韓國港灣學會 第10卷 第2號, pp.61～68. 1996.

論　文

유한요소의 자동 재분할과 사후오차평가

김병일* · 배성혁** · 장창두***

The Automatic Mesh Refinement of FEM and Posteriori Error Estimation

B. I. Kim · S. H. Bai · C. D. Chang

Key Words : 사후오차평가(Posteriory Error Estimation), 요소 자동 재분할(Adaptive Mesh Refinement), h-재분할법(h-refinement), p-재분할법(p-refinement)

Abstract

The main problems in structural analysis by Finite Eelement Method are difficulty in making data file and error estimation. For decreasing these problems' pays, have been suggesting the adaptive mesh refinement and error estimation method.

Posteriory error estimation methods suggested by Jang[1], Babuska[2,3], Ohtsubo[8,9], and this paper. Comparing these methods and examine their properties. According this paper, In the problem supposed having singularity, the method suggested by this paper is good, But the problem supposed having no singularity, the method suggested by Jang[1] is good.

For decreasing the effect of initial mesh in p-refinement, make application h-refinement at first and apply p-refinement, and confine polynomial's degree to two, for making program simply by plural mesh models are not needed.

1. 서　론

유한 요소 해석법은 공학적인 해석에 있어서 많은 역할을 하고 있지만 유용한 해를 얻기 위해서는 많은 data량과 적절한 요소 분할을 해석자가 직접 작업을 해야 한다. 이러한 작업은 지루하며 유용한 해를 얻기 위해서는 해석자의 공학적인 능력에 따라 크게 달라질 수 있다. 물론 요즈음에는 상용 패키지에서 요소 자동 분할을 할 수 있으나 대부분이 균일한 분할이나 사용자가 부분에 따라 요소의 수를 결정함으로써 결과적으로 적절한 요소 분할은 결국 사용자의 능력에 달려 있다고 할 수 있다. 또한 사용자가 충분히 좋은 요소 분할로 해석을 하

* 정회원, 목포해양대학교 해양 및 조선공학부 교수
** 한국기계연구원
*** 서울대학교 조선해양공학과 교수

여도 분할 정도에 따라 해의 오차가 달라지므로 어느 정도 그 결과에 대한 신뢰를 할 수 있는가를 알지 못한다. 이러한 문제점들을 오차평가에 의한 자동분할을 컴퓨터가 대신 수행함으로써 해결 될 수 있다. 그리고 사용자는 참값에 가까운 해를 얻을 수 있다. 또한 이러한 일련의 과정이 사용자의 손에 의해 이루어지는 것이 아니라 컴퓨터가 대신 처리하므로 방대한 입력자료를 작성하는 시간을 줄여 줄 수 있고 보다 더 정확한 계산 결과를 줄 것이다.

1980년대 부터 순응형 요소 재분할(Adaptive Mesh Refinement) 분야가 연구되어지고 있는데 초기에는 사전 오차 평가에 의해 오차가 클 것 같은 부분을 많은 요소로 분할하고 그렇지 않은 부분은 요소의 크기를 크게해 계산속도와 요소들의 오차를 비슷하게 함으로써 참값에 근접한 해를 얻으려하였다. 한편, Babuska[2-5] 등에 의해 제시되기 시작한 사후오차평가방법(posteriori error estimaton)은 수치 결과의 좋고 나쁨을 판정하고 그 것에 의해 오차가 크게 측정된 부분을 자동적으로 재분할하는 방법이다. 이 방법은 오차평가 어떻게 하느냐에 따라 결과가 여러 가지로 나올 수 있다. 또한 여러 번의 단계를 거쳐야 하므로 시간이 많이 걸린다. 즉 어느 정도의 해가 구해져야 프로그램을 탈출할 것인가 하는 문제가 있다. Babuska[2]는 이러한 문제를 마지막 단계의 계산시간이 총 계산시간의 반 이상이 되어야 한다고 제시했다. 이러한 이유로 Ohtsubo[8-9]는 이론적으로는 기반이 약하지만 간편하고 계산속도가 빠른 오차평가법을 제시하였다. 본 논문에서도 이보다 더욱 간편하고 정확한 오차평가법을 제시하고자 한다.

Adaptive Mesh Refinement 분야에서 가장 많이 사용되는 세 가지 방법은 오차가 큰 요소를 세분하는 h-법, 오차가 큰 요소의 내삽다항식의 차수를 올리는 p-법, 절점의 위치를 변경시켜 오차를 균일하게 하는 r-법등이 있다. 지금까지 h-법, p-법, r-법 등이 그 유용성을 입증받았으나 각각의 단점 또한 드러나게 되었다.

본 논문에서는 여러 가지의 오차평가방법에 대한 비교 고찰과 여러 가지 예제에 대해 실행해 각각의 장단점을 비교해 보고자 한다. 또한 위의 세 가지 중 p-법과 h-법을 결합하여 사용하므로써 각각의 단점을 줄이고 장점을 살려 더 좋은 해를 구할 수 있음을 보여 주고자 한다.

2. 오차평가(Error Estimation)

오차평가에는 잔차 평가(residue estimation), 내삽오차 평가(interpolation error estimation), 응력 불연속(stress discontinuity)에 기초한 오차 평가 등이 있다.

2.1 잔차 평가(Residue Estimation)

잔차에 의한 평가방법은 Babuska와 Zienkiewicz [2]에 제시된 방법이다.

$$Lu-f=0 \tag{1}$$

여기서, L 은 미분연산자, u 는 엄밀 해, f 는 body force

이 평가방법은 (1)식으로 주어지는 미분방정식의 유한요소해 u_h에 대응되는 다음 식으로 정의되는 잔차(residue)로 오차평가를 한다.

$$Lu_h-f=\gamma \tag{2}$$

Error Enrgy Norm은 다음과 같이 정의된다.

$$\| e \|_E^2 \approx \sum_i e_i^2 = \sum_i \frac{h_i^2}{12pa_{\min}} \int r_i^2\, dx \tag{3}$$

2차원 문제에서의 오차 정의는 잔차를 면적분하면 된다.

$$e_i^2 = \frac{h_i^2}{24\,pa} \int_\Omega r_i^2 \; d\Omega \tag{4}$$

여기서, a 는 재료 상수, h_i 는 요소 길이, p 는 내삽다항식의 차수

2.2 내삽 오차(Interpolation Error)

내삽오차는 Diaz, Kikuchi 및 Tayler[18,19]에 의해 제안되었는데, 엄밀해와 일치하는 유

한 요소 내삽 함수 u_h 에 대응되는 다음 식으로 정의될 수 있다.

$$e = u - u_h \tag{5}$$

이 오차 함수에 대응되는 유한 요소 영역 내에서의 오차의 정도를 나타내기 위해 적당한 Norm을 선택하면 다음과 같다.

$$\| e \|_E^2 = \int (a(x) e'^2 + b(x) e^2) d\Omega \tag{6}$$

2.3 응력불연속에 기초한 Complementary Energy 형태의 오차

이 방법은 Ohtsubo[9]에 의해 제시된 방법이다.

이 방법에서는 두 요소간의 응력 불연속을 Complementary Energy의 형태로 측정하여 오차라고 정의한 것인데 이것을 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$e_i^2 = \int (\{ \Delta\sigma \}^T [D]^{-1} \{ \Delta\sigma \}) d\Omega \tag{7}$$

2.4 Complementary Energy의 차이

이 방법은 장[1]에 의해 제시된 방법인데, 미소요소에서 complementary energy가 연속이라는 사실에 근거하여 인접요소 간의 complementary energy의 차이를 이용하여 error를 정의하였다.

미소 요소에서의 complementary energy는 다음 식으로 표현된다.

$$E_i = \left\{ \int \{ \sigma \}^T [D]^{-1} \{ \sigma \} d\Omega \right\}^{1/2} \tag{8}$$

요소당 오차는 다음 식과 같이 정의하였다. 여기서, n 은 인접요소의 수이다.

$$e_i = \left(\sum_{j=1}^{n} (E_i - E_j)^2 \right) \Big/ n \tag{9}$$

2.5 Equivalent Stress 차이에 의한 오차 평가

본 논문에서 제시하는 방법인데, 이 방법은 인접 요소 사이의 응력의 차이를 기초로 하여 오차를 정의하였다.

2차원 문제에서 오차함수를 2차함수라 정의하고 절점에서는 오차가 없다고 가정하면 오차함수를 다음 식과 같이 가정 할 수 있다.

$$e = \alpha_1 \left(x^2 - \left(\frac{h}{2} \right)^2 \right) + \alpha_2 \left(y^2 - \left(\frac{h}{2} \right)^2 \right) \tag{10}$$

Error Energy Norm은 다음 식과 같이 정의한다.

$$\| e \|_E^2 = \int_\Gamma a \left[\left(\frac{\partial e}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial e}{\partial y} \right)^2 \right] d\Gamma_i \simeq \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{3} h^4 a \tag{11}$$

다음은 적절한 α값을 택해야 하는데 각 절점에서는 오차가 없다 라는 가정에 의해 오차의 2차 편미분 값을 계산할 수 있다. 그래서 다음 식과 같은 식을 택하여 각 요소의 오차를 정의할 수 있다. 여기서, $\Delta\sigma_E$ 는 equivalent stress의 차이, h 는 요소변의 길이, a 는 재료상수이다.

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\Delta\sigma_E}{2ha} \tag{12}$$

(12)식을 (11)식에 대입하여 요소당 오차를 정의하면 다음과 같이 된다.

$$e_i^2 = \sum_k^n \frac{h_k}{12apn} \int_{\Gamma_k} \Delta\sigma_{Ek}^2 \, d\Gamma \tag{13}$$

여기서, h_k 는 요소 변의 길이, a = E/(1-υ), p 는 내삽다항식의 차수, $\Delta\sigma_{Ek}$ 는 Equivalent Stress의 차이, n 은 인접 요소 수이다.

이 방법은 요소의 면적이 아닌 변의 길이에 따라 오차의 크기가 달라지므로 다른 방법보다 면적은 작으면서 길이가 긴 요소가 큰 오차를 낸다. 즉 요소의 형태에 영향을 많이 받는다. 또 이 식으로 코딩(coding) 할 때 응력 측정을 각 변에서 해야 하지만 본 논문에서는 가우스 점(Gauss Point)에서 측정한 값을 이용하여도 적절한 값이 나온다. 가우스 점(Gauss Point)에서만 응력을 측정하므로 계산시간이 짧아지고 변에 대한 응력을 저장 할 필요가 없으므로 기억용량(memory)이 줄어들고 또한 (13)식 자체가 (7)식보다 간편하므로 오차평가 시간을 줄일 수 있다.

2.6 각 방법의 특징

residue와 complementary energy 차이를 기초로 오차를 측정한 것은 변위 함수를 기초로 하였고 Ohtsubo[8,9]가 제시한 방법과 본 논문에서 주장한 것은 응력 함수에 기초하여 오차를 측정하였다. 그러므로 각각 변위와 응력에 더 적절한 결과를 줄 것이라 생각한다.
위와같이 제시된 오차 방법들은 각각 장단점이 있는데, 잔차 평가 방법은 비선형문제로의 확장, 적절한 norm의 선택에 어려움이 있고, 내삽오차 평가방법은 개념적으로는 단순하지만 고차 미계수 평가를 위해서는 정확한 사후처리연산(postprocessing)이 필요하다.

3. 요소 자동 재분할

요소를 재분할 하는 방법에는 세 가지 종류가 있는 데 Fig.1 과 같이 오차가 큰 요소를 세분하여 요소 크기(h)를 작게 하는 h-법, 요소는 고정시키고 요소의 내삽다항식의 차수(p)를 높히는 p-법이, 요소 수는 고정시키고 절점위치를 이동(relocation) 해서 오차를 균일하게 분포시키는 r-법 등이 있다.

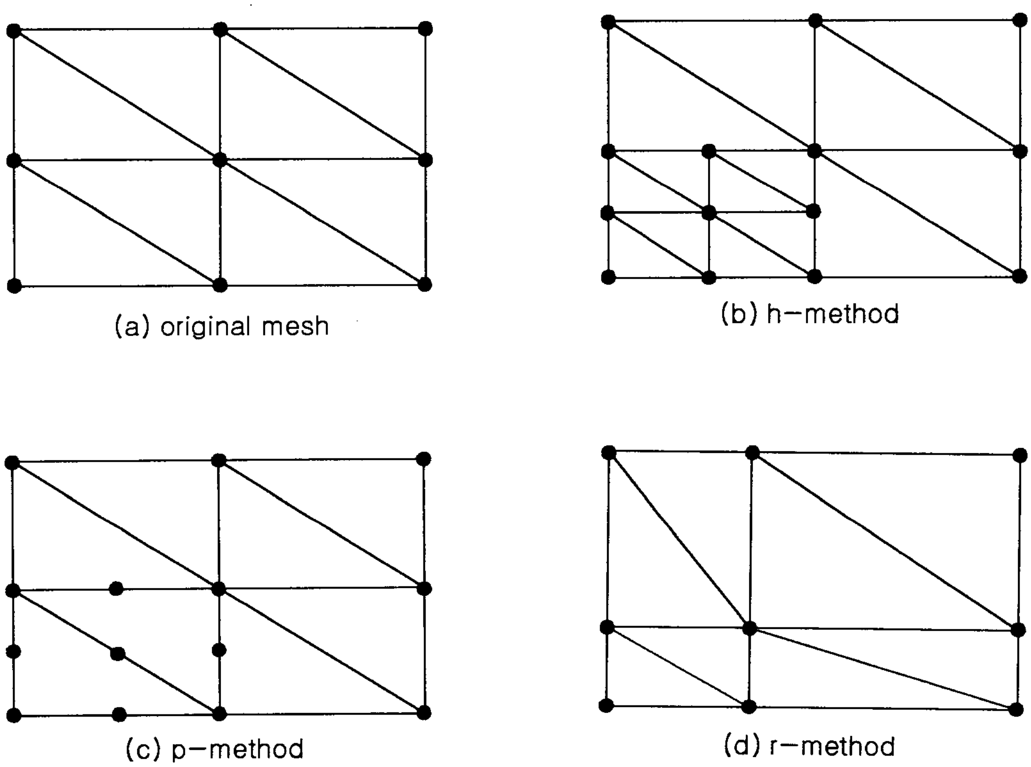

Fig. 1 Adaptive mesh refinement

3.1 h-법 (h-refinement)

h-법은 오차가 큰 요소를 세분함으로써 적은 수의 요소분할로도 적용이 가능하므로 초기 데이타 작업이 용이하고 참값에 가장 정확하게 접근할 수 있다. 반면 요소 수 증가에 따른 자유도의 증가와 computer의 용량(memory), 경계조건을 고려해야 한다. 또한 해석 결과들을 보면 p-법 보다 해에 접근하는 속도가 느리다는 단점이 있다.

장[1]이 제시한 요소를 세분하는 방법은 다음 그림과 같다.

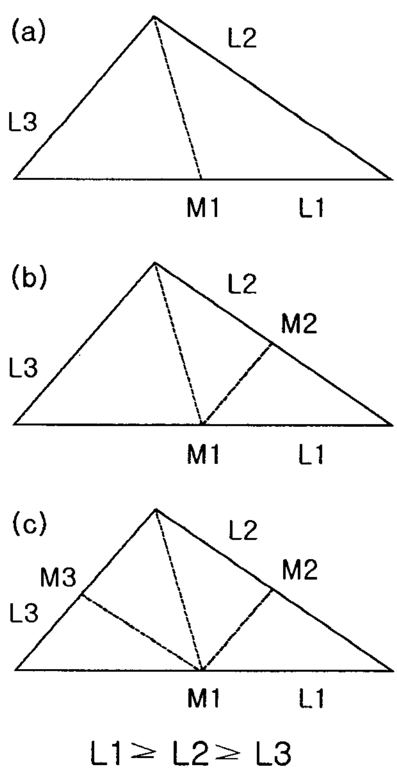

Fig. 2 Three types of mesh division

위 그림에서 세분하는 방법을 세 가지로 나누어 사용하였는데 즉 오차의 평균보다 큰 오차를 가진 요소에 대해 (a)와 같이 2개의 요소로 나누고 오차의 평균과 표준편차의 2배의 합보다 큰 요소는 (b)와 같이 3개의 요소로 나누고 오차의 평균과 표준편차의 3배의 합보다도 크면 (c)와 같이 4개의 요소로 만든다. 이와 같이 3단계로 나누어서 세분하는 것은 오차의 정도에 따라 재분할 개선속도를 높히고 요소의 형태를 초기의 요소 형태로 유지하기 위해서이다.

3.2 p-법 (p-refinement)

p-법은 요소의 수는 고정하고 오차가 큰 요소의 내삽다항식의 차수를 높혀 오차를 줄이는데 기존의 유한요소법 코드(code)를 사용할 수 있어 적용이 쉽고 엄밀해로의 수렴비(convergence rates)가 크다. 반면, 복수의 유한 요소 모델이 필요하며 해에 접근하는 정도가 초기 요소 분할에도 밀접한 관계가 있으므로 초기 데이타 작성 시 주의 해야 하는 단점이 있다.

3.3 r-법 (r-refinement)

r-법의 특징은 각 요소별로 오차가 균일하게 분포되도록 절점을 이동시킴으로써 동일한 요소 수에서는 가장 작은 오차가 나오며 요소 수나 내삽다항식의 차수가 변하지 않으므로 해석 중 자유도의 증가가 없는 반면 초기요소 분할에 한계가 존재하고 해가 참값에 접근하는 정도도 초기 요소 수에 의해 제한된다.

3.4 적용 방법

본 논문에서는 h-법과 p-법을 혼용하는 h-p-법을 택하였다. 그 이유는 p-법의 단점인 초기요소분할에 영향을 받지 않게 하고 h-법의 단점인 엄밀 해로의 수렴비(convergence rates)를 높게 유지하기 위해서이다. 또한 p-법에서도 내삽다항식의 차수를 2차로 제한 하였는 데 그 이유는 Babuska[3]에서 보인 바와 같이 even-odd effect - 내삽다항식에서 홀수의 차수로 분할하면 개선속도가 급격히 둔화되

는 현상 - 에 영향을 받지 않고 또한 단일한 유한요소 모델을 사용하여 Program기법을 쉽게하기 위해서이다.

4. 수치 계산 및 고찰

수치해석을 위한 전산 프로그램의 순서도는 다음 그림과 같다.

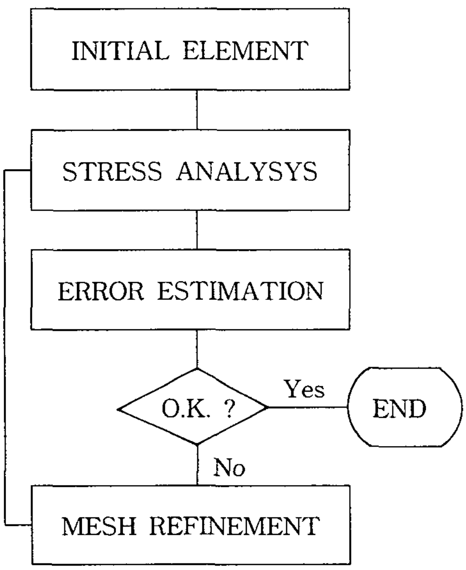

Fig.3 Flow of adative mesh refinement

수치해석의 예는 단순 지지 보에 분포하중이 작용하는 경우인데 세 가지 오차평가법과 세 가지의 재분할 방법으로 해석한 것이다. 오차평가 방법은 아래와 같고 재분할 방법은 h-법, p-법, h-법과 p-법을 혼용한 것을 사용하였다.

오차평가 방법

Method 1 : Ohtsubo[8]가 제시한 식 (10)

Method 2 : 장[1]이 제시한 식 (12)

Method 3 : 본 논문에서 제시한 식(13)

Fig.5 ~ Fig.8 에서 Method 3에 따른 Equivalent Stress를 등고선 형식으로 나타냈다.

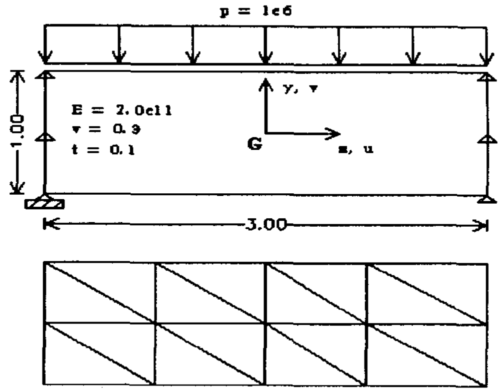

Fig.4 Deep Beam under Distributed Load and Initial Mesh

Fig.5 는 초기 요소의 형태의 영향을 크게 받아 형태가 불균일하다. Fig.6 에는 초기 요소의 수가 작아서 형태는 비슷하지만 응력의 값이 작게 나온다. Fig.7 에서는 요소수가 많아지므로해서 분포가 적절한 형태가 나오나 요소수가 증가하면서 형태의 진전이 거의 없다. Fig.8 에서는 h-법을 먼저 적용하고 나서 p-법을 적용하여 참값에 가까운 형태가 나타나게 된다. 즉 p-법의 단점인 초기 요소 수에의 영향을 적게하고 정확한 값을 얻을 수 있다.

Fig.9 에서는 각 오차평가 방법과 h-법과 h-p-법에 따른 보의 중앙점에서의 처짐의 변화를 나타낸다. 이 그림에서 p-법은 참값에 아주 빨리 접근하지만 그 한계가 있어서 참값에는 이르지 못하게 된다. h-법에서는 참값에 이르는 것이 완만하여 계산 시간이 많이 걸리므로 결국 좋은 해를 얻기 위해서는 많은 계산 시간이 필요함을 보여 준다. 반면 h-p-법에서는 h-법에서의 수렴속도를 높혀 적은 시간에 참값에 도달하게 된다.

이 계산 예에서는 h-법과 h-p-법의 각 오차평가 방법의 장단점을 비교하였는 바 Method 2, Method 3, Method 1 순으로 적절하다고 생각된다.

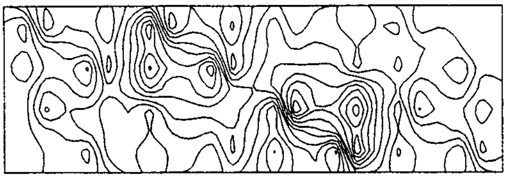

Fig. 5 Equivalent stress contour by method 3(initial mesh, N=15)

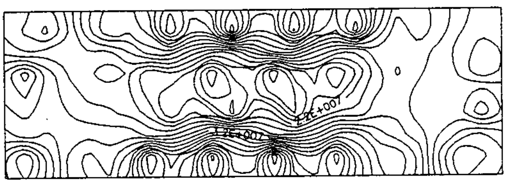

Fig. 6 Equivalent stress contour by method 3(p-refinement, N=43)

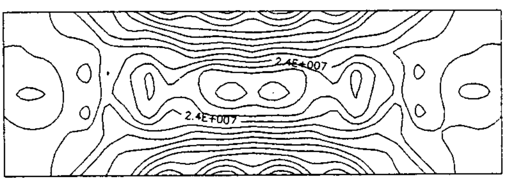

Fig. 7 Equivalent stress contour by method 3(h-refinement, N=102)

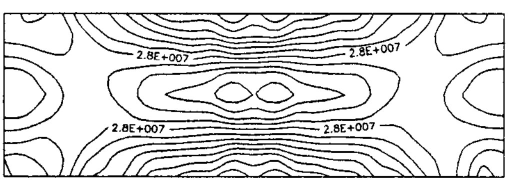

Fig. 8 Equivalent stress contour by method 3(h-p-refinement, N=43)

5. 결 론

1) 사후오차 평가방법으로서 equivalent stress

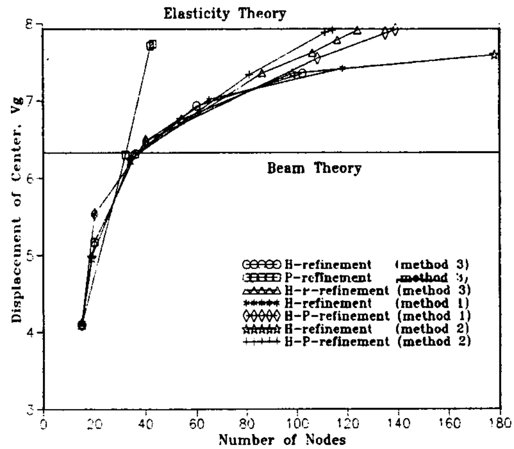

Fig. 9 Convergence of central deflection

의 불연속에 기초한 오차평가식을 도입하여 그 우수성을 검증하였다.

2) 재분할 방법들을 비교 검토하여 그 특성에 대해 살펴보았다

3) h-법을 먼저 적용시켜 p-법의 단점인 초기 요소 수의 영향를 최소화 하고 초기 데이타작성을 용이하게 하였다.

4) 재분할 방법을 혼용함(h-p-법)으로써 수렴비를 크게 유지하고 더욱 정확한 해를 구할 수 있음을 증명하였다.

5) 차후 여러 형태의 요소에 대해서도 적용시킬 수 있는 h-법과 완전한 p-법의 개발이 요구된다. 또한 r-법에 대한 연구도 병행되어야 할 것이다.

참 고 문 헌

[1] 장 창두, 김 병일 "h-법에 의한 순응형 유한요소 재분할에 관한 연구", 전산구조공학회, 1992.

[2] I.Babuska, J.P.DE S.R. Gago, D.W.Kelly, O.C.Zienkiewicz, "A Posteriori Error Analysis and Adaptive Process in the

Finite Element Method : Part I - Error Analysis", International Journal for Numerical Methods in Engng., Vol 19, 1983

[3] I.Babuska, J.P.DE S.R. Gago, D.W.Kelly, O.C.Zienkiewicz, "A Posteriori Error Analysis and Adaptive Process in the Finite Element Method : Part II-Adaptive Mesh Refinement", International Journal for Numerical Methods in Engng., Vol 19, 1983

[4] I.Babuska, A. Miller, "The Post-Processing Approach in the Finite Element Method-Part 3: A Posteriori Error Estimations and Adaptive Mesh Selection", International journal for numerical Methods in Engineering. Vol. 20. 2311-2324. 1984.

[5] I. Babuska, "The selfadaptive approach in the finite element method", in J.R.Whiteman (Ed.), Mathematics of Finite Elements and Applications, Academic Press, London, 1975.

[6] D.W.Kelly, "Self-equilibration of Residuals and Complementary a Posteriori Error Estimation in the Finite Element Method", Int.J.Num.Meth.Engng., Vol.20, 1491-1506, 1984.

[7] O.C.Zienkiewicz and J.Z.Zhu, "A Simple Error Estimation and Adaptive Procedure for Practical Engineering Analysis", Int.J.Num.Meth.Engng., 24, 337-357, 1987.

[8] 大坪英臣, "有限要素法の評價法", 船體構造委員會シンポシウム

[9] 大坪英臣, 北村 充, "有限要素法による船體構造解析の事後誤差評價に關する研究(第 1 報), 日本造船學會論文集, Vol. 170, 1990.

[10] 大坪英臣 "有限要素法の最近の動向(その 1)", 日本造船學會誌, Vol. 683, 263-274, 1986. 5.

[11] 大坪英臣, 相澤龍彦, "有限要素法の最近の動向(その 4)", 日本造船學會誌, Vol. 702, 819-830, 1987. 12.

[12] 大坪英臣, 北村 充, "有限要素法の最近の動向(その 6)", 日本造船學會誌, Vol. 736, 630-642, 1990.

[13] OKADA, SASAJIMA, NEKI, "Optimum Mesh Generation for the Finite Element Method (1st Report), J.Kansai Soc. N.A., Japan, No.211, March 1989

[14] OKADA, NEKI, "Optimum Mesh Generation for the Finite Element Method (2nd Report), J.Kansai Soc. N.A., Japan, No.213, March 1990

[15] 大坪英臣, 北村 充, 川村恭已, "有限要素モデルのデ-タ構造とh法による順應型要素再分割法に關する研究", 日本造船學會論文集, Vol. 170, 1990.5.

[16] M.S.Shephard, M.A.Yerry, P.L.Baehmann. "Automatic Mesh Generation Allowing for Efficient a Priori and a Posteriori Mesh Refinement", Computer Methods in Applied Mechanicals and Engineering 55., 161-180, 1986.

[17] 大坪英臣, 川村恭已, "オブジェクト指向に基づく船體構造解析用 FEM モデリシステム", 日本造船學會論文集, Vol. 170, 473-481, 1990. 5.

[18] A. R. Diaz, N. Kikuchi, E. Taylor, "A Method of Grid Optimization for Finite Element Methods", Computer Meth. Appl. Mech. Engng. Vol. 4, 1974.

[19] A. R. Diaz, N. Kikuchi, P. Papalambros, E. Taylor, "Design of Optimal Grid for Finite Element Methods", J. Struct. Mech., Vol. 11, 1983.