

## 지수가중이동평균관리도의 경제적 최적모수의 선정<sup>1)</sup>

박 창 순<sup>2)</sup>, 원 태 연<sup>3)</sup>

### 요 약

지수가중이동평균관리도는 최근 들어 공정검색과 공정수정에 널리 이용되고 있으나 모수의 설정에 관한 연구는 많지 않다. 관리도의 설계는 통계적 설계와 경제적 설계로 분류한다. 통계적 설계는 허용된 제 1종 오류 하에서 제 2종 오류를 최소화하는데 반해 경제적 설계는 공정에서 발생하는 모든 가능한 비용을 고려한 비용함수를 최소화한다. 이 논문에서는 지수가중이동평균관리도의 통계적 설계와 함께 경제적 설계를 정의한 다음 각 설계에서의 최적모수를 선정하여 결과를 비교한다. 경제적 설계에서 설정된 최적모수는 통계적 설계와 다르게 나타남을 알 수 있고 특히 가중치의 값은 통계적 설계에서 보다 항상 큰 값으로 나타난다. 경제적 설계에서는 고려하는 이상원인의 수에 따라 단일이상원인과 다중이상원인 모형으로 구분하여 설계한다. 다중이상원인의 평균적 개념으로 적용되는 단일이상원인 모형에서는 실제 다중이상원인이 존재할 때에 잘못된 판단을 할 수 있음을 보이고 있다.

### 1. 서 론

관리도(control chart)는 1931년 미국 Bell 연구소의 Shewhart에 의해 최초로 제안된 이후 많은 연구와 발전을 거듭하여 통계적 공정관리에서 중요한 도구로 사용되고 있다. 관리도는 생산공정을 통계적으로 관리하는데 널리 사용되어 왔으며, 공정모수를 추정하고 공정능력을 분석하는데 효과적인 장치라고 할 수 있다.

관리도의 대표적인 형태로서 Shewhart 관리도, Page(1954)가 제안한 누적합(cumulative sum ; CUSUM) 관리도, Roberts(1959)에 의해 시작된 지수가중이동평균(exponentially weighted moving average ; EWMA) 관리도 등을 들 수 있다. Shewhart 관리도는 과거의 데이터를 공정판단에 전혀 고려하지 않는 반면에 CUSUM 관리도는 현재와 과거의 모든 데이터에 동일한 비중을 두어 공정판단을 하는 절차이다. EWMA 관리도는 데이터에 주는 비중 면에서 CUSUM 관리도를 수정한 절차로 이해할 수 있다. 즉, 현재나 과거의 모든 데이터를 이용하지만 현재시점에서 과거로 멀어질수록 비중을 작게하여 공정을 판단하는 절차를 나타낸다. EWMA 관리도는 이와 같은 관리상태의 구조에 의해 그 특성도 CUSUM 관리도와 유사한 면을 나타내고 있다. EWMA는 시계열의 한 모형으로서 잡음(disturbance)이 있는 공정을 표현하는데 사용될 뿐만 아니라, 다음 관측값을 예측하고 이 예측값을 이용하여 공정수정(process adjustment)을 도

1) 이 논문은 1994년 한국학술진흥재단의 공모과제 연구비에 의하여 연구되었음.  
2) (156-756) 서울 동작구 흑석동 산 221 중앙대학교 정경대학 응용통계학과 교수.  
3) (156-756) 서울 동작구 흑석동 산 221 중앙대학교 정경대학 응용통계학과 강사.

모하는데 널리 이용되고 있다(Box and Kramer (1992)). 이와같이 EWMA 관리도는 공정관리(process control) 뿐만 아니라 공정수정에도 효율적으로 사용될 수 있는 관리도로 인식되어 최근에는 CUSUM 관리도보다 더 많이 사용되는 경향을 보이고 있으나 정작 그 모수의 설정에 관한 연구는 많지 않은 실정이다.

EWMA 관리도에서 사용되는 모수는 표본크기(sample size), 표본추출간격(sampling interval), 관리한계(control limit), 가중치(weight)가 있다. EWMA 관리도에서 가중치  $r$ 은 기각품질수준에 따라 다르게 설정될 수 있으며, 일반적인 지침은 관리한계  $k$ 를 3.0으로 하고 가중치  $r$ 은 (0.05, 0.25)의 범위에서 표준화된 공정평균의 변화량  $\delta$ 의 값에 따라 결정하여 왔다. 이때 가중치는 기각품질수준이 관리값에 가까울수록 0에 가까운 값으로 설정하면 관리도의 효율을 높일 수 있는 것으로 알려져 있다. 이러한 모수의 설정은 Shewhart 관리도에 비해 어느 정도까지는 효율적인 것으로 알려져 왔으나 EWMA 관리도의 특성을 최대한으로 사용하지는 못하고 있다.

관리도의 설계는 관리도가 추구하는 목적에 따라 통계적 설계(statistical design)와 경제적 설계(economic design)로 구분된다. 통계적 설계는 관리상태의 평균런길이(제 1 종 오류)가 주어졌을 때 이상상태의 평균런길이(제 2 종 오류)를 최소화하는 모수를 설정하는 과정을 나타낸다. 이에 반해 경제적 설계는 생산라인에서 발생하는 모든 비용과 손실을 고려한 비용함수를 정의하고 이를 최소화하는 모수를 설정하는 과정을 나타내고 있다.

Duncan(1956)은  $\bar{X}$ -관리도의 경제적 모형을 사용하여 비용을 줄일 수 있는 최적 경제적 설계를 연구하였으며, 이것은 관리도의 경제적 설계에 대한 연구의 시작이 되었다. Taylor(1967)은 CUSUM 관리도의 경제적인 설계를 제안했으며, Goel et al(1968)은  $\bar{X}$ -관리도와 CUSUM 관리도를 비교 연구하였다. 이 외에도 관리도의 경제적 설계는 Montgomery(1980, 1982), Lorenzen과 Vance(1986), Saniga(1989), Park과 Reynolds(1994)등에 의해 연구 확장되어 왔다.

이 논문에서는 EWMA 관리도의 통계적 설계와 함께 Lorenzen과 Vance(1986)가 제안한 비용함수를 사용한 경제적 설계를 고려한다. 통계적 설계에서는 이상상태의 평균런길이를 최소화하는 가중치  $r$ 과 관리한계  $k$ 를 설정하고, 경제적 설계에서는 비용을 최소화시키는 관리모수  $r$ 과  $k$ , 그리고 표본크기  $n$ 과 표본추출간격  $h$ 를 선정하는 것을 목적으로 하고 있다.

## 2. EWMA 관리도의 평균런 길이

EWMA 관리도의 절차는 연속적으로 관측된 표본평균의 지수가중이동평균을 구하여 관리한계선과 비교하는 방법이다.

공정에서 관측된  $i$ 번째 표본평균을  $\bar{X}_i$ 라 할 때, EWMA  $Z_i$ 는 다음과 같이 정의한다.

$$Z_i = r\bar{X}_i + (1-r)Z_{i-1}, \quad 0 < r \leq 1, \quad i=1, 2, \dots \quad (2.1)$$

$$\text{단, } Z_0 = \mu_0$$

$r=1$ 이면 EWMA는 가장 최근의 표본에 모든 비중을 주게 되며, 이는  $\bar{X}$ -관리도 절차와 동

일하다.  $Z_0$ 는 EWMA의 시작값(starting value)으로서 일반적으로 평균의 관리값인  $\mu_0$ 를 사용한다.  $Z_i$ 는 과거와 현재의 표본평균  $\mu_0, \bar{X}_1, \dots, \bar{X}_i$ 의 지수가중평균이 되며 이것을 기하이동평균(geometric moving average)이라고도 한다.

공정변수  $X$ 의 평균과 분산을 각각  $\mu$ 와  $\sigma^2$ 이라 하면 EWMA의 관리상태 ( $\mu = \mu_0$ )의 평균과 분산은 다음과 같다.

$$\mu_{EWMA} = \mu_0 \tag{2.2}$$

$$\sigma_{EWMA}^2 = \frac{\sigma^2}{n} \left( \frac{r}{2-r} \right) [1 - (1-r)^{2i}] \cong \frac{\sigma^2}{n} \left( \frac{r}{2-r} \right) \tag{2.3}$$

따라서  $Q_i = \sqrt{\frac{n(2-r)}{r}} (Z_i - \mu_0) / \sigma$ 라 하면  $Q_i$ 를 사용한 EWMA 관리도의 관리절차는  $|Q_i| > k$ 를 최초로 만족하는 시점  $i$ 에서 이상신호를 준다. 이 때  $Q_i$ 의 시작값은 0이 된다.

EWMA 관리도의 ARL은 Robinson과 Ho(1978), Crowder(1987a,b) 등에 의해 연구되었다. Robinson과 Ho는 AR(1) 모형의 최초통과문제(first passage problem)를 사용하여 최초통과시간으로 런길이를 표현하였으며, Crowder는 수치해석적 방법으로 평균런길이(average run length : ARL)를 다음과 같이 계산하였다.

$L(u)$ 를 시작값이  $u$ 인 EWMA 관리도의 평균런길이이라 하면  $L(u)$ 는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$L(u) = 1 + \frac{1}{r} \int_{-l}^l L(y) f\left(\frac{y - (1-r)u}{r}\right) dy \tag{2.4}$$

$$\text{단, } l = k \cdot \sqrt{\frac{r}{2-r}}$$

여기에서  $f(\cdot)$ 는 표본평균  $\bar{X}_i$ 의 확률밀도함수로서  $N(\mu, \sigma^2/n)$ 를 따른다. 이때 공정평균  $\mu$ 는 표준화된 공정평균의 변화량  $\delta (= \sqrt{n}(\mu - \mu_0)/\sigma)$ 에 의해  $\mu = \mu_0 + \delta \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 로 표현된다.

$L(u)$ 는 가우시안 구적법(Gaussian quadrature method)을 이용하여 다음과 같이 근사적으로 표현할 수 있다.

$$L(u) \cong 1 + \frac{1}{r} \sum_{i=1}^m w_i L(p_i) f\left(\frac{p_i - (1-r)u}{r}\right) \tag{2.5}$$

단,  $w_i$  ; 구간  $[-l, l]$ 에 대한 가우시안 구적가중치 (Gaussian quadrature weight)

$p_i$  ; 구간  $[-l, l]$ 에 대한 가우시안 구적점 (Gaussian quadrature point)

$m$  : 구적점의 수

가우시안 구적점과 구적가중치는 Abramowitz와 Stegun(1964)에 나타나 있다. 식 (2.5)로부터 선형대수식을 이용하여 다음 표현을 얻는다.

$$L = \left( I - \frac{1}{r} C \right)^{-1} \cdot 1 \tag{2.6}$$

단,  $\mathbf{1} = (m \times 1)$  단위벡터,

$\mathbf{I} = (m \times m)$  단위행렬,

$\mathbf{L}' = [L(p_1), L(p_2), \dots, L(p_m)]$ ,

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} w_1 f\left(\frac{p_1 - (1-r)p_1}{r}\right) & w_2 f\left(\frac{p_2 - (1-r)p_1}{r}\right) & \dots & w_m f\left(\frac{p_m - (1-r)p_1}{r}\right) \\ w_1 f\left(\frac{p_1 - (1-r)p_2}{r}\right) & w_2 f\left(\frac{p_2 - (1-r)p_2}{r}\right) & \dots & w_m f\left(\frac{p_m - (1-r)p_2}{r}\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_1 f\left(\frac{p_1 - (1-r)p_m}{r}\right) & w_2 f\left(\frac{p_2 - (1-r)p_m}{r}\right) & \dots & w_m f\left(\frac{p_m - (1-r)p_m}{r}\right) \end{bmatrix}$$

식 (2.6)을 식 (2.5)에 대입하면 EWMA 관리도의 평균런길이를 계산할 수 있다.

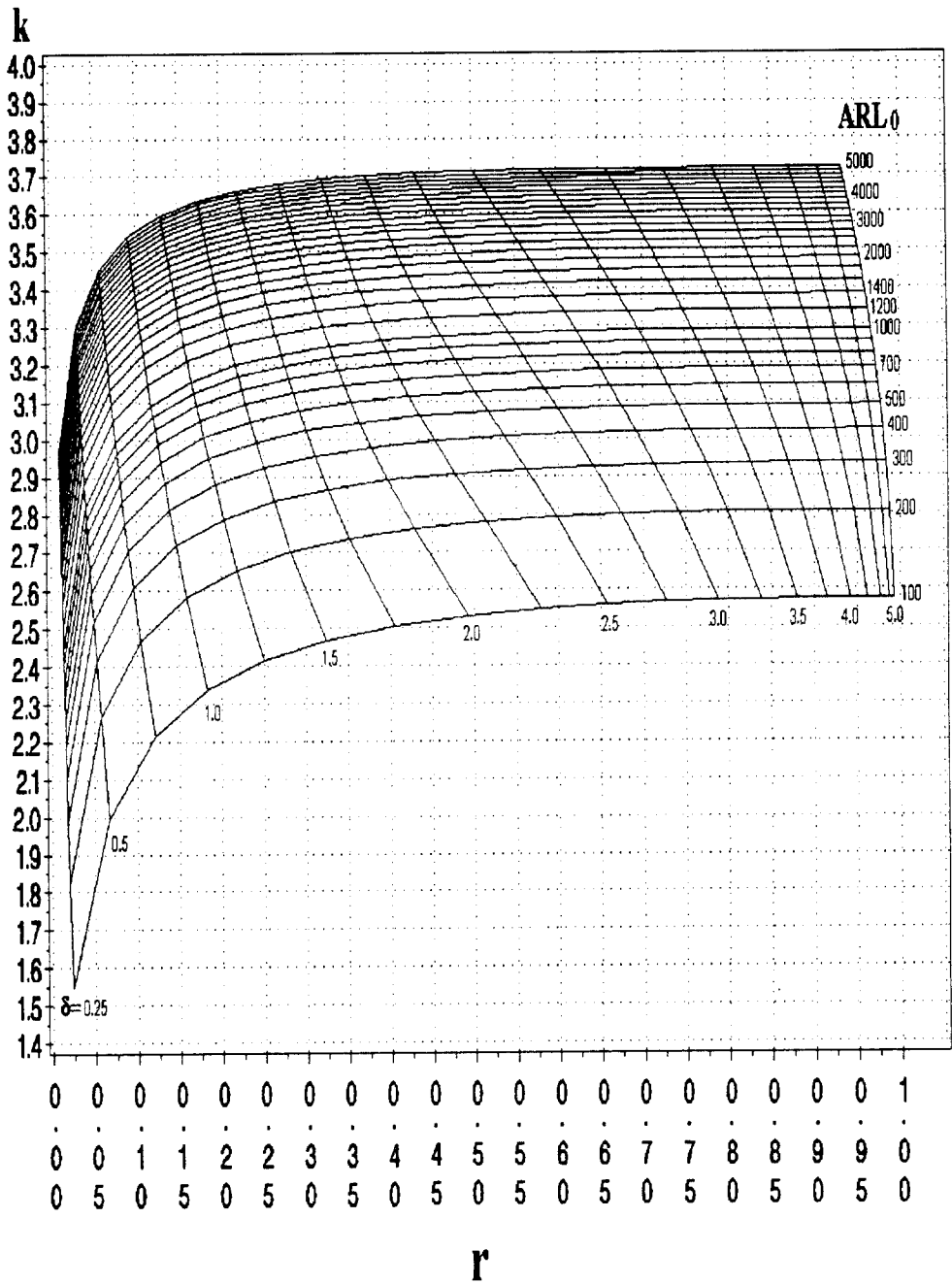
이와같이 가우시안 구적법을 사용하여 EWMA 관리도의 평균런길이를 계산할 때,  $r$ 이 아주 작은 값이면  $(\mathbf{I} - \frac{1}{r}\mathbf{C})$ 의 역행렬을 계산할 때 언더플로우(underflow) 현상이 발생하여 계산이 부정확한 경우가 있다. 이러한 현상은  $r$ 의 값이 0에 가까울수록 심하게 된다. 이와 같은 문제로 인해 Crowder(1987a, b)는 그의 연구에서 가중치  $r$ 이 0.05보다 작은 경우는 연구에서 고려하지 않았다. 그리고 Crowder와 Hamilton (1992)의 공정표준편차를 고려한 EWMA 관리도의 연구에서도  $r$ 의 값을 지정할 때 0.01이하로 지정하면 언더플로우 현상으로 인해 평균런길이의 계산이 부정확해짐을 언급하고 있다.

EWMA 관리도의 통계적 설계에서는  $\delta$ 가 아주 작은 경우를 고려할 필요가 없기 때문에 최적 가중치의 값  $r$ 이 0에 아주 가까워 언더플로우 현상을 유발하지 않는다. 그러나 EWMA 관리도의 경제적 설계에서는  $\delta$ 의 값에 관계없이  $r$ 의 모든 가능한 값 (0, 1]에 대해 계산이 가능해야 된다. 이와 같이  $r$ 이 0에 가까울 때에는 평균런길이의 계산을 가능하게 하기 위해 더 많은 구적점의 수를 사용하여 언더플로우 현상을 없애도록 하였다. 일반적으로 통계적 모형에서는 구적점의 수를 24개만 사용하여도 정확한 값을 계산할 수 있으나 경제적 모형을 위한 평균런길이의 계산에서는  $m=48, 64$  또는 80을 사용하게 된다.

### 3. EWMA 관리도의 통계적 설계

제 2 절에서 설명한 것과 같이 통계적 설계란 관리상태의 평균런길이  $ARL_0$ 를 상수로 고정하고 이상상태의 평균런길이  $ARL_\delta$ 를 최소화하는 설계모수를 찾는 과정을 나타낸다.

주어진  $ARL_0 = A_0$ 에 따라  $ARL_\delta$ 를 최소화하는  $r$ 과  $k$ 를 찾는 문제는 제약조건이 있는 비선형 최적문제(nonlinear optimization problem)에 해당되며 이는 Lasdon et al(1978)의 Generalized Reduced Gradient Method를 사용하여 풀 수 있다. 이 논문에서는 Lasdon과 Waren(1983)의 GRG-II FORTRAN 부프로그램을 사용하였으며, Lucas와 Saccucci(1990)보다 더 다양한  $(A_0, \delta)$ 의 조합에 대해 최적모수값을 선정하였다. 이렇게 계산된  $(A_0, \delta)$ 의 조합에



[그림 1] EWMA 관리도의 통계적 최적모수( $r, k$ )

대한 최적모수값은 [그림 1]에 제시하였다. [그림 1]을 이용하면 주어진  $\delta$ 와  $ARL_0$ 에 따라 최적모수의 값을 구할 수 있다. 예를 들어  $ARL_0=500$ 이고  $\delta=2.0$ 인 경우의 최적모수는 [그림 1]에서  $ARL_0=500$ 인 곡선과  $\delta=2.0$ 인 곡선의 교점을 찾은 다음 그 점에서  $r$ 축,  $k$ 축과의 직교점을 찾아 최적모수값  $r$ 과  $k$ 의 최적모수값으로 설정한다. 따라서 최적모수는  $r \approx 0.36$ ,  $k \approx 3.04$ 이다.

#### 4. EWMA 관리도의 경제적 설계

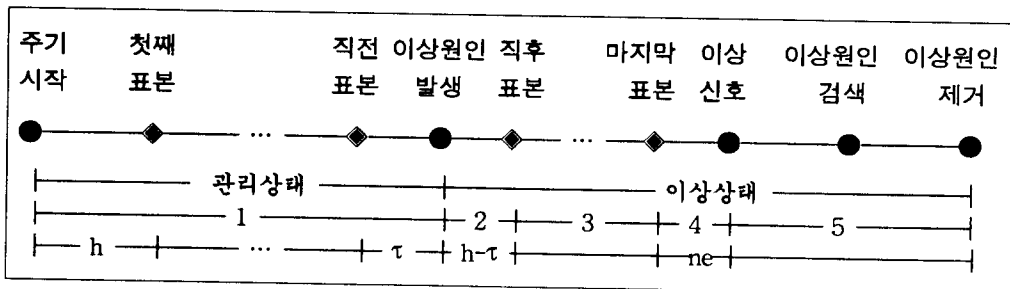
이 절에서는 EWMA 관리도의 경제적 설계에서 비용함수를 정의하고 그 비용함수를 최소화하는 공정모수를 선정하는 방법을 알아보기로 한다. 관리도의 경제적 설계는 고려하는 이상원인의 수에 따라 단일 이상원인 모형(single assignable cause model)과 다중 이상원인 모형(multiple assignable causes model)으로 구분하여 설계한다. 단일 이상원인 모형은 공정에 변화를 주는 이상원인이 한 개만 있다고 가정하는 모형인데 반해 다중 이상원인 모형은 이상원인이 여러개 있다고 가정한다. 실제로 대부분의 공정에서는 여러개의 이상원인이 존재하기 때문에 다중 이상원인 모형이 단일 이상원인 모형보다 더 현실성이 있다고 할 수 있다. 단일 이상원인 모형은 여러개의 이상원인이 유발하는 변화량의 평균을 하나의 이상원인이 유발하는 변화량으로 고려하는 모형으로 생각할 수 있다.

##### 4.1 단일 이상원인 모형

공정에 대한 기본가정은 일반적으로 다음과 같이 설정한다.

- 1) 공정은 관리상태에서 시작하고 이상원인이 발생할 때까지의 시간은 평균이  $1/\lambda$ 인 지수분포를 따른다.
- 2) 공정은 자체 수정능력이 없다.
- 3) 이상원인은 반드시 검색할 수 있으며, 검색 후 수정하면 공정은 관리상태로 돌아온다.

하나의 주기(cycle)는 공정의 시작에서 이상원인이 발생하고 난 다음 이상원인을 검색하고 수정할 때까지를 말한다. 이러한 공정의 주기를 그림으로 표현하면 [그림 2]와 같다.



[그림 2] 공정의 주기

하나의 주기는 관리상태시간(1)과 이상상태시간(2+3+4+5)으로 구분되며 이상상태시간은 다시 이상원인 발생부터 다음 표본을 추출할 때까지의 시간(2), 이상상태를 탐지하는 표본을 추출할 때까지의 시간(3), 표본을 분석하고 관리도에 적용하는데 소요되는 지연시간(delay time)(4), 그리고 이상원인을 발견하고 공정을 수정하는 시간(5)으로 구분할 수 있다.

주기당 비용은 관리상태 동안의 품질비용, 오경보(false alarm)로 인한 비용, 이상상태 동안의 품질비용, 그리고 표본추출비용으로 구성된다. 시간당 기대비용(expected cost per hour)은 주기당 기대비용(expected cost per cycle)의 주기당 기대시간(expected time per cycle)에 대한 비로서 표현하며 경제적 모형의 효율을 나타내는 척도로 사용한다.

관리상태시간은 지수분포를 따르므로 오경보로 인해 공정상태를 검색하는 동안 생산이 계속된다면 평균시간은  $1/\lambda$ 이다. 만일 공정상태를 검색하는 동안에 생산이 중단된다면, 평균시간은  $1/\lambda$ 에 오경보를 검색하는데 소요되는 시간을 더한 것과 같다.  $T_0$ 를 오경보에 대한 기대검색 시간이라 할 때 오경보를 검색하는데 소요되는 기대시간은  $T_0$ 에 오경보의 기대수를 곱한  $T_0 \cdot E(F)$ 와 같다. 표본추출간격을  $h$ , 제 1종 오류의 확률을  $\alpha$ 라 할 때  $E(F)$ 는 다음과 같이 계산된다(Lorenzen and Vance(1986)).

$$E(F) = \alpha \cdot \frac{e^{-\lambda h}}{1 - e^{-\lambda h}}$$

공정상태를 검색하는 동안 생산이 계속되면  $D_1=1$ , 중단되면  $D_1=0$ 이라 할 때, 평균 관리상태 시간은 다음과 같다.

$$1/\lambda + (1 - D_1)T_0 \cdot E(F) \tag{4.1}$$

$i$ 번째와  $(i+1)$ 번째 표본 사이에 이상원인이 발생할 기대시간  $\tau$ 는 다음과 같다(Duncan(1956)).

$$\tau = \frac{1 - (1 + \lambda h)e^{-\lambda h}}{\lambda(1 - e^{-\lambda h})} \tag{4.2}$$

따라서 이상원인 발생 후부터 이상원인을 탐지하는 표본을 추출할 때까지의 기대시간은  $h \cdot ARL_\delta - \tau$ 로 주어진다.

하나의 관측값을 얻고 관리도에 적용하는데 소요되는 기대시간을  $e$ 라 하면 하나의 표본이  $n$ 개의 관측값으로 구성될 때, 표본을 분석하고 그 결과를 관리도에 적용하는데 소요되는 시간은  $ne$ 가 된다.  $T_1$ 을 이상원인을 발견하는데 소요되는 기대시간,  $T_2$ 를 공정을 수정하는데 소요되는 기대시간이라 하면 주기당 기대시간  $E(P_s)$ 는 다음과 같다.

$$E(P_s) = 1/\lambda + (1 - D_1)T_0 \cdot E(F) + h \cdot ARL_\delta - \tau + ne + T_1 + T_2 \tag{4.3}$$

$C_0$ 와  $C_A (> C_0)$ 를 공정이 관리상태와 이상상태 동안에 생산된 불량으로 인한 단위시간당

비용이라 하자. 공정을 수정하는 동안에 생산이 계속되면  $D_2=1$ , 중단되면  $D_2=0$ 이라 하면 불량으로 인한 주기당 기대비용은 다음과 같다.

$$C_0/\lambda + C_A(h \cdot ARL_\delta - \tau + ne + D_1T_1 + D_2T_2) \quad (4.4)$$

$C_F$ 를 오경보당 비용, 이상원인이 존재할 때 이를 검색하고 수정하는 비용을  $C_D$ 라 하면 오경보와 실제 이상원인의 검색 및 수정에 대한 기대비용은 다음과 같이 주어진다.

$$C_F \cdot E(F) + C_D \quad (4.5)$$

$a$ 를 표본당 고정비용이라 하고  $b$ 를 추출단위당 비용이라 하면 표본추출에 대한 주기당 기대비용은 다음과 같다.

$$(a + bn)(1/\lambda + h \cdot ARL_\delta - \tau + ne + D_1T_1 + D_2T_2)/h \quad (4.6)$$

식 (4.4), (4.5), (4.6)을 더하면 주기당 기대비용을 구할 수 있으며, 이를 주기당 기대시간으로 나누어 단일 이상원인 모형에서의 시간당 기대비용은 다음과 같이 계산한다.

$$L_S = \frac{1}{E(P_S)} \cdot \{C_0/\lambda + C_A(h \cdot ARL_\delta - \tau + ne + D_1T_1 + D_2T_2) + C_F \cdot E(F) + C_D + (a + bn) \cdot (1/\lambda + h \cdot ARL_\delta - \tau + ne + D_1T_1 + D_2T_2)/h\} \quad (4.7)$$

이러한 비용모형을 이용하여 EWMA 관리도에서 비용함수를 최소화하는 최적모수  $n$ ,  $r$ ,  $k$ ,  $h$ 의 값을 찾는 문제는 비용함수가 공정평균의 변화  $\delta$ , 모수  $n$ ,  $r$ ,  $k$ ,  $h$ 의 비선형함수로 표현되므로 제약조건(constraint)을 가진 비선형최적문제(nonlinear optimization problem)가 된다.

시간당 기대비용  $L_S$ 를 최소화하는 문제를 풀기 위해 Lasdon et al(1978)의 Generalized Reduced Gradient Method에 의한 GRG-II FORTRAN 부프로그램을 사용하였으며, 표본크기  $n$ 은 2부터 30 사이, 가중치  $r$ 은 (0, 1), 관리한계  $k$ 는 (0.1, 5), 표본추출간격  $h$ 는 (0.1, 10)의 범위에서 최적값을 찾는다. 표본크기  $n=2$ 는 공정분산을 추정할 수 있는 최소값이다.

공정의 가정을 완화하기 위하여  $C_0=0$ ,  $e=0$ ,  $T_1=0$ ,  $T_2=0$ ,  $D_1=1$ ,  $D_2=0$ 를 가정하면 시간당 기대비용은 다음과 같이 간단하게 표현된다.

$$L_S = \frac{C_A(h \cdot ARL_\delta - \tau) + C_F \cdot E(F) + C_D}{1/\lambda + h \cdot ARL_\delta - \tau} + \frac{(a + bn)}{h} \quad (4.8)$$

공정모수와 비용모수는 다음과 같이 고려한다. 모수들의 조합을 번호로 나타내는데 사용하기 위해 각 모수에 대응하는 정수값을 취하는 새로운 기호와 값을 괄호안에 나타내었다.



$$\delta(i_\delta) = 1.0(1), 2.0(2), 3.0(3)$$

$$\lambda(i_\lambda) = 0.001(1), 0.005(2), 0.01(3), 0.05(4)$$

$$C_F(i_F) = 50(1), 100(2)$$

$$C_A(i_A) = 100(1), 200(2)$$

$$C_D(i_D) = 25(1), 50(2)$$

$$a(i_a) = 0.0(1), 1.0(2)$$

$$b(i_b) = 0.1(1), 0.2(2)$$

이렇게 설정된 모수들의 값은 384개의 조합으로 구성되며, 이 조합에 따라 비용함수를 최소화시키는 최적모수  $n, r, k, h$ 를 구한 일부결과는 [표 1]과 같다. EWMA 관리도의 최적 가중치는 모든 조합에 대해 0.8788~0.9924 사이의 값으로 선정되었으며, 이것은 EWMA 관리도의 통계적 설계에서 주로 사용되는 값의 범위 0.05~0.25와는 많은 차이가 있음을 알 수 있다. 또한  $k$ 값도 3보다 큰 경우를 볼 수 있으며 표본크기와 표본추출간격도 경우에 따라 크게 차이가 있음을 알 수 있다. 따라서 경제적 설계에서의 공정모수는 통계적 설계에서 주로 사용되는 값들과 달리 결정해야 함을 알 수 있다.

[표 1] 공정모수와 비용모수에 따른 최적모수값

공정모수		비용모수					최적모수			
$\delta$	$\lambda$	$C_A$	$C_F$	$C_D$	$a$	$b$	$n$	$r$	$k$	$h$
3	0.001	200	100	25	0.0	0.2	2	0.8788	3.4065	1.7783
1	0.010	100	100	50	0.0	0.1	17	0.9110	3.0242	1.7478
1	0.005	200	100	50	1.0	0.1	20	0.9490	3.0033	2.3961
2	0.05	100	100	25	1.0	0.1	7	0.9770	3.4041	0.8341
3	0.001	100	100	50	1.0	0.1	4	0.9924	3.7060	5.2809

단일 이상원인을 가정한 EWMA 관리도의 경제적 설계에서 최적 가중치  $r$ 값은 1에 상당히 가까운 값을 가지게 되어  $\bar{X}$ -관리도의 특성과 유사해지는 경향을 나타내고 있다. 따라서 경제적 설계에서 EWMA 관리도가  $\bar{X}$ -관리도보다 효율적인가를 검토할 필요가 있으며, 이것은

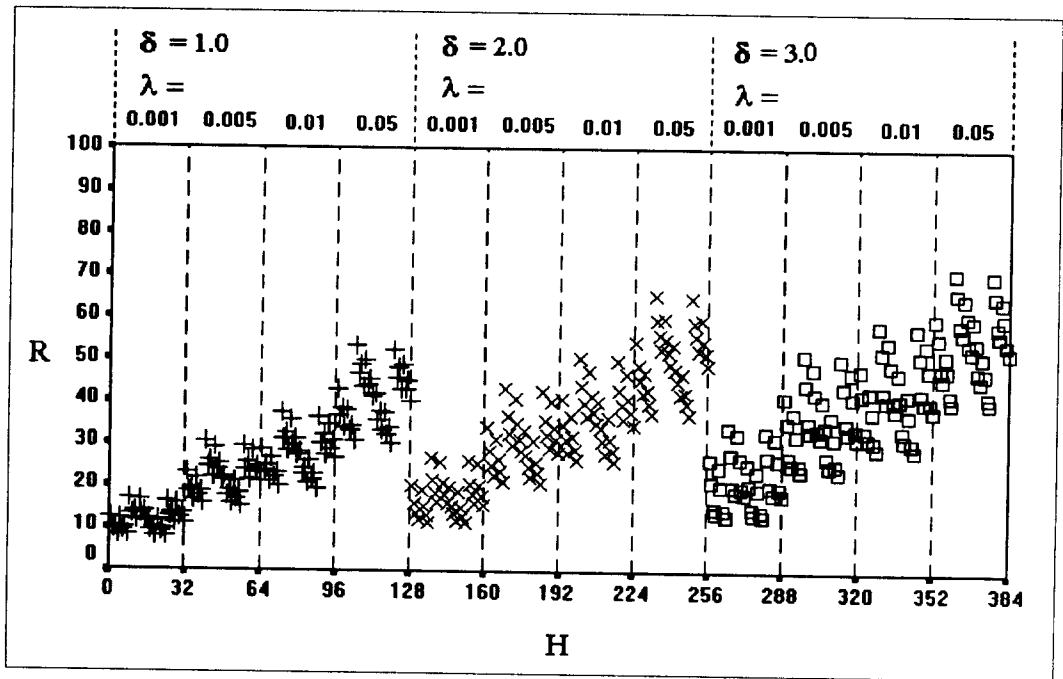
EWMA 관리도의  $\bar{X}$ -관리도에 대한 비용 감소율로써 나타낼 수 있다.  $\bar{X}$ -관리도의 최소 시간당 기대비용을  $L_{\bar{X}}$ , EWMA 관리도의 최소 시간당 기대비용  $L_{EWMA}$ 라 하고 다음과 같이 비용감소율을 정의한다.

$$R = \frac{L_{\bar{X}} - L_{EWMA}}{L_{\bar{X}}} \times 100 \quad (4.9)$$

비용감소율 R은 [그림 3]에 나타나 있다. 이때 수평축은 다음과 같이 정의한다.

$$H = i_b + 2(i_a - 1) + 2^2(i_F - 1) + 2^3(i_A - 1) + 2^4(i_D - 1) + 2^5(i_\lambda - 1) + 2^5 \cdot 3(i_\delta - 1)$$

[그림 3]에서 단일 이상원인 모형을 가정한 경우  $\bar{X}$ -관리도에 비해 EWMA 관리도는 최소 10% 내외에서 최대 70%의 비용감소 효과가 있음을 알 수 있다.



[그림 3]  $\bar{X}$ -관리도에 대한 EWMA 관리도의 비용감소율

4.2 다중 이상원인 모형

다중 이상원인 모형에서의 가정은 기본적으로는 단일 이상원인 모형의 가정과 같으나 다음과 같은 몇 가지 다른 가정을 사용한다.

- 1) 이상원인은  $g$ 개가 있으며, 각 원인이 발생할 때까지의 시간은 평균이  $1/\lambda_j, j=1, 2, \dots, g$  이고 서로 독립인 지수분포를 따른다.
- 2) 생산공정에서 관리값에 영향을 주는 이상원인들을  $A_1, A_2, \dots, A_g$ 이라 할 때 공정에서  $j$ 번째 이상원인  $A_j$ 가 발생함으로써 공정평균이  $\mu_j = \mu_0 + \delta_j\sigma, j=1, 2, \dots, g$ 로 변화된다.
- 3) 한 종류의 이상원인이 발생했을 때 같은 종류 또는 다른 종류의 이상원인은 발생하지 않는다.

위 가정으로부터 관리상태시간은  $g$ 개의 지수확률변수의 최소값이 되며 이것은 평균이  $1/\lambda$  (단,  $\lambda = \sum_{j=1}^g \lambda_j$ )인 지수확률변수를 따르게 된다. 또한 이상원인이 발생한 경우 그 원인이  $A_j$ 일 조건부 확률은  $\lambda_j/\lambda$ 가 된다.

먼저 평균 관리상태 시간은 다음과 같다.

$$\frac{1}{\lambda} + (1 - D_1)T_0 \cdot E(F) \tag{4.10}$$

$(i+1)$ 과  $i$ 번째 표본 사이에 이상원인  $A_j$ 가 발생할 기대시간  $\tau_j$ 는 다음과 같다.

$$\tau_j = \frac{1 - (1 + \lambda_j h)e^{-\lambda_j h}}{\lambda_j(1 - e^{-\lambda_j h})} \tag{4.11}$$

이상원인  $A_j$ 가 발생했을 때의 평균런길이를  $ARL_{\delta_j}$ 라 하면  $A_j$ 가 발생하고 이상원인을 탐지하는 표본을 추출할 때까지의 기대시간은  $h \cdot ARL_{\delta_j} - \tau_j$ 이다. 관측값을 얻고 관리도에 적용하는데 소요되는 지연시간  $ne$ , 이상원인  $A_j$ 를 발견하는데 소요되는 기대시간  $T_{1j}$ , 이상원인  $A_j$ 에 의한 공정수정시간  $T_{2j}$ 를 고려할 때 주기당 기대시간은 다음과 같이 표현된다.

$$E(P_M) = \frac{1 + \lambda(1 - D_1)T_0 \cdot E(F) + \sum_{j=1}^g \lambda_j \{ h \cdot ARL_{\delta_j} - \tau_j + ne + T_{1j} + T_{2j} \}}{\lambda} \tag{4.12}$$

$C_{A_j}$ 를 이상원인  $A_j$ 로 인한 단위시간당 비용,  $C_{D_j}$ 를 이상원인  $A_j$ 를 검색하고 수정하는 비용이라 하면 시간당기대비용은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned}
L_M = & \frac{1}{E(P_M)} \cdot [ C_0 \{ \frac{1}{\lambda} + (1-D_1)T_0 \cdot E(F) \} \\
& + \frac{\sum_{j=1}^k C_{A_j} \lambda_j (h \cdot ARL_{\delta_j} - \tau_j + ne + D_1 T_{1j} + D_2 T_{2j}) + \sum_{j=1}^k \lambda_j C_{D_j}}{\lambda} + C_F \cdot E(F) \\
& + \frac{(a+bn)}{h} \cdot \{ 1 + \lambda(1-D_1)T_0 \cdot E(F) + \sum_{j=1}^k \lambda_j (h \cdot ARL_{\delta_j} - \tau_j + ne + D_1 T_{1j} + D_2 T_{2j}) \} ]
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Duncan(1971)은 다중 이상원인 모형에서 여러 모수들의 값을 설정하였다. 이 논문에서도 모수들의 설정은 기본적으로 Duncan의 구조를 따르기로 한다.

이상원인의 수는  $g=12$ 로 하여  $\delta_j$ 들을 다음과 같이 설정한다.

$$\delta_j = (0.25 + 0.5j) I_{\delta}, \quad I_{\delta} = \frac{1}{3}, 1, 3, \quad j=1, 2, \dots, 12 \tag{4.14}$$

Duncan은  $I_{\delta}=1$ 인 경우만을 고려하였으나 이 논문에서는  $\delta_j$ 들을 보다 더 다양하게 설정하기 위해  $I_{\delta}=1/3, 3$ 인 경우도 고려한다. 이상원인의 시간당 평균발생비를  $\lambda_j$ 는  $\delta_j$ 에 반비례하여 음지수사전분포(negative exponential prior distribution)를 따른다고 가정한다. 즉,

$$\lambda_j \propto \frac{1}{2} e^{-\delta_j/2} . \tag{4.15}$$

$C_{A_j}$ 는 정규분포를 따르는 품질특성치가 규격한계  $\mu_0 \pm 3\sigma$  밖으로 나갈 확률의 크기에 비례해서 선택한다. 즉,

$$C_{A_j} \propto [ 1 - \Phi(3 - \delta_j) + \Phi(-3 - \delta_j) - 2\{1 - \Phi(3)\} ] \tag{4.16}$$

단,  $\Phi(\cdot)$ 은 표준정규분포함수.

$C_{A_j}$ 는  $\lambda_j$ 에 반비례하며, 조건  $\sum_{j=1}^{12} \lambda_j C_{A_j} = 1$ 을 가정한다.

일반적으로 이상원인이 존재할 때 그 변화의 양이 작을수록 검색이 용이하지 못하여 공정검색에 드는 비용은 커진다고 할 수 있다. 따라서 변화의 양이  $\delta_j=0$ 인 경우, 즉 오경보인 경우에는 공정검색에 드는 비용이 가장 커지게 되어  $C_{D_j}$ 는  $\delta_j$ 의 감소함수로서 다음과 같이 설정한다.

$$C_{D_j} = C_F \cdot \exp(-\sqrt{\delta_j}/2), \quad j=1, 2, \dots, 12 \tag{4.17}$$

주어진  $\delta_j$ 에 따른 조건부 확률  $\lambda_j/\lambda$ 와  $C_{A_j}$ ,  $C_{D_j}$ 의 값들은 [표 2]에 나타나 있다.

[표 2]  $\delta_j, \lambda_j/\lambda, C_{Aj}, C_{Dj}$  값

j	$\delta_j$ ( $\times I_\delta$ )	$\lambda_j/\lambda$			$C_{Aj}$			$C_{Dj}(\times C_F/50)$		
		$I_\delta=1/3$	1	3	$I_\delta=1/3$	1	3	$I_\delta=1/3$	1	3
1	0.75	0.1265	0.2328	0.5277	21.62	33.58	421.51	38.94	32.43	23.62
2	1.25	0.1164	0.1813	0.2493	63.32	130.52	1450.66	36.21	28.59	18.99
3	1.75	0.1071	0.1412	0.1177	133.75	359.57	1854.23	34.13	25.81	15.90
4	2.25	0.0985	0.1100	0.0556	242.51	782.09	1877.08	32.43	23.62	13.64
5	2.75	0.0906	0.0856	0.0263	402.51	1392.14	1877.24	30.98	21.82	11.89
6	3.25	0.0834	0.0667	0.0124	629.73	2081.62	1877.24	29.71	20.30	10.49
7	3.75	0.0767	0.0519	0.0059	942.72	2691.66	1877.24	28.59	18.99	9.35
8	4.25	0.0706	0.0405	0.0028	1361.68	3114.19	1877.24	27.58	17.84	8.39
9	4.75	0.0649	0.0315	0.0013	1906.94	3343.27	1877.24	26.65	16.82	7.57
10	5.25	0.0597	0.0245	0.0006	2597.10	3440.49	1877.24	25.81	15.90	6.87
11	5.75	0.0550	0.0191	0.0003	3446.72	3472.78	1877.24	25.02	15.08	6.27
12	6.25	0.0506	0.0149	0.0001	4464.06	3481.17	1877.24	24.30	14.33	5.74

\* 괄호속의 곱하기는 표의 값에 곱해지는 양을 나타냄.

단일 이상원인 모형에서 평균의 변화량  $\delta$ 는 다중 이상원인 모형에서 여러 이상원인에 의한 평균의 변화량  $\delta_j$ 의 평균으로 생각할 수 있다. 그러므로 다중 이상원인 모형과 단일 이상원인 모형의 비교를 위해 단일 이상원인 모형의 모수  $\delta, C_A, C_D$ 의 값들은 다중 이상원인 모형의 모수  $\delta_j, C_{Aj}, C_{Dj}$ 들의 사전분포에 의한 평균으로서 다음과 같이 설정한다.

$$\begin{aligned} \delta &= \sum_{j=1}^{12} \delta_j \frac{\lambda_j}{\lambda} \\ &= 1.004, 2.196, 3.591 \quad , I_\delta = \frac{1}{3}, 1, 3 \text{에 대해} \\ C_A &= \sum_{j=1}^{12} C_{Aj} \frac{\lambda_j}{\lambda} \\ &= 100, 200, 1000 \quad , \lambda = 0.001, 0.005, 0.01 \text{에 대해} \\ C_D &= \sum_{j=1}^{12} C_{Dj} \frac{\lambda_j}{\lambda} \\ &= (31.29, 25.32, 20.36)C_F/50 \quad , I_\delta = \frac{1}{3}, 1, 3 \text{에 대해} \end{aligned}$$

단일 이상원인모형에서 같이 공정의 가정을 완화하기 위하여  $C_0=0, e=0, T_{1j}=0, T_{2j}=0, D_1=1, D_2=0$ 를 가정하면 다중 이상원인 모형의 시간당 기대비용은 다음과 같이 표현된다.

$$L_M = \frac{\sum_{j=1}^{12} C_A \lambda_j (h AR L_{\delta_j} - \tau_j) + \sum_{j=1}^{12} \lambda_j C_{D_j} + \lambda C_F \cdot E(F)}{1 + \sum_{j=1}^{12} \lambda_j (h AR L_{\delta_j} - \tau_j)} + \frac{(a+bn)}{h} \quad (4.18)$$

공정모수와 비용모수는 다음과 같이 고려한다.

$$\delta(i_\delta) = 1.004(1), 2.196(2), 3.591(3)$$

$$\lambda(i_\lambda) = 0.001(1), 0.005(2), 0.01(3)$$

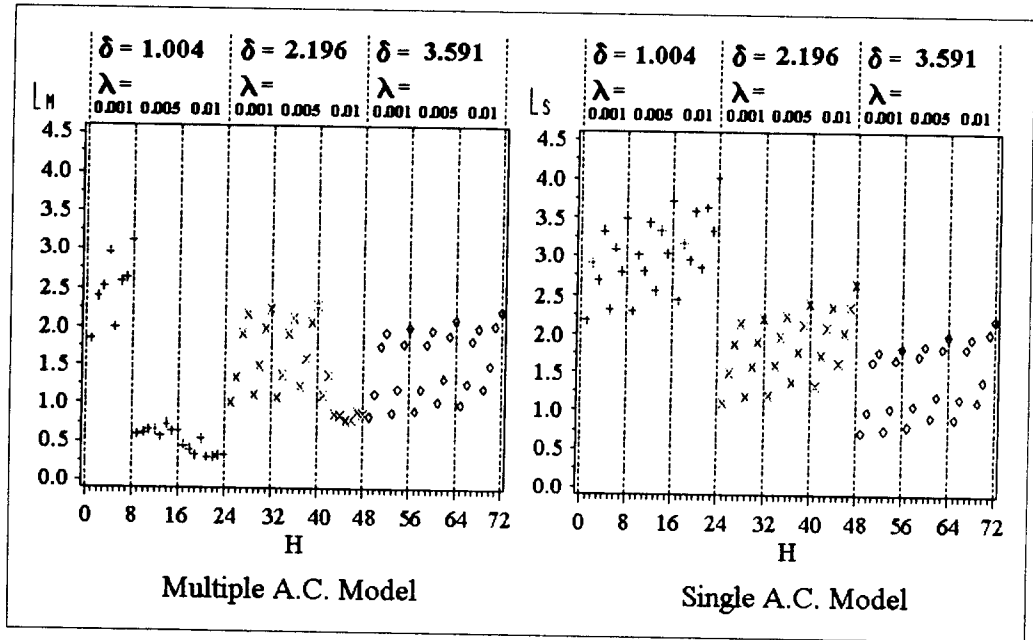
$$C_F(i_F) = 50(1), 100(2)$$

$$a(i_a) = 0.0(1), 1.0(2)$$

$$b(i_b) = 0.1(1), 0.2(2)$$

이와 같은 모수값에 대해 두 모형의 시간당 기대비용을 최소화하는 관리모수들을 찾기 위하여 Lasdon et al(1978)의 GRG-II FORTRAN 부프로그램을 사용하였으며, 이때의 시간당 기대비용  $L_S$ 와  $L_M$ 은 [그림 4]에 나타나 있다. 이때 수평축은 다음과 같이 정의한다.

$$H = i_b + 2(i_a - 1) + 2^2(i_F - 1) + 2^3(i_\lambda - 1) + 2^3 \cdot 3(i_\delta - 1)$$



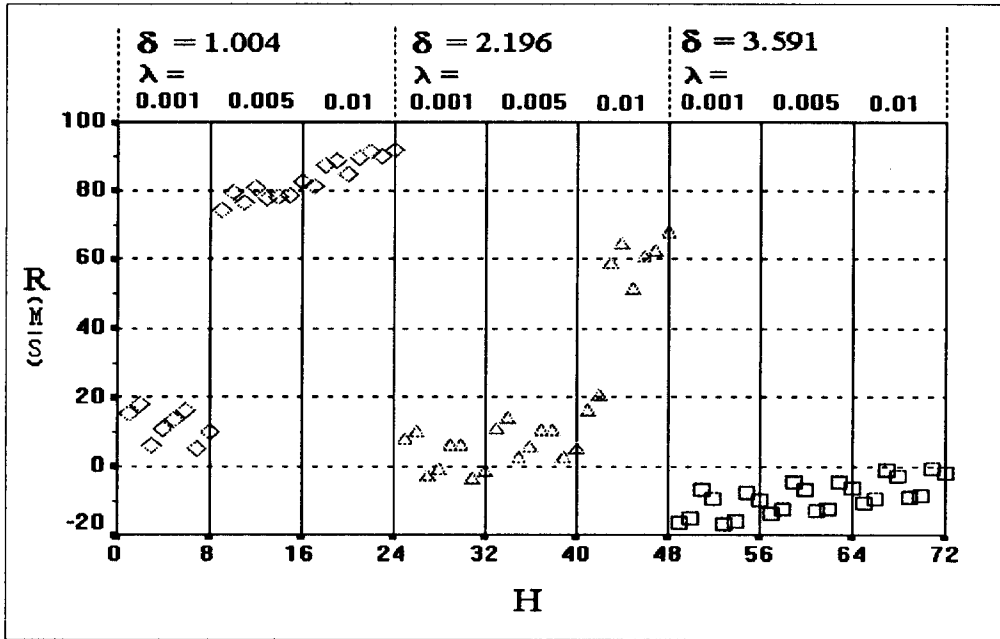
[그림 4] 다중 및 단일 이상원인 모형의 시간당 기대비용

4.3 단일 및 이상원인 모형의 비교분석

두 모형을 시간당 기대비용을 이용하여 비교하기 위해, 다중 이상원인 모형의 단일 이상원인 모형에 대한 시간당 기대비용의 감소율을  $R(M|S)$ 라 하고 다음과 같이 정의한다.

$$R(M|S) = \frac{L_S - L_M}{L_S} \times 100 \tag{4.19}$$

감소율  $R(M|S)$ 는 [그림 5]에 나타나 있다.



[그림 5] 단일 이상원인 모형에 대한 다중 이상원인 모형의 시간당 기대비용 감소율

[그림 5]에서 시간당 비용감소율은  $\delta$ 와  $\lambda$ 의 값에 따라 크기는 약 70%에서 90%, 작게는  $\pm 20\%$  내외로 나타남을 알 수 있다. 비용감소율은  $\delta$ 가 작을수록,  $\lambda$ 가 클수록 커지는 현상을 보이고 있다.

단일 및 다중 이상원인 모형에서 구한 최적모수값과 비용감소율은 [표 3]에 그 일부가 나타나 있다. [표 3]의 결과에서  $k$ 와  $h$ 는 두 모형에서 유사한 값을 보이고 있으나  $n$ 과  $r$ 은 경우에 따라 많은 차이가 남을 알 수 있다. 특히 가중치  $r$ 은 단일 이상원인 모형에서는 모든 값이 0.9에 가깝거나 그 보다 큰데 반해 다중 이상원인 모형에서는 0.5 주위에서 나타남을 알 수 있다.

이 결과에서 다중 이상원인이 존재하는 공정에서 단일 이상원인 모형을 사용하게 되면 시간당 기대비용에 대한 계산이 실제와 상당히 달라질 수 있으며, 또한 그에 따른 최적공정모수의 선정이 잘못되어 효율적인 설계를 할 수 없음을 알 수 있다. 구체적으로는 단일 이상원인 모형은  $\delta$ 의 값이 작을수록 시간당 기대비용을 크게,  $\delta$ 의 값이 클수록 시간당 기대비용을 작게 추정한다고 판단할 수 있다.

[표 3] 비용모수에 따른 다중 및 단일 이상원인 모형의 최적모수값

공정모수		비용모수					다중 이상원인 모형				단일 이상원인 모형				비용 감소율
$\delta$	$\lambda$	$C_A$	$C_F$	$C_D$	$a$	$b$	$n$	$r$	$k$	$h$	$n$	$r$	$k$	$h$	R(MIS)
1.004	0.001	1000	50	31.3	0	0.1	7	0.5195	2.8837	0.9973	15	0.9052	2.8183	1.6236	15.30
2.196	0.001	1000	50	25.3	1	0.2	4	0.5748	2.9967	1.8190	5	0.9726	3.1020	1.9782	-1.27
3.591	0.001	1000	50	20.4	0	0.2	2	0.6973	3.3325	0.7915	2	0.9601	3.4808	0.8731	-12.98
1.004	0.001	1000	100	62.6	1	0.1	12	0.5398	2.9669	1.9897	20	0.9499	3.0109	2.3854	5.49
2.196	0.001	1000	100	50.6	0	0.1	3	0.4589	3.5244	0.6442	4	0.8957	3.4380	0.8122	5.50
3.591	0.001	1000	100	40.7	1	0.1	4	0.9008	3.4876	1.6487	3	0.9932	3.8061	1.6093	-7.46
2.196	0.005	200	50	25.3	1	0.1	4	0.6374	3.1054	1.7586	5	0.9695	3.1593	1.7138	2.01
3.591	0.005	200	50	20.4	0	0.2	2	0.6983	3.3210	0.8131	2	0.9602	3.4803	0.8747	-12.38
2.196	0.005	200	100	50.6	0	0.2	3	0.5523	3.3665	1.0575	4	0.9147	3.2774	1.1855	10.13
3.591	0.005	200	100	40.7	0	0.1	2	0.6348	3.6821	0.5381	2	0.9387	3.7529	0.6031	-12.62
3.591	0.01	100	50	20.4	1	0.1	4	0.9250	3.2980	1.8653	3	0.9950	3.6932	1.6205	-0.83
3.591	0.01	100	100	40.7	1	0.2	3	0.8473	3.2500	1.9939	2	0.9672	3.3688	1.6587	-1.66

## 5. 결론

이 논문에서는 EWMA 관리도의 통계적 설계와 경제적 설계에서 최적모수의 설정문제에 대해 알아보았다. 통계적 설계에서는 최적모수값을 그림을 이용하여 결정할 수 있도록 하였다. 경제적 설계에서는 비용함수를 정의한 다음 단일 이상원인 모형과 다중 이상원인 모형에서의 최적모수와 그 때의 시간당 기대비용을 비교 연구하였다. 또한 관리형태도  $\bar{X}$ -관리도를 사용할 때와의 효율을 시간당 기대비용을 이용하여 비교함으로써 통계적 설계와 마찬가지로 경제적 설계에서도 EWMA 관리도가 더 효율적임을 보여 주었다. 경제적 설계에서는 다중 이상원인이



존재할 때 이상원인들에 의한 변화량의 평균값으로 단일 이상원인 모형을 가정할 경우 비용함수의 예측이 잘못될 수 있으며 그로 인하여 최적모수가 적절히 선정되지 못할 수도 있음을 보여 주었다. EWMA 관리도의 경제적 설계에서는 최적 가중치의 값이 통계적 설계에서 보다 큰 값을 가지게 되어 일반적으로 알려진 가중치의 값과 많이 다름을 알 수 있다.

이상과 같이 관리도의 경제적 설계에서는  $\bar{X}$ -관리도보다 EWMA 관리도를 사용함으로써 관리도의 효율을 크게 증가시킬 수 있음을 알 수 있으며 관리도에 사용되는 모수들은 주어진 공정 및 비용모수들에 따라 적절히 선택되어야 비용함수를 최소화할 수 있는 최적의 관리도를 설계할 수 있음을 나타내고 있다. 또한 단일 이상원인 모형보다는 다중 이상원인 모형을 고려함으로써 현실에 더 가까운 관리도를 설계할 수가 있다.

EWMA 관리도의 경제적 설계는 통계적 제약조건을 추가하여 적용함으로써 통계적 관점의 특성을 향상시키면서 비용면에서는 단지 미세한 증가를 보이는 관리도의 설계를 생각할 수 있다. 이와같은 경제적 통계설계모형은 Montgomery et al(1995)에 의해 연구되었으나 이는 단일 이상원인 모형에 국한된 것으로 다중 이상원인 모형에 대한 연구도 병행할 필요가 있다. 또한 변량표본추출비(variable sampling rate)를 사용한 EWMA 관리도의 경제적 설계도 연구 대상이 되고 있다. 변량표본추출비란 공정의 진행 중에 표본을 추출할 때 현시점의 관리통계량의 값에 따라 다음 시점의 표본크기와 표본추출간격을 달리함으로써 공정에 대한 판단을 좀 더 신속히 할 수 있도록 하는 표본추출방법을 말한다. 따라서 변량표본추출비를 사용할 경우에 EWMA 관리도의 경제적 설계에서 비용함수의 감소를 예상할 수 있으며 적용의 복잡성과 비교할 때 고려할 대상이 되는지를 연구할 필요가 있다고 판단된다.

## 참 고 문 헌

- [1] Abramowitz, M. and Stegun, I. A. (1964). Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables, Dover Publications, Inc., New York.
- [2] Box, G. and Kramer, T. (1992). Statistical Process Monitoring and Feedback Adjustment - A Discussion, *Technometrics*, Vol. 34, No. 3, 251-285.
- [3] Crowder, S. V. (1987a). A Simple Method for Studying Run-Length Distribution of Exponentially Weighted Moving Average Charts, *Technometrics*, Vol. 29, 393-407.
- [4] Crowder, S. V. (1987b). Average Run Length of Exponentially Weighted Moving Average Charts, *Journal of Quality Technology*, Vol. 19, 161-164.
- [5] Crowder, S. V. and Hamilton, M., (1992). An EWMA for Monitoring a Process Standard Deviation, *Journal of Quality Technology*, Vol. 24, 44-50.
- [6] Duncan, A. J. (1956). The Economic Design of  $\bar{X}$ -Charts Used to Maintain Current Control of a Process, *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 51,

228-242.

- [7] Duncan, A. J. (1971). The Economic Design of  $\bar{X}$ -Charts When There Is a Multiplicity of Assignable Causes, *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 66, 107-121.
- [8] Goel, A. L. and Jain, S. C. and Wu, S. M.(1968). An Algorithm for the Determination of the Economic Design of  $\bar{X}$ -Charts based on Duncan's Model, *Journal of the American Statistical Association*, Vol 63, 304-320.
- [9] Lasdon, L. S., Waren, A. D., Jain A. and Ranter M.(1978). Design and Testing of Generalized Reduced Gradient Code for Nonlinear Programming, *ACM Transactions on Mathematical Software*, Vol. 4, 34-50.
- [10] Lasdon, L. S. and Waren, A. D. (1983). GRG2 User's Guide.
- [11] Lorenzen, T. J. and Vance, L. C. (1986). The Economic Design of Control Charts; A Unified Approach, *Technometrics*, Vol. 28, No. 1, 3-10.
- [12] Lucas, J. M. and Saccucci, M. S. (1990). EWMA Control Chart Schemes : Properties and Enhancements, *Technometrics*, Vol 32. No 1. 1-12.
- [13] Montgomery, D. C. (1980). The Economic Design of Control Charts : A Review and Literature Survey, *Journal of Quality Technology*, Vol. 12, No. 2, 75-87.
- [14] Montgomery, D. C. (1982). Economic Design of an  $\bar{X}$ -Control Chart, *Journal of Quality Technology*, Vol. 14, No. 1, 40-43.
- [15] Montgomery, D. C., Tomng, J. C., Cochran, J. K. and Lawrence, F. P. (1995). Statistically Constrained Economic Design of EWMA Control Charts, *Journal of Quality Technology*, Vol. 27, No. 3, 250-256.
- [16] Page, E. S. (1954). Continuous Inspection Schemes, *Biometrika*, Vol 41, 100-115.
- [17] Park, C. and Reynolds, M. R. (1994). Economic Design of a Variable Sample Size  $\bar{X}$ -Charts, *Communication in Statistics : Simulation and Computation*, Vol. 23, No. 2, 467-483.
- [18] Roberts, S. W. (1959). Control Chart Tests based on Geometric Moving Average, *Technometrics*, Vol. 1, 239-250.
- [19] Robinson, P. O. and Ho, T. Y. (1978). Average Run Lengths of Geometric Moving Average Charts by Numerical Methods, *Technometrics*, Vol. 20, 85-93.
- [20] Saniga, E. M. (1989). Economic Statistical Control Charts Design with an Application to  $\bar{X}$  and R Charts, *Technometrics*, Vol. 31, No. 3, 313-321.
- [21] Shewhart, W. A. (1931). Economic control of Quality of Manufactured Product, New York : Van Nostrand.
- [22] Taylor, H. M. (1967). The Economic Design of Cumulative Sum Control Charts, *Technometrics*, Vol. 10, No. 3, 479-488.

## Selection of the Economically Optimal Parameters in the EWMA Control Chart<sup>1)</sup>

Chang-Soon Park<sup>2)</sup>, Tai-Yon Won<sup>3)</sup>

### Abstract

Exponentially weighted moving average(EWMA) control chart has been used widely for process monitoring and process adjustment recently, but there has not been many studies about the selection of the parameters.

Design of the control chart can be classified into the statistical design and the economic design. The purpose of the economic design is to minimize the cost function in which all the possible costs occurring during the process are considered, whereas the statistical design is to minimize the Type II error probability given the Type I error probability. In this paper the optimal parameters of the EWMA chart are selected for the economic design as well as for the statistical design. The optimal parameters for the economic design show significantly different from those of the statistical design, and especially the weight is always larger than that used in the statistical design.

In the economic design, we divide the model into the single assignable cause model and the multiple assignable causes model according to number of assignable causes considered. In the results of the single assignable cause model, which is used as the average context of the multiple assignable causes, it shows that the selection of the parameters may be misleading when the multiple assignable causes exist in practice.

- 
- 1) This paper was supported (in part) by NON DIRECTED RESEARCH FUND, Korea Research Foundation, 1994.
  - 2) Professor, Department of Applied Statistics, Chung-Ang University, Heuksuk-dong 221, Dongjak-gu, Seoul 156-756, Korea.
  - 3) Lecture, Department of Applied Statistics, Chung-Ang University, Heuksuk-dong 221, Dongjak-gu, Seoul 156-756, Korea.