$$\begin{aligned} &- \frac{1}{2} \rho \sum_{m=1}^K \sum_{n=1}^K m n \eta^{m+n-1} \vec{\varphi}_m \cdot \vec{\varphi}_n \\ &- \frac{1}{2} \rho \sum_{m=1}^K \sum_{n=1}^K \eta^{m+n+1} \nabla \cdot \vec{\varphi}_m \nabla \cdot \vec{\varphi}_n \\ &\quad + \rho g \eta + P_e \quad (27) \end{aligned}$$

이제  $\vec{\varphi}_m$ 에 대한 변분인 식(21c)를 살펴보기로 한다. 식(22b)를 이용하면 식(21c)를 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\frac{\partial H}{\partial \vec{\varphi}_m} - \nabla \cdot \left( \frac{\partial H}{\partial \nabla \cdot \vec{\varphi}_m} \right) = 0 \quad (28)$$

식(28)에 있는 연산을 수행하면 우변의 첫 항은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \vec{\varphi}_m} &= -\rho \sum_{n=1}^K \frac{m n}{m+n-1} \\ &\quad [ \eta^{m+n-1} - \alpha^{m+n-1} ] \vec{\varphi}_m \\ &\quad - \phi m \eta^{m-1} \nabla \eta + \bar{\phi} m \eta^{m-1} \nabla \alpha \quad (29) \end{aligned}$$

또 두 번째 항은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left( \frac{\partial H}{\partial \nabla \cdot \vec{\varphi}_m} \right) &= -\nabla \cdot [ \phi \eta^m ] - \nabla \cdot [ \bar{\phi} \alpha^m ] \\ &- \nabla \cdot \left[ \rho \sum_{n=1}^K \frac{1}{m+n+1} \right. \\ &\quad \left. \{ \eta^{m+n+1} - \alpha^{m+n+1} \} \nabla \cdot \vec{\varphi}_n \right] \quad (30) \end{aligned}$$

식(29)과 식(30)을 이용하여 식(28)을 정리하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} &\rho \sum_{n=1}^K \nabla \cdot \left[ \frac{1}{m+n+1} \{ \eta^{m+n+1} - \alpha^{m+n+1} \} \nabla \cdot \vec{\varphi}_n \right] \\ &- \rho \sum_{n=1}^K \frac{m n}{m+n-1} [ \eta^{m+n-1} - \alpha^{m+n-1} ] \vec{\varphi}_n \\ &= \phi m \eta^{m-1} \nabla \eta + \bar{\phi} m \eta^{m-1} \nabla \alpha \\ &- \nabla \cdot [ \phi \eta^m ] - \nabla \cdot [ \bar{\phi} \alpha^m ] \quad (31) \end{aligned}$$

식(31)의 우변을 정리하고, 식(21d)를 이용하여  $\bar{\phi}$ 에 관한 변분을 수행하면, 최종적으로 다음과 같

은 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$\eta_t = - \sum_{m=1}^K \bar{\nabla} \cdot [ \eta^m \vec{\varphi}_m ] \quad (32a)$$

$$\begin{aligned} \phi_t = & - \sum_{m=1}^K m \eta^{m-1} \bar{\nabla} \phi \cdot \vec{\varphi}_m \\ & + \frac{1}{2} \rho \sum_{m=1}^K \sum_{n=1}^K m n \eta^{m+n-2} \vec{\varphi}_m \cdot \vec{\varphi}_n \\ & + \frac{1}{2} \rho \sum_{m=1}^K \sum_{n=1}^K \eta^{m+n} \bar{\nabla} \cdot \vec{\varphi}_m \bar{\nabla} \cdot \vec{\varphi}_n \\ & - \rho g \eta - P_e \end{aligned} \quad (32b)$$

$$\begin{aligned} \rho \sum_{m=1}^K \left\{ \bar{\nabla} \left[ \frac{1}{m+n+1} \right. \right. \\ \left. \left. (\eta^{m+n+1} - \alpha^{m+n+1}) \bar{\nabla} \cdot \vec{\varphi}_m \right] \right. \\ \left. - \frac{m n}{m+n-1} (\eta^{m-n-1} - \alpha^{m-n-1}) \vec{\varphi}_m \right\} \\ = -\eta^n \bar{\nabla} \phi - \alpha^n \bar{\nabla} \bar{\phi} \end{aligned} \quad (32c)$$

for n=1,...,K

$$\sum_{m=1}^K \bar{\nabla} \cdot [ \alpha^m \vec{\varphi}_m ] = 0 \quad (32d)$$

#### 4. 고찰 및 결론

앞 절에서 비압축성 비점성 유체의 자유표면과 유동 문제의 3차원 운동방정식을 해밀턴원리를 이용하여 얻었다. 이제 얻어진 운동방정식의 특성을 살펴보기로 한다. 우선 운동방정식 중 식(32a)와 (32b)는 두개의 변수  $\phi$ 와  $\eta$ 에 대한 시간진행방정식(time evolution equation)임을 볼 수 있다. 여기서  $\phi$ 와  $\eta$ 는 Miles가 언급한 해밀턴역학의 카노니칼 쥘레 변수(canonical conjugate variables)가 된다<sup>1)</sup>. 그리고 식(32a)와 식(32b)는 카노니칼방정식이 된다. 처음에  $\phi$ 는 라그랑제 구속변수로서 도입되었으며, 이 변수의 물리적 의미는 기존의 식과 비교해보면 자유표면에서 정의되는 속도장함수가 된다. 시간진행방정식들의 형태를 살펴보면, 카노니칼 방정식의 특징으로  $\phi$ 와  $\eta$ 에 대한 1계 시간미분으로 주어지며 시간과 공간의 복합미분이 나타나지

않는 것을 볼 수 있다. 그러므로, 이 식은 시간 영역 문제의 계산에 편리한 형태이며, 필요에 따라 적절한 정도의 계산방법에 대한 선택 폭이 넓어진다.

식(32c), 식(32d)에는 시간에 관한 직접 미분 형태가 들어 있지 않은 점을 유의할 필요가 있다. 여기서 식(32c)과 식(32d)는 각 시간에서 만족되어야 하는 경계치문제(boundary value problem)의 형태를 가지게 된다. 그리고, 바닥의 영향은 시간진행방정식인 식(32a)와 식(32b)에는 직접적으로 들어오지 않고 경계치문제를 통해서 들어오는 것을 알 수 있다. 이 경계치문제는 카노니칼변수인  $\phi$ 와  $\eta$ 가 주어지면  $\vec{\varphi}_m$ 과  $\bar{\phi}$ 에 관해서는 선형방정식이 되는 것을 볼 수 있다. 일반적으로 비선형 경계치문제는 그 해를 구하는데 많은 노력이 들어간다. 이에 반해서 선형 문제는 해를 구하는 것이 비교적 용이하다. 그러므로 본 논문에서 유도한 운동방정식은 선형문제의 해를 구하는 노력으로 비선형 방정식의 해를 얻을 수 있는 효과적인 형태를 가지고 있음을 볼 수 있다.

시간영역 문제의 수치 계산을 수행하려면  $\phi$ 와  $\eta$ 의 초기조건(initial condition)이 필요하다. 초기조건이 주어지면 식(32c), 식(32d)의 경계치문제를 풀어 초기에서의  $\phi$ 와  $\eta$ 를 제외한 다른 모든 변수의 값을 결정할 수 있다. 이 값을 이용하여 시간진행방정식인 식(32a)와 식(32b)를 원하는 이산화 방법을 이용하여 시간진행(time marching)을 함으로써 새로운 시간에서의  $\phi$ 와  $\eta$ 를 얻는다. 각 시간단계(time step)에서 식(32c)과 식(32d)에서 주어진 두 개의 카노니칼 변수의 값을 이용하여 경계치문제의 해를 구한 후 새로운 시간에서의 값을 얻는다. 여기서 만약 시간에 대한 적분을 양해법(explicit method)이 아니고 Runge-Kutta 4차 방법 등과 같은 음해법(implicit method)을 이용할 경우에는 각 내부 시간단계의 계산에서 경계치문제를 풀어야 한다.

바닥이 평평한 경우에는 수직방향 좌표의 기준을 바닥에 설정하면, 바닥의 방정식은  $\alpha = 0$ 이 된다. 따라서 식(34)에서  $\bar{\phi}$ 가 사라지며 식(35)도 사라지게 된다. 이것은 식(10b)를 살펴보면 수직 방

향의 속도성분  $w$ 가 바닥에서의 경계조건을 미리 만족하게 되므로, 바닥경계조건을 만족시키기 위해서 추가로 라그랑제 구속변수를 도입할 필요가 없는 것과 일관된 결과이다. 바닥이 평평하고 자유표면에 작용하는 외부 압력이 없는 경우, 식(32)에서  $K=1$ 을 취해서 얻어지는 운동방정식은 Miles와 Salmon<sup>5)</sup>이 유체가 수직기둥 내에서 움직인다는 구속조건을 가지고 해밀턴원리에서 얻은 결과와 동일하다. 이식은 비선형성이 약한 경우에 적용할 수 있다. 따라서 비선형성이 강한 문제에서는 방정식을 고차로 확장하는 것이 필요하다. 그러나 이들의 유도 방법으로는 고차식을 얻을 수 없다. 본 논문에서 유도한 식은 계층구조를 가지는 고차식으로 확장되었다. 이 식은 해밀턴원리를 이용한 관점에서 보면, Mile와 Salmon 결과의 확장으로 생각할 수 있다. 또한  $K=1$ 일 때의 방정식은 연속체역학에서 사용되어지고 있는 코셔라표면(Cosserat surface)을 이용한 Green-Naghdi<sup>10)</sup> 방정식과 같다<sup>5)</sup>.

2차원 문제에서는  $\hat{\nabla} = \partial/\partial x$ 가 되며 연속방정식을 만족하면 스칼라 유량함수(Stream function)가 존재하게 된다. 따라서 속도장은 유량함수를 이용하여 정의할 수 있으며, 앞 절에서 유도한 운동방정식은 유량함수를 다음과 같이 전개한 것과 동일하다.

$$\Psi = \sum_{m=1}^K \varphi_m(x, t) z^m \quad (33)$$

본 논문에서 유도된 방정식은 비선형방정식이어서, 그 계층구조가 수렴되는 것을 보이는 것은 쉽지 않다. 그러나 앞서 언급한 바와 같이, 카노니칼변수가 주어지는 경우 경계치문제의 구성이 선형적인 요소를 가지고 있다. 따라서 선형화 된 방정식의 특성을 살펴본다면 식(32)의 계층구조의 수렴성을 정성적으로 파악할 수 있다. 이를 위하여 식(32)를 선형화하여 분산관계식(dispersion relation)을 얻어, 2차원 선형파의 엄밀식(exact equation)과 비교하기로 한다. 엄밀식은 식(34)로, 식(32)에서 얻은 선형화 된 분산관계식은 1차부터 3차까지 식(35)와 같이 주어진다. 여기서  $c$ 는 전파속도,  $k$ 는 파수,  $h$ 는 수심,  $g$

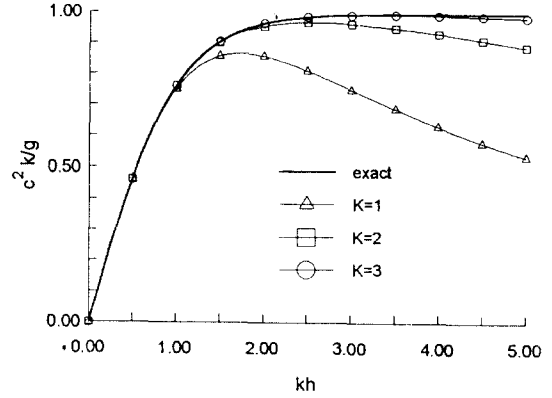


Fig. 2 Dispersion relations for infinitesimal waves. Result from first three orders are compared to the exact one.

는 중력가속도를 나타낸다. 식(35)의 형태는 분수식이며, Pade 근사법에서 얻어지는 형태와 비슷하다.

$$c^2 \frac{k}{g} = \tanh kh \quad (34)$$

$$c^2 \frac{k}{g} = \frac{3kh}{3 + k^2 h^2} \quad (35a)$$

$$c^2 \frac{k}{g} = \frac{24(10 + k^2 h^2)kh}{3k^3 h^4 + 104k^2 h^2 + 240} \quad (35b)$$

$$c^2 \frac{k}{g} = \frac{15(420 + 52k^2 h^2 + k^4 h^4)kh}{k^6 h^6 + 135k^4 h^4 + 2880k^2 h^2 + 6300} \quad (35c)$$

Fig. 2에서 식(34)와 식(35)를  $kh$ 가 5까지 비교하였다. 먼저 차수가 증가함에 따라  $kh$ 에 따른 식(35)의 유효범위가 증가하며, 엄밀해에 수렴하는 것을 볼 수 있다. 이러한 수렴성이 경계치문제에 적용되면, 식(32)에서 주어지는 계층구조가 수렴할 것을 기대할 수 있다. 또한 수렴범위가 천수영역에서 유한수심에 이르기까지 광범위한 것을 볼 수 있다. Fig. 2에서  $kh$ 가 3.14이상인 지점은 무한수심 영역으로 간주할 수 있다. 기존의 비선형파 방정식은 천수심과 유한수심문제에 각각 다른 방정식을



사용해왔다. 그러나 본 논문에서 얻어진 방정식은 동일한 식을 가지고 천수심과 유한수심의 문제를 다룰 수 있다. 따라서 wave shoaling과 같이 수심이 유한수심에서 천수심으로 변화하는 문제에 적용되면, 보다 일관성 있는 결과를 얻을 수 있을 것으로 보인다. Fig. 2에서 보인 수렴성은 Shields와 Webster의 직접법(direct method)에 의한 결과와 동일한 성격을 지닌다<sup>9)</sup>. 그러나 직접법에 의한 방정식은 변수가 시간과 공간에 대한 복합미분 형태로 나타나며, 3차원문제인 경우 스칼라 변수의 수가  $4K+3$ 개 인 반면, 본 논문에서 얻은 방정식의 변수의 수는  $2(K+1)$ 개 이다. 이것은 고차식으로 갈수록 직접법에 의한 방정식보다 본 논문의 방정식이 보다 효율적인 형태를 가지는 것을 보여준다.

본 논문에서는 속도장이 연속방정식을 미리 만족하는 형태로 선택하여 해밀토니안을 이용하여 운동방정식을 얻는 과정 중 가장 어려운 점인 바닥부터 자유표면까지의 수직 적분을 직접 수행하였다. 그 결과로 천수심에서 유한수심까지 사용할 수 있으며, 임의의 바닥의 형상을 고려한 비선형 자유표면과 문제의 3차원 운동방정식을 얻었다. 운동방정식은 자유표면의 위치와 자유표면에서의 라그랑제 구속변수를 컬레로 가지는 시간진행방정식과 이에 따르는 경계치문제로 구성된다. 이 두 변수는 해밀톤역학에서의 카노니칼변수가 된다. 자유표면경계조건을 만족하기 위하여 도입한 라그랑제 구속변수의 물리적 의미는 자유표면 위에서 정의되어지는 속도장함수이다. 야 식은 해밀토니안 역학 구조에 따라 에너지가 보존된다. 또한 다른 비선형과에 사용되어지는 근사식과는 달리 각 차수 별로 자유표면경계조건과 연속방정식을 엄밀하게 만족한다. 그리고 기존의 해밀톤원리를 이용하는 방법은 고차로 확장할 수 없었으나, 본 논문에서는 고차식으로 확장한 계층 구조적인 방정식을 얻었다.

## 후 기

본 논문은 한국과학재단 핵심전문과제 931-1000-007-2의 일부로 수행되었으며, 동 재단의 지원에 심심한 사의를 표합니다.

## 참 고 문 헌

- 1) Luke, J.C., "A variational principle for a fluid with a free surface" J. Fluid Mech. vol. 27, pp. 395-397, 1967
- 2) Goldstein, H., "Classical Mechanics", 2nd ed. Addison Wesley Publishing Co. Inc. 1990
- 3) Lin, C.C., "Hydrodynamics of helium II", Proc. Int. Sch. Phys. XXI, pp. 93-146, New York, Academic, 1963
- 4) Miles, J.W., "On Hamilton's principle for surface waves" J. Fluid Mech., vol. 83, pp. 153-158, 1977
- 5) Miles, J.W., Salmon, R. "Weakly dispersive nonlinear gravity waves", J. Fluid Mech., vol. 157, pp. 519-531, 1985
- 6) Miles, J.W. "Hamiltonian formulations for surface waves" Applied Scientific Research, vol. 37, pp. 103-110, 1981
- 7) Salmon, R. "Hamiltonian fluid mechanics. Ann. Rev. Fluid Mech. 20:225-56 1988.
- 8) 김장환, 배광준, "자유표면과 문제에서의 해밀톤원리 적용에 대한 소고", 대한조선학회 논문집 vol. 27, no. 3, pp. 19-30, 1991
- 9) Shields, J.J., Webster, W.C. "On direct methods in water-wave theory", J. Fluid Mech. 197, pp. 171-199, 1988
- 10) Green, A.E., Naghdi, P.M. "A derivation of equations for wave propagation in water of variable depth", J. Fluid Mech. 78: 237-46, 1976