한국통계학회논문집 제3권 3호
1996년 12월 pp. 169-178

척도모수에 대한 비모수적 검정법에 관한 연구[1)]

김 동 재[2)]

요 약

일반적인 실험군과 대조군의 척도모수에 대한 가설을 Orban과 Wolfe(1982)가 도입한 placement를 이용하여 비모수적 검정법을 제안하였다. 위치모수를 알고 있는 경우에 제안된 통계량의 귀무가설하에서의 평균과 분산 그리고 반복점근분포(iterative asymptotic distribution)를 구하였고 기존의 검정법들과 소표본 모의실험을 통하여 실험 유의수준과 실험 검정력을 비교하였다.

1. 서 론

대부분 비모수적 검정의 통계량은 관측값 자체보다는 부호나 순위를 사용한다. 이에 반해 Orban과 Wolfe(1982)는 placement라는 새로운 비모수적 도구를 도입하여 순위와는 다른 비모수적 방법론을 제안하고 있다. Kim(1994)은 두 모집단에서 위치모수의 차이에 대한 검정통계량으로 선형 placement 통계량과 선형순서통계량의 비교연구를 하였다. 이에 본 연구에서는 placement의 장점을 이용하여 두 모집단에서의 척도모수에 대한 검정법을 제안하려고 한다. 이는 모수적 방법을 사용하기 힘든 자료의 경우 이에 따른 적절한 비모수적 방법을 사용하여야 하는데 그 선택의 폭이 넓지 않고, 기존 검정방법의 검정력이 그리 높지 않은 것으로 알려져 있다. 또한 그간의 경험에 비추어 보면 실험군과 대조군 사이의 분포는 위치모수뿐만아니라 척도모수도 상당한 차이가 있는 경우가 많다. 이에 비록 실험자가 위치모수의 차이에 관심이 있다하더라도 척도모수의 동질성검정을 통하여 뚜렷한 반증이 없으면 척도모수가 같다는 가정하에 출발한 위치모수 검정법을 사용하고, 강한 반증이 있으면 척도모수가 다르다는 가정하에 출발한 위치모수 검정법을 선택하는 기준을 제시한다는 점에서 응용성이 높은 검정방법이라고 생각된다.

$X_1, X_2, \cdots, X_m$ 과 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 을 각각 대조군과 실험군에서 추출한 독립인 확률표본이라 하고 각각의 분포함수는 척도모수에 의하여 특징지어지는 같은 형태의 알려지지 않는 연속함수라고 가정한다. 즉

$$\text{대조군 : } X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_m \sim F\left(\frac{x-\eta}{\sigma_1}\right)$$

$$\text{실험군 : } Y_1,\ Y_2,\ \cdots,\ Y_n \sim F\left(\frac{x-\eta}{\sigma_1}\right)$$

---

1) 이 논문은 1995년도 한국학술진흥재단의 공모과제 연구비에 의하여 연구되었음.
2) (137-701) 서울 서초구 반포동 505 가톨릭대학교 의과대학 통계학과 조교수.

여기서 위치모수 η 는 각 군에서의 중앙값이다.

본 연구에서는 위와 같은 두 모집단에서 귀무가설 $H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$ 의 검정법을 2절에서 제안하고 3절에서는 제안된 검정통계량의 극한분포와 성질에 대하여 논의한다. 또한 4절에서 소표본 모의실험을 통하여 기존의 검정법들과 검정력을 비교하였다.

2. 제안된 검정법

검정통계량을 제안하기 위하여 위치모수 η 를 알고 있는 경우에는 각 군의 확률표본에서 η 를 뺀 후 절대값을 취하여 척도모수의 측도를 만든다.

$$X_i' = |X_i - \eta|, \quad i = 1, 2, \cdots, m$$
$$Y_j' = |Y_j - \eta|, \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

이 때 새로운 확률변수 X_i' 과 Y_j' 은 각각 $G_1(\cdot)$, $G_2(\cdot)$의 분포함수를 따른다고 가정할 수 있다. 또한 확률변수 U_1, U_2, $\cdots$, U_n 을 다음과 같이 정의한다.

$$mU_j = [\, Y_j' \text{ 보다 적거나 같은 } X_i' \text{ 들의 갯수}] \tag{1}$$

이 때 U_j 를 Y_j' 의 X'들 중의 placement라 부른다. 이 placement를 이용한 두 모집단에서 척도모수검정을 위한 분포무관 선형 placement 통계량을 다음과 같이 제안한다.

$$S_{n,m} = \sum_{j=1}^{n} \varphi_m(U_j). \tag{2}$$

여기서 $\varphi_m(x)$ 는 [0, 1]에서 정의된 실변수 함수이다.

위치모수 η 를 모르는 경우에는 표본으로부터 η 를 추정하여야 한다. 이 때 η 는 대조군과 실험군의 공통 위치모수이므로 통합 중앙값으로 추정한다.

$$\hat{\eta} = median(X_1, X_2, \cdots, X_m, Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$$

이 후 X_i', Y_j' 과 U_j 에 대한 정의는 위치모수 η 를 알고 있는 경우와 유사하게 η 를 $\hat{\eta}$ 로 대치하므로서 얻을 수 있고 두 모집단에서 척도모수 검정을 위한 placement 통계량은

$$S^*_{n,m} = \sum_{j=1}^{n} \varphi_m(U_j)$$

로 제안할 수 있다.

선형 placement 통계량의 몇 가지 예제를 고려해 보자. 첫째로 두 모집단에서 위치모수 검정을 위한 Mann-Whitney-Wilcoxon 통계량과 항등함수 $\varphi_m(x) = x$ 를 이용한 선형 placement 통계량이 유일하게 같다(Orban 과 Wolfe(1982))는 사실과 유사하게 Fligner와 Killeen(1976)이 제안한 검정법 ($T_{N,1}$)과 유일하게 같은 검정법이 된다. 둘째로 정규점수함수(Normal score function)를 이용하면 새로운 통계량

$$S_{n,m}^{NS} = \sum_{j=1}^{n} \Phi^{-1}[(mU_j + 1)/(m+2)]$$

이 만들어 진다. 여기서 $\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} \exp(-u^2/2)\,du$ 이다.

선형 placement 통계량은 두 모집단에서 실험군과 대조군의 할당에 대하여 symmetric 하지 않다. 그러나 한 집단의 표본크기가 다른 집단의 표본크기에 비해 월등히 클 경우에도 우리가 동의할 수 있는 할당방법이 있다. placement의 정의 (2)의 본질은 대조군의 경험분포(empirical distribution)에 대한 실험군의 자료에 대한 위치를 나타내므로 표본크기가 큰 모집단을 대조군으로 할당하는 것이 자연스러운 것이다. 또한 일반적으로 대조군의 표본이 실험군에 비해 얻기 쉬우므로 $m > n$ 이라 가정하여도 무방할 것이다.

선형 placement 통계량을 이용한 가설 $H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$ 를 검정하기 위하여 적절한 기각역을 정해주어야 한다. 물론 대립가설 H_1 에 따라 기각역의 형태는 달라져야 하겠지만 점수함수 φ_m 의 선택의 자유로움으로 인하여 일반성을 잃지 않고 통계량 $S_{n,m}$ 에 근거한 유의수준 α인 기각역은 다음과 같은 형태라고 가정할 수 있다.

$$\text{reject } H_0 : \sigma_1 = \sigma_2 \quad iff \quad S_{n,m} \geq S_\alpha$$

여기서 S_α 는 귀무가설하에서의 $S_{n,m}$ 의 분포의 제 100(1 - α) 백분위수이다.

3. 검정통계량의 분포와 성질

이 절에서는 공통의 위치모수 η 를 아는 경우에 제안된 통계량 $S_{n,m}$ 의 반복점근분포(iterative asymptotic distribution)를 Orban과 Wolfe(1982)의 결과를 이용하여 구하였다.

먼저 (1)에서 정의된 placement의 벡터를 $m\mathrm{U} = (mU_1, \cdots, mU_n)$ 이라 하고 $\mathrm{r} = (r_1, r_2, \cdots, r_n)$을 j 값을 갖는 r_i 들이 n_j 개, $0 \leq n_j \leq n$, $n_0 + \cdots + n_m = n$, $j = 0, 1, \cdots, m$ 을 만족하는 정수의 벡터라 하면 단순한 조합연산을 이용하여 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

정리 1. 만일 $H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$ 가 사실이라면

$$P_0[m\,\mathrm{U} = \mathrm{r}] = \frac{m!\cdot\prod_{j=0}^{m}(n_j!)}{(m+n)!}$$

여기서 벡터 r 은 j 값을 갖는 r_i 들이 n_j 개, $0 \le n_j \le n$, $n_0 + \cdots + n_m = n$, $j = 0, 1, \cdots, m$ 을 만족하는 정수 벡터이고 이를 만족시키지 못하는 벡터 r 에 대해서는 확률이 0이다.

이를 이용하여 귀무가설하에서의 선형 placement 통계량 $S_{n,m}$ 의 평균과 분산을 구하면

$$E_0(S_{n,m}) = n\,\overline{\varphi}_m$$

$$Var_0(S_{n,m}) = \frac{n(m+n+1)}{(m+1)(m+2)}\left[\sum_{i=0}^{m}\varphi_m^2\left(\frac{i}{m}\right) - (m+1)\,\overline{\varphi}_m^{\,2}\right]$$

이 되며 여기서 $\overline{\varphi}_m = \sum_{i=0}^{m}\varphi_m\left(\frac{i}{m}\right) \Big/ (m+1)$ 이다.

대조군의 표본크기 m이 무한히 커질 경우의 선형 placement 통계량 $S_{n,m}$ 의 점근분포에 대하여 알아보자. 이는 Orban과 Wolfe(1982)의 결과가 그대로 적용된다. 즉 점수함수 φ_m 에 대한 두 가지 가정과 분포함수에 대한 가정하에 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

가정 1. [0, 1]에서 정의된 실변수 함수 $\varphi(x)$는 많아야 유한개의 불연속점을 갖는다. 또한 불연속점의 집합을 Ψ이라 한다.

가정 2. [0, 1]에서 정의된 실변수 함수의 수열 $\{\varphi_m(x)\}$는 모든 폐구간 $[a, b] \subset [0, 1] - \Psi$에서 $\varphi(x)$로 균일(uniform) 하게 수렴한다.

가정 3. 분포함수 G_1 과 G_2 는 다음을 만족한다.

$$\int_{G_1(y)\in\Psi} dG_2(y) = 0$$

보조정리(Orban and Wolfe(1982))

가정 1과 2를 만족할 때, 임의의 $\varepsilon > 0$에 대하여

$$P\{\,|\,\varphi_m(G_{1,m}(y)) - \varphi(G_1(y))\,| < \varepsilon\,\} \xrightarrow{m\to\infty} 1$$

을 만족한다. 여기서 $G_{1,m}$ 은 확률변수 Y의 경험분포이다.

정리 2(Orban and Wolfe(1982))

선형 placement 통계량의 수열 $S_{n,m}$ 이 가정 1과 2를 만족하고 분포함수 G_1, G_2 가 가정 3을 만족하면 $m \to \infty$ 일 때

$$S_{n,m} - S_n \xrightarrow{p} 0$$

이다. 여기서 $S_n = \sum_{j=1}^{n} \varphi[G_1(Y_j')]$이고 $\varphi(x) = \lim_{m\to\infty} \varphi_m(x)$ 이다.

또한 임의의 x에 대하여

$$\lim_{m\to\infty} P[S_{n,m} \le x] = P[S_n \le x]$$

이 성립한다.

여기서 우리의 관심사는 n에 대한 수열인 $S_n = \sum_{j=1}^{n} \varphi[G_1(Y_j')]$의 점근분포에 있다. 만일 공통의 위치모수 η를 알고 있을 경우에는 $Y_1', Y_2', \cdots, Y_n'$ 이 서로 독립이고 동일한 분포를 가지므로 $\varphi[G_1(Y_j')]$도 마찬가지로 확률표본이다. 그러므로 중심극한정리를 이용하면 표준화된 S_n 의 점근분포 $(n\to\infty)$는 표준정규분포가 된다. 즉

$$\frac{S_n - n\overline{\varphi}}{\sqrt{nV_\varphi}} \xrightarrow{d} N(0, 1)$$

여기서 $\overline{\varphi} = E(\varphi[G_1(Y_j')]) = \int \varphi[G_1(y)]dG_2(y)$

$$V_\varphi = Var(\varphi[G_1(Y_j')]) = \int (\varphi[G_1(y)] - \overline{\varphi})^2 dG_2(y)$$

이다. 이 사실은 정리 2의 결과와 더불어 반복적인 개념 ($m\to\infty$ 이고 그 후 $n\to\infty$)에서 $\frac{S_{n,m} - n\overline{\varphi}}{\sqrt{nV_\varphi}}$ 는 표준정규분포로 점근해 감을 알 수 있다. 이 반복점근분포를 이용하여 주어진 선형 placement 통계량 $S_{n,m}$ 의 근사적인 기각역과 검정력함수를 구할 수 있다.

4. 소표본 모의실험 및 결론

이 절에서는 제안된 검정법의 소표본 몬테카를로 실험을 통한 실험 유의수준과 실험 검정력을 기존의 방법과 비교하고자 한다. 이 비교실험에서 제안된 검정법은 그 점수함수를 항등함수를 이용하여 위치모수 η를 알고 있는 경우(IK)와 모르고 있는 경우(IU)를 고려하였고, 점수함수를 정규점수함수를 이용하여 위치모수 η를 알고 있는 경우(NK)와 모르고 있는 경우(NU)를 고려하였

다. 또한 기존의 두 모집단에서의 분산의 검정중에서 모수적 방법으로 F 검정(F), 비모수적 방법으로 Mood(1954)의 검정법(M), Ansari-Bradley(1960)의 검정법(AB)을 비교대상으로 하여 가설

$$H_0 : \sigma_1 = \sigma_2 \quad vs \quad H_1 : \sigma_1 < \sigma_2$$

를 검정하였다.

소표본 모의실험에서 표본크기 (m, n) = (5, 5), (5, 10), (10, 5), (8, 8), (5, 15), (15, 5), (10, 10)를, 분산비 $\sigma_2^2 / \sigma_1^2 = 1, 2, 3, 4, 5$, 유의수준 $\alpha = 0.05$를 이용하였다. 또한 모집단의 분포로는 균일, 정규, 이중지수 분포를 가정하였으며 International Mathematical and Statistical Libraries(IMSL)의 RNUN, RNNOR을 이용하여 표본자료를 만들었다.

각각의 경우에서 10,000회 반복을 통하여 실험 유의수준과 실험 검정력의 추정치를 얻었으며 이를 토대로 다음의 표를 구하였다. 표 1에는 모집단의 분포가 균일분포를 따를 때를, 표 2에는 정규분포를 그리고 이중지수분포를 따를 때는 표 3에 정리하였다.

소표본 모의실험을 통하여 우리는 다음과 같은 몇 가지 사실을 알 수 있다. 첫째로 모수적 F 검정은 모집단의 분포가 정규분포일 경우를 제외하고는 제 1종 오류를 범할 확률을 전혀 제어하지 못하므로 정규모집단의 가정 없이는 사용하기 힘든 방법이다. 둘째로 기존의 비모수적 검정법인 Mood의 검정법과 Ansari-Bradley의 검정법은 제 1종 오류를 범할 확률이 실제 유의수준과 대부분의 경우에 약간의 차이를 나타내고 있으며, 두 검정법의 비교에서는 대부분의 경우 Mood의 검정법이 검정력 측면에서 좋게 나타났으나 새로 제안된 검정법에 비하여는 검정력이 낮게 나타났다. 세번째로 새로 제안된 검정법의 비교에서는 대부분의 경우에 정규점수함수를 이용한 검정법이 항등함수를 이용한 검정법의 검정력 보다 높았으며, 이는 전체 표본크기가 많아질수록 차이가 심화된다. 네번째로 표본크기 측면에서는 전체 표본크기가 같을 때 대조군과 실험군의 크기가 같은 경우가 한쪽군으로 치우친 경우에 비해 검정력이 좋아진다. 이는 2절에서 언급한 placement 의 본질과는 상이한 결과이다. 마지막으로 위치모수를 모르는 경우의 검정력은 모집단의 분포가 균일분포일 때를 제외하고는 위치모수를 알고 있는 경우에 비하여 검정력이 거의 떨어지지 않는다. 또한 기존의 비모수적 검정법에 비하여는 더 좋은 검정력을 나타낸다는 것을 알 수 있다. 결론적으로 우리는 소표본 모의실험을 통하여 모집단의 분포가 정규분포가 아니라면 두 모집단의 척도모수에 대한 검정은 새로 제안된 검정법을 사용하는 것이 유의수준의 제어 측면이나 검정력 측면에서 유리하다는 것을 알 수 있다.

마지막으로 대조군과 실험군의 위치모수가 다른 경우를 고려해 보자. 만일 각각의 위치모수를 알고 있을 때는 각 군의 확률표본에서 각각의 위치모수를 뺀 후 절대값을 취하여 척도모수의 측도를 만들고, 각각의 위치모수를 모르고 있을 때는 통합 중앙값을 사용할 수 없으므로 각각의 표본에서의 중앙값으로 각 군의 위치모수들을 추정하여 같은방법으로 척도모수의 측도를 만들어야 한다. 이 후의 검정방법은 제안된 검정법과 유사하게 할 수 있다.

참고문헌

[1] Ansari, A. R. and Bradley, R. A. (1960). Rank-sum tests for dispersions. *Annals of Mathematical Statistics*, Vol. 31, 1174-1189.

[2] Fligner, M. A. and Killeen, T. J. (1976). Distribution-free two-sample tests for scale. *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 71, 210-213.

[3] Mood, A. M. (1954). On the asymptotic efficiency of certain nonparametric two-sample tests. *Annals of Mathematical Statistics*, Vol. 25, 514-522.

[4] Kim, D. (1994). A comparison of distribution-free two-sample procedures based on placements or ranks. *Journal of the Korean Statistical Society*, Vol. 23, 135-150.

[5] Orban, J. and Wolfe, D. A. (1982). A class of distribution-free two-sample tests based on placements. *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 77, 666-671.

표 1. 제안된 검정법과 비교대상 검정법의 실험 유의수준과 실험 검정력의 추정치 (균일 분포)

(m, n)	σ_2^2 / σ_1^2	IK	NK	IU	NU	M	AB	F
(5, 5)	1	0.0459	0.0431	0.0454	0.0416	0.0622	0.0699	0.0263
	2	0.3753	0.3739	0.0892	0.0871	0.3741	0.3809	0.2858
	3	0.5887	0.5883	0.2082	0.2059	0.5574	0.5630	0.6771
	4	0.6996	0.6992	0.3691	0.3676	0.6514	0.6549	0.8627
	5	0.7634	0.7633	0.4979	0.4972	0.7002	0.7024	0.9335
(5, 10)	1	0.0529	0.0554	0.0511	0.0567	0.0494	0.0398	0.0266
	2	0.4806	0.5255	0.0820	0.0952	0.4549	0.3558	0.2989
	3	0.7411	0.7813	0.2357	0.2652	0.6639	0.5671	0.7642
	4	0.8692	0.8990	0.4712	0.5192	0.7661	0.6908	0.9588
	5	0.9213	0.9416	0.6355	0.6841	0.8021	0.7449	0.9919
(10, 5)	1	0.0512	0.0505	0.0537	0.0539	0.0540	0.0469	0.0155
	2	0.4910	0.5398	0.1162	0.1418	0.4990	0.4276	0.5459
	3	0.7090	0.7539	0.2861	0.3260	0.6920	0.6214	0.8627
	4	0.8251	0.8567	0.4913	0.5457	0.7832	0.7241	0.9511
	5	0.8789	0.9036	0.6306	0.6810	0.8320	0.7822	0.9792
(8, 8)	1	0.0508	0.0495	0.0474	0.0473	0.0490	0.0573	0.0169
	2	0.5579	0.6003	0.1162	0.1320	0.5452	0.5073	0.5438
	3	0.8104	0.8434	0.3198	0.3485	0.7664	0.7364	0.9341
	4	0.8993	0.9205	0.5617	0.6052	0.8401	0.8201	0.9887
	5	0.9437	0.9585	0.7140	0.7501	0.8729	0.8660	0.9978
(5, 15)	1	0.0459	0.0483	0.0506	0.0517	0.0540	0.0583	0.0278
	2	0.5198	0.5536	0.0801	0.0873	0.5414	0.4982	0.2996
	3	0.8178	0.8453	0.2557	0.2766	0.7779	0.7338	0.7988
	4	0.9239	0.9388	0.5053	0.5466	0.8648	0.8248	0.9780
	5	0.9669	0.9758	0.6960	0.7317	0.8954	0.8566	0.9985
(15, 5)	1	0.0477	0.0513	0.0528	0.0569	0.0555	0.0600	0.0107
	2	0.5318	0.6120	0.1373	0.1820	0.5824	0.5217	0.6185
	3	0.7483	0.8178	0.3148	0.3839	0.7901	0.7337	0.9019
	4	0.8471	0.8997	0.5329	0.6222	0.8689	0.8270	0.9632
	5	0.8962	0.9350	0.6630	0.7384	0.9093	0.8770	0.9829
(10, 10)	1	0.0531	0.0519	0.0508	0.0499	0.0501	0.0565	0.0130
	2	0.6463	0.7015	0.1291	0.1544	0.6614	0.5966	0.6912
	3	0.8759	0.9077	0.3715	0.4195	0.8714	0.8303	0.9791
	4	0.9521	0.9665	0.6471	0.7024	0.9268	0.9084	0.9978
	5	0.9756	0.9860	0.8007	0.8455	0.9481	0.9378	0.9998

표 2. 제안된 검정법과 비교대상 검정법의 실험 유의수준과 실험 검정력의 추정치 (정규 분포)

(m, n)	σ_2^2 / σ_1^2	IK	NK	IU	NU	M	AB	F
(5, 5)	1	0.0465	0.0433	0.0468	0.0436	0.0620	0.0700	0.0504
	2	0.2804	0.2717	0.2714	0.2628	0.2869	0.2983	0.3314
	3	0.4791	0.4745	0.4590	0.4545	0.4506	0.4608	0.6315
	4	0.6154	0.6123	0.5927	0.5895	0.5616	0.5709	0.7991
	5	0.7086	0.7075	0.6825	0.6811	0.6302	0.6370	0.8901
(5, 10)	1	0.0508	0.0544	0.0506	0.0542	0.0544	0.0454	0.0545
	2	0.3415	0.3715	0.3319	0.3615	0.3153	0.2494	0.3666
	3	0.6172	0.6521	0.5881	0.6224	0.5352	0.4508	0.7117
	4	0.7754	0.8096	0.7376	0.7726	0.6560	0.5784	0.8966
	5	0.8722	0.8964	0.8320	0.8592	0.7472	0.6734	0.9649
(10, 5)	1	0.0481	0.0473	0.0481	0.0473	0.0520	0.0452	0.0464
	2	0.3672	0.3947	0.3654	0.3927	0.3576	0.3081	0.4982
	3	0.6222	0.6600	0.6179	0.6559	0.6000	0.5298	0.8013
	4	0.7530	0.7873	0.7495	0.7839	0.7187	0.6561	0.9171
	5	0.8221	0.8556	0.8182	0.8522	0.7760	0.7123	0.9592
(8, 8)	1	0.0503	0.0489	0.0503	0.0489	0.0484	0.0569	0.0449
	2	0.4164	0.4382	0.4127	0.4338	0.3858	0.3820	0.5324
	3	0.7013	0.7301	0.6927	0.7216	0.6523	0.6286	0.8634
	4	0.8285	0.8498	0.8190	0.8404	0.7570	0.7371	0.9575
	5	0.9016	0.9172	0.8939	0.9105	0.8249	0.8127	0.9890
(5, 15)	1	0.0468	0.0488	0.0468	0.0488	0.0527	0.0569	0.0502
	2	0.3742	0.3929	0.3672	0.3853	0.3636	0.3582	0.3880
	3	0.6835	0.7057	0.6594	0.6814	0.6278	0.6005	0.7531
	4	0.8486	0.8689	0.8164	0.8381	0.7779	0.7493	0.9318
	5	0.9218	0.9338	0.8899	0.9049	0.8386	0.8068	0.9815
(15, 5)	1	0.0478	0.0507	0.0477	0.0505	0.0540	0.0584	0.0517
	2	0.4089	0.4653	0.4085	0.4649	0.4244	0.4016	0.5636
	3	0.6737	0.7297	0.6733	0.7292	0.6858	0.6471	0.8481
	4	0.7871	0.8407	0.7866	0.8400	0.7934	0.7622	0.9371
	5	0.8506	0.8929	0.8498	0.8923	0.8500	0.8184	0.9722
(10, 10)	1	0.0513	0.0490	0.0513	0.0490	0.0473	0.0534	0.0500
	2	0.4932	0.5174	0.4915	0.5155	0.4675	0.4515	0.6356
	3	0.7881	0.8150	0.7829	0.8096	0.7547	0.7218	0.9302
	4	0.9057	0.9256	0.9018	0.9224	0.8783	0.8569	0.9889
	5	0.9513	0.9652	0.9492	0.9637	0.9227	0.9072	0.9970

표 3. 제안된 검정법과 비교대상 검정법의 실험 유의수준과 실험 검정력의 추정치(이중지수분포)

$(m,\ n)$	σ_2^2 / σ_1^2	IK	NK	IU	NU	M	AB	F
(5, 5)	1	0.0470	0.0426	0.0471	0.0426	0.0664	0.0765	0.1012
	2	0.2079	0.1986	0.2042	0.1949	0.2133	0.2273	0.3654
	3	0.3688	0.3599	0.3537	0.3449	0.3453	0.3583	0.5938
	4	0.5046	0.4961	0.4821	0.4745	0.4557	0.4695	0.7473
	5	0.5834	0.5777	0.5575	0.5518	0.5130	0.5243	0.8312
(5, 10)	1	0.0506	0.0553	0.0507	0.0553	0.0496	0.0389	0.1062
	2	0.2624	0.2822	0.2577	0.2770	0.2288	0.1861	0.4419
	3	0.4694	0.4956	0.4531	0.4802	0.4014	0.3345	0.6892
	4	0.6310	0.6614	0.6025	0.6338	0.5281	0.4553	0.8448
	5	0.7444	0.7718	0.7100	0.7410	0.6201	0.5388	0.9146
(10, 5)	1	0.0476	0.0461	0.0476	0.0462	0.0508	0.0450	0.1056
	2	0.2793	0.2949	0.2776	0.2933	0.2694	0.2349	0.4728
	3	0.4872	0.5144	0.4851	0.5123	0.4662	0.4069	0.7186
	4	0.6292	0.6609	0.6249	0.6567	0.5913	0.5341	0.8482
	5	0.7273	0.7605	0.7195	0.7536	0.6688	0.6085	0.9089
(8, 8)	1	0.0540	0.0533	0.0539	0.0532	0.0484	0.0575	0.1109
	2	0.3098	0.3199	0.3067	0.3165	0.2695	0.2777	0.5168
	3	0.5442	0.5642	0.5390	0.5589	0.4796	0.4749	0.7855
	4	0.7214	0.7426	0.7108	0.7322	0.6347	0.6271	0.9041
	5	0.8139	0.8332	0.8043	0.8249	0.7206	0.7108	0.9526
(5, 15)	1	0.0516	0.0532	0.0515	0.0531	0.0528	0.0581	0.1120
	2	0.2747	0.2857	0.2701	0.2813	0.2598	0.2661	0.4544
	3	0.5269	0.5436	0.5120	0.5291	0.4757	0.4705	0.7342
	4	0.6991	0.7184	0.6740	0.6942	0.6262	0.6133	0.8669
	5	0.8063	0.8243	0.7744	0.7944	0.7224	0.6940	0.9446
(15, 5)	1	0.0468	0.0501	0.0467	0.0500	0.0542	0.0556	0.1002
	2	0.2904	0.3280	0.2901	0.3281	0.2978	0.2932	0.4936
	3	0.5248	0.5744	0.5239	0.5734	0.5277	0.5048	0.7491
	4	0.6726	0.7252	0.6715	0.7244	0.6659	0.6430	0.8649
	5	0.7713	0.8145	0.7703	0.8137	0.7685	0.7385	0.9345
(10, 10)	1	0.0506	0.0503	0.0506	0.0503	0.0506	0.0567	0.1152
	2	0.3663	0.3766	0.3653	0.3754	0.3331	0.3327	0.5943
	3	0.6492	0.6716	0.6432	0.6657	0.5951	0.5781	0.8583
	4	0.7977	0.8209	0.7918	0.8152	0.7476	0.7279	0.9507
	5	0.8863	0.9036	0.8813	0.8989	0.8374	0.8160	0.9804