한국통계학회논문집 제3권 3호
1996년 12월 pp. 247-251

이변량 비상관 종속 확률변수

박 춘 일[1)]

요 약

독립인 두 쌍의 확률변수에 대한 두 쌍의 복합형태는 비상관 종속인 순서쌍들과 독립인 쌍들로 나타낼 수 있다.

1. 서론

비상관 확률변수들의 순서쌍이 독립일 수도 아닐 수도 있다는 것은 잘 알려져 있다. 기초과정에서 통계학을 공부하고 있는 학생들은 이변량 정규분포가 독립성과 비상관성을 동시에 만족하는 유일한 이변량분포라고 믿고 있다. 본 논문의 목적은 독립인 두쌍의 확률변수에 대한 복합형태가 비상관 종속인 순서쌍들과 독립인 쌍들로 나타내어 질 수 있음을 간단한 예로써 인식시켜 주는데 있다.

2. 비상관 종속 순서쌍들의 이변량 복합형태

(X_i, Y_i)는 독립확률변수의 순서쌍이라 하고 (단 $i=1, 2$), $f_i(x)$를 X_i의 밀도함수, $g_i(y)$를 Y_i의 밀도함수라 하자. 그리고 X_1, X_2, Y_1, Y_2는 유한 기대값을 갖는다고 가정하자. (X, Y)는 (X_1, Y_1)과 (X_2, Y_2)의 복합형태이고, 그 밀도함수를

$$m(x, y) = pf_1(x)g_1(y) + qf_2(x)g_2(y) \tag{1}$$

라 하자. 여기서, $0 < p < 1$이고 $p+q=1$이다. 그러면, 순서쌍 (X, Y)는 확률 p를 갖는 독립인 순서쌍 (X_1, Y_1)과 같고, 확률 q를 갖는 독립인 순서쌍 (X_2, Y_2)와 같다.

따라서, X와 Y의 주변 밀도 함수는 다음과 같이 일변량 복합 밀도함수로 주어진다.

$$m_X(x) = pf_1(x) + qf_2(x), \tag{2}$$

$$m_Y(y) = pg_1(y) + qg_2(y), \tag{3}$$

1) (606-791) 부산시 영도구 동삼동 1번지, 한국해양대학교 응용수학과 부교수

즉, X와 Y가 독립이라는 것은 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$[f_1(x)-f_2(x)][g_1(y)-g_2(y)]=0 \tag{4}$$

이면 X와 Y는 독립이다.

증명) 독립성의 정의에 의해서,

$$m(x,y)=m_X(x)m_Y(y)$$

이다. 위의 (1)식에 의하여

$$m(x,y)=pf_1(x)g_1(y)+qf_2(x)g_2(y)$$

이다. 위의 (2), (3)식에 의하여

$$m_X(x)m_Y(y)=[pf_1(x)+qf_2(x)][pg_1(y)+qg_2(y)]$$

따라서,

$$pf_1(x)g_1(y)+qf_2(x)g_2(y)=[pf_1(x)+qf_2(x)][pg_1(y)+qg_2(y)]$$

$$pf_1(x)g_1(y)(1-p)+qf_2(x)g_2(y)(1-q)=pq[f_1(x)g_2(y)+f_2(x)g_1(y)]$$

$$pq[f_1(x)g_1(y)+f_2(x)g_2(y)]-pq[f_1(x)g_2(y)+f_2(x)g_1(y)]=0$$

$$pq\{f_1(x)[g_1(y)-g_2(y)]-f_2(x)[g_1(y)-g_2(y)]\}=0$$

$$pq[f_1(x)-f_2(x)][g_1(y)-g_2(y)]=0$$

이다. $pq>0$ 이므로

$$[f_1(x)-f_2(x)][g_1(y)-g_2(y)]=0$$

이다. ∎

또

$$Cov(X,Y)=pq[E(X_1)-E(X_2)][E(Y_1)-E(Y_2)] \tag{5}$$

이 된다.

증명)

$$\begin{aligned} E(XY) &= \int\int xy\ m(x,y)\,dxdy \\ &= \int\int xy[pf_1(x)g_1(y)+qf_2(x)g_2(y)]\,dxdy \\ &= \int[p\cdot yg_1(y)\cdot E(X_1)+q\cdot yg_2(y)\cdot E(X_2)]dy \\ &= pE(X_1)E(Y_1)+qE(X_2)E(Y_2). \end{aligned}$$

위의 (2)식에 의하여

$$E(X) = \int x\, m_x(x)\, dx = pE(X_1) + qE(X_2)$$

위의 (3)식에 의하여

$$E(Y) = \int y\, m_y(y)\, dy = pE(Y_1) + qE(Y_2)$$

다음에

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X, Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) \\
&= p\,E(X_1)E(Y_1) + qE(X_2)E(Y_2) - p^2E(X)E(Y) - pqE(X_1)E(Y_2) \\
&\quad - pqE(X_2)E(Y_1) - q^2E(X_2)E(Y_2) \\
&= (p-p^2)E(X_1)E(Y_1) - pqE(X_1)E(Y_2) - pqE(X_2)E(Y_1) \\
&\quad + (q-q^2)E(X_2)E(Y_2)
\end{aligned}$$

$q = 1-p$ 이므로

$$\begin{aligned}
&= pqE(X_1)E(Y_1) - pqE(X_1)E(Y_2) - pqE(X_2)E(Y_1) \\
&\quad + pqE(X_2)E(Y_2) \\
&= pq(E(X_1) - E(X_2))(E(Y_1) - E(Y_2)). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

$\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$ 이면 $\rho = 0$ 임에 유의하여, 만일

(i) $f_1(x) \not\equiv f_2(x)$

(ii) $g_1(y) \not\equiv g_2(y)$

(iii) $E(X_1) = E(X_2)$ 또는 $E(Y_1) = E(Y_2)$

이면, X와 Y는 비상관 종속이다. 그러므로, 독립 순서쌍의 복합형태는 적어도 한쌍의 평균이 같은 다른 밀도함수 $[f_1(x),\ f_2(x)]$와 $[g_1(y), g_2(y)]$의 순서쌍을 하나 선택할 수 있다면, 다음과 같은 비상관 종속 확률변수의 예를 들 수 있다.

3. 예제

예제 1. $\phi(x: \mu: \sigma^2)$은 정규확률밀도함수라 하자. 순서쌍 (X, Y)는 이변량 복합확률밀도함수이므로

$$m(x, y) = p\phi(x: \mu_1, \sigma_1^2)\phi(y: 2, 1) + q\phi(x: \mu_2, \sigma_2^2)\phi(y: 1, 1)$$

를 갖는다. 식 (5)에 의해

$$Cov(X, Y) = \frac{1}{pq}(\mu_1 - \mu_2)$$

이다. 만일

$$\mu_1 = \mu_2, \quad \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

이면, (X, Y)는 비상관 종속 순서쌍이다. 그러나, 만일

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2, \quad \mu_1 = \mu_2$$

이면, (X, Y)는 독립 순서쌍이 된다.

예제 2. $B(x:p, n)$는 이항확률밀도함수라 하자. 순서쌍 (X, Y)는 이변량확률밀도함수이므로

$$m(x, y) = \frac{1}{p}B(x:p_1, n_1)B(y:\frac{1}{2}, 4) + \frac{1}{q}B(x:p_2, n_2)B(y:\frac{1}{3}, 3)$$

이고, 식 (5)에 의해

$$Cov(X, Y) = \frac{1}{pq}(n_1 p_1 - n_2 p_2)$$

이다.

$$E(Y_1) = \frac{1}{2}\cdot 4 = 2, \quad E(Y_2) = \frac{1}{3}\cdot 3 = 1$$

이므로

$$E(Y_1) \neq E(Y_2)$$

이며

$$E(X_1) = n_1 p_1, \quad E(X_2) = n_2 p_2$$

이다.

만일, $n_1 p_1 = n_2 p_2$이고 $p_1 \neq p_2$이면, (X, Y)는 비상관 종속 순서쌍이다. 그러나 만일, $p_1 = p_2$이고 $n_1 = n_2$이면, (X, Y)는 독립 순서쌍이 된다.

4. 결론

본 논문에서는 이변량 정규분포가 독립성과 비상관성을 동시에 만족하는 유일한 이변량 분포라고 할 수 있겠으나 독립인 두 쌍의 확률변수에 대한 복합형태는 비상관 종속인 순서쌍들과 독립인 쌍들로 나타낼 수도 있다는 것을 살펴 보았다. 따라서 본 논문에서 보여준 2변량 정규분포 및 2항분포 예제외에도 기타 다른 분포에서도 예제를 들어 비상관 종속 순서쌍과 독립순서쌍으로 나타내어질 수 있음을 보이는데 많은 도움이 될 수 있을 것으로 생각된다.

참 고 문 헌

[1] Hogg.R.V.,and Craig, A.T. (1978). Introduction to Mathematical statistics (4th ed.), New York : Macmillan. 73-84.

[2] Jarad Behboodian (1990). Examples of uncorrelated dependent random variables using a bivariate mixture, *Journal of the American statistical Association*, Vol. 44, No. 3, 218.