한국통계학회논문집 제3권 3호
1996년 12월 pp. 83-92

확률화 블록 계획법에서 우산형 대립가설에 대한 점근 분포 무관 검정법의 연구[1)]

김 동 희[2)], 김 현 기[3)], 이 주 현[4)]

요 약

확률화 블록 계획법에서 우산형 대립가설에 대한 점근 분포 무관 검정법을 제시하고 제안된 검정통계량의 점근적 정규성과 모수적 방법 및 비모수적 방법의 점근상대효율을 관찰하였다.

검정통계량은 블록 효과를 추정하여 제거한 관측치의 전체 블록 순위를 사용하여 제안하였으며 제안된 검정통계량의 소표본 Monte Carlo연구를 통해 실험 검정력을 비교하였다. 그 결과 본 논문에서 제안된 검정통계량이 꼬리가 두꺼운 분포에서는 전반적으로 우수하고 로버스트한 것으로 나타났다.

1. 서 론

사람이 어떤 일을 수행할 때 수행할 능력은 나이에 따라 증가하다가 어느 연령을 기점으로 수행능력이 감소하는 것을 볼 수 있다. 이를테면 지적인 능력, 신체적 능력 등이 이에 해당하며 그 외에도 얼마든지 이와 같은 예를 찾을 수 있다. 이러한 경우 수행 능력이 증가하다가 어느 시점을 기준으로 감소하는지를 검정해 보고 싶을때, 이와 같은 가설을 우산형 대립가설이라 부른다.

Mack과 Wolfe(1981)는 k개의 표본 문제에 대하여 Mann-Whitney통계량을 사용하여 위와같은 문제를 다루었으며, Mansouri-Ghiassi와 Govindarajulu(1986)는 $\sqrt{N}$ -일치 추정량을 이용하여 순서 대립가설에 관하여 점근 분포 무관 검정법을 소개하였다.

본 논문에서는 확률화 블록 계획법에서 처리 효과의 우산형 대립가설을 검정하고자하며 모형은 다음과 같다.

$$X_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ijk}, \quad i = 1, \cdots, I, \quad j = 1, \cdots, J, \quad k = 1, \cdots, n_{ij}$$

여기서 X_{ijk} 는 연속이며 미지의 분포함수 $F(\cdot)$를 가지고, μ 는 전체 평균이고, α_i 는 블록 효과이며, β_j 는 처리 효과이다. 그리고, ε_{ijk} 는 오차항으로써 서로 독립이고 동일한 분포를 갖는 확률 변수이다. 본 논문에서는 다음과 같은 우산형 대립가설의 검정문제에 관심이 있다.

---

1) 이 논문은 1995년도 한국학술진흥재단의 공모과제 연구비에 의하여 연구되었음
2) (609-735) 부산광역시 금정구 장전동 부산대학교 통계학과 교수
3) (609-735) 부산광역시 금정구 장전동 부산대학교 통계학과 박사과정
4) (609-735) 부산광역시 금정구 장전동 부산대학교 통계학과 석사

귀무가설 $H_0 : \beta_1 = \cdots = \beta_J$

대립가설 $H_1 : \beta_1 \le \cdots \le \beta_l \ge \cdots \ge \beta_J$ (적어도 한 부등식은 순 증가)

이러한 가설하에서 $\widehat{\alpha_i}$ (블록 효과)를 추정하여 관측치에서 소거한 $X_{ijk} - \widehat{\alpha_i}$ 의 순위를 사용하여 검정 통계량을 만들고 이 검정 통계량과 수정된 Puri 통계량과 김동희, 김영철(1992) 이 제안한 통계량과 비교하여 제안된 검정법이 기존의 검정법 보다 효율적이고, 전반적으로 로버스트하다는 것을 보이고자 하는 것이다.

2장에서는 검정통계량의 점근적 성질을 조사해 보겠다. 3장에서는 전이 대립 가설하에서의 검정통계량과 모수적 통계량 및 비모수적 통계량들의 점근적 성질을 알아보고 점근 상대 효율을 조사하였다. 4장에서는 실험 검정력을 비교하기 위하여 소표본 Monte-Carlo 실험을 수행하였다.

2. 제안된 검정 통계량

본 논문에서는 I개의 블록과 J개의 처리를 가지고 교호 작용이 없는 확률화 블록 계획법에서 하나 이상의 관찰치 $n_{ij} \ge 1$를 갖는 모형을 생각해 보자.

귀무가설 H_0을 검정하기 위한 검정 통계량은 다음과 같다.

$$S(\hat{\alpha}) = \sum_{u=1}^{l-1} \sum_{v=u+1}^{l} S_{uv}(\hat{\alpha}) + \sum_{u=l}^{J-1} \sum_{v=u+1}^{J} S_{vu}(\hat{\alpha})$$

여기서 $S_{uv}(\hat{\alpha}) = \sum_{i=1}^{I} \sum_{i'=1}^{I} \sum_{s=1}^{n_{iu}} \sum_{t=1}^{n_{i'v}} \Psi(Z_{i'vt}(\hat{\alpha}) - Z_{ius}(\hat{\alpha}))$ 이며 $Z_{ijk}(\hat{\alpha}) = X_{ijk} - \widehat{\alpha_i}$ 이다.

(단, $\widehat{\alpha_i} = \overline{X}_{i..} - \overline{X}$, $\overline{X_{i..}} = \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{n_{ij}} X_{ijk} / \sum_{j=1}^{J} n_{ij}$, $\overline{X} = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{n_{ij}} X_{ijk} / \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} n_{ij}$)

$\Psi(t)$ 는 $t>0$일 때 $\Psi(t)=1$, $t\le 0$일 때 $\Psi(t)=0$ 으로 정의된 지시함수이다.

제안된 검정통계량은 블록 효과를 제거한 후의 관찰치를 가지고 블록들 간의 순위를 사용한 Mack-Wolfe 형태의 통계량이다. 우리는 제안된 검정 통계량이 점근적 분포 무관임을 보이기 위하여 $S(\hat{\alpha})$ 과 $S(\alpha)$가 점근적 동치임을 보여야 할 것이다. 이것을 증명하기 위하여 몇 가지 가정이 필요하다.

가정 1 : 오차항의 확률 밀도함수 f 가 위로 유계이고 0을 중심으로 대칭이다.

가정 2 : $\lim_{n\to\infty} n_{.j} / N = \lambda_j$, $0 < \lambda_j < 1$, $j = 1, \cdots, J$, $N = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} n_{ij}$ 가 성립한다.

정리 1 : 가정 1이 성립하면 귀무가설 H_0에서 다음이 성립한다

$$\sqrt{n}\,(U_{uv}(\hat{\alpha}) - U_{uv}(\alpha)) \to 0 .$$

U_{uv}는 다음과 같이 정의되는 U-통계량이다.

$$U_{uv}(\alpha) = \sum_{i=1}^{I} \sum_{i'=1}^{I} \Big(\sum_{s=1}^{n_{iu}} \sum_{t=1}^{n_{i'v}} \Psi(Z_{i'vt}(\alpha) - Z_{ius}(\alpha)) / n_{iu} n_{i'v} \Big).$$

정리 2 : 가정 1 과 2가 성립하면 귀무가설 H_0에서 다음이 성립 한다.

$$n^{-3/2}(\, S(\widehat{a}) - S(a)\,) \to 0\ .$$

위의 정리 2로 인하여 $S(a)$과 $S(\widehat{a})$은 점근적으로 동치이며, 점근적 분포무관이 된다. 제안된 통계량의 정규성을 검정하고자 다음과 같이 모형을 표현한다.

$$\begin{aligned}
&(\, X_{1j1} - \widehat{a_1}\,, X_{1j2} - \widehat{a_1}\,, \cdots, X_{1jn_{1j}} - \widehat{a_1}\,, X_{2j1} - \widehat{a_2}\,, \cdots, X_{bjn_{bj}} - \widehat{a_b})\\
\equiv\ &(\, Z_{1j1}(\widehat{a}),\, Z_{1j2}(\widehat{a}),\, \cdots,\, Z_{1jn_{1j}}(\widehat{a}),\, Z_{2j1}(\widehat{a}),\, \cdots,\, Z_{bjn_{bj}}(\widehat{a})\,)\\
\equiv\ &(\ X_{j1}^*,\ X_{j2}^*,\ \cdots,\ X_{jn_{1j}}^*,\ X_{jn_{1j+1}}^*,\ \cdots,\ X_{jn_{.j}}^*\ ).
\end{aligned}$$

위의 모형을 고려하면 제안된 통계량은 J개의 처리효과를 가지는 일원 배치모형이 되며, 제안된 통계량은

$$S(\,\widehat{a}) = \sum_{u=1}^{l-1} \sum_{v=u+1}^{l} U_{uv} + \sum_{u=l}^{J-1} \sum_{v=u+1}^{J} U_{vu} \quad (\text{단},\ U_{uv} = \sum_{r=1}^{n_{.u}} \sum_{s=1}^{n_{.v}} \Psi(\, X_{vs}^* - X_{ur}^*)\,)$$

로 표현되고, 제안된 통계량의 정규성을 검정하기 위하여 아래의 보조정리를 이용하고자 한다.

보조정리 1. (Archambault, et al. (1977)의 정리 2.2)

Archambault, et al(1977)의 정리 2.1의 가정에서 통계량 $N^{-3/2}V$는 극한 정규분포를 따르며

평균은 $\gamma = \sum_{u=1}^{J-1} \sum_{v=u+1}^{J} \lambda_u \lambda_v(\, \beta_v - \beta_u\,) \int (\, dT_{(uv)}(\, F(x))/dx\,) dF(x)$이고,

분산은 $\sigma_v^2 = \sum_{u=1}^{J-1} \sum_{v=u+1}^{J} \lambda_u \lambda_v (\, \lambda_u + \lambda_v\,) A_{uv}^2$

$$+ 2 \sum_{u=1}^{J-2} \sum_{v=u+1}^{J-1} \sum_{s=v+1}^{J} \lambda_u \lambda_v \lambda_s (\, A_{uvus} + A_{usvs} - A_{uvvs}\,) \text{ 이다.}$$

단, $A_{uvrs} = \int T_{(uv)}(x)\, T_{(rs)}(x)\, dx - (\, \int T_{(uv)}(x)\, dx)(\, \int T_{(rs)}(x)\, dx)$이며,

함수 T는 Puri(1964)의 보조정리 7.2의 정규조건을 만족한다고 가정한다.

보조정리 2. (Serfling(1980, p20)의 보조정리 A)

X_n의 분포가 $AN(\, \mu_n,\, \sigma_n^2)$이라고 할 때 X_n의 분포가 $AN(\, \overline{\mu_n},\ \overline{\sigma_n}^2\,)$일 필요충분조건은 $\overline{\sigma_n}/\sigma_n \to 1$, $(\, \overline{\mu_n} - \mu_n\,)/\,\sigma_n \to 0$ 이다.

보조정리 1과 2에서 다음의 보조정리를 쉽게 얻을 수 있다.

보조정리 3. 귀무가설에서 다음이 성립한다.

$$(S(\alpha) - E_0(S(\alpha)))/\sqrt{Var_0(S(\alpha))} \rightarrow N(0,1) .$$

단, $E_0(S(\alpha)) = (N_1^2 - \sum_{u=1}^{J} n_{.u}^2 - n_{.l}^2 + N_2^2)/4$

$$Var_0(S(\alpha)) = (2(N_1^3 + N_2^3) - 2(\sum_{u=1}^{J} n_{.u}^3 + n_{.l}^3) + 3(N_1^2 + N_2^2)$$

$$-3(\sum_{u=1}^{J} n_{.u}^2 + n_{.l}^2) + 12\, n_{.l} \sum_{u=1}^{l} n_{.u} \sum_{v=l}^{J} n_{.v} - 12\, n_{.l}^2 \sum_{u=1}^{J} n_{.u})/72 .$$

여기서 $N_1 = \sum_{j=1}^{l} n_{.j}$, $N_2 = \sum_{j=l}^{J} n_{.j}$, $n_{.j} = \sum_{i=1}^{I} n_{ij}$ 이다.

정리 2와 보조정리 3에 의하여 본 논문의 주된 다음의 정리를 쉽게 얻을 수 있다.

정리 3. 귀무가설에서 다음이 성립한다.

$$(S(\hat{\alpha}) - E_0(S(\alpha)))/\sqrt{Var_0(S(\alpha))} \rightarrow N(0,1)$$

3. 검정통계량의 점근적 성질

제안된 검정법의 점근 상대효율을 알아 보기 위해 다음과 같은 전이 대립가설을 생각하였다.

$$H_{1N}:\ \beta_j = c_j\beta/\sqrt{N}, \quad j = 1, \cdots, J$$

여기서 c_j : $c_1 \le \cdots \le c_l \ge \cdots \ge c_J$ (적어도 한 부등식은 순증가)

전이 대립가설에서 Song 과 Kim(1991)에서는 $N^{-3/2}(S(\hat{\alpha}) - S(\alpha)) \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$, 이 성립함을 보였으므로 정리 4를 쉽게 얻게 된다.

정리 4. 전이 대립가설에서

$$(S(\hat{\alpha}) - E(S(\alpha)))/\sqrt{Var(S(\alpha))} \rightarrow N(0,1) .$$

단, $E(S(\alpha)) = \sum_{u=1}^{l-1} \sum_{v=u+1}^{l} n_{.u} n_{.v} \int (1 - F(y - (c_v - c_u)\beta/\sqrt{N}))\, dF(y)$

$$+ \sum_{u=l}^{J-1} \sum_{v=u+1}^{J} n_{.u} n_{.v} \int (1 - F(y - (c_u - c_v)\beta/\sqrt{N}))\, dF(y)$$

$Var(S(\alpha)) = Var_0(S(\alpha))$ 이다.

제안된 통계량의 효율성을 비교하기 위하여 전이 대립 가설에서, 수정된 Puri 통계량과 김동희,

김영철(1992)의 통계량을 나타내 본다.

수정된 Puri 통계량은 다음과 같다.

$$P = \sum_{i=1}^{I}\Big(\sum_{u=1}^{l-1} \sum_{v=u+1}^{l} n_{iu}n_{iv}(\overline{X}_{iv.} - \overline{X}_{iu.}) + \sum_{u=l}^{J-1} \sum_{v=u+1}^{J}(\overline{X}_{iu.} - \overline{X}_{iv.})\Big),$$

$$\text{단, } \overline{X}_{ij.} = \sum_{k=1}^{n_{ij}} X_{ijk} / n_{ij} \text{ 이다.}$$

보조 정리 4 : $Var(X_{ijk}) = \sigma^2 < \infty$ 이면, 전이 대립가설에서

$(P - E(P))/(Var(P))^{1/2} \to N(0,\ 1)$ 이며 $E(P)$와 $Var(P)$는 각각 다음과 같다.

$$E(P) = \sum_{i=1}^{I}\Big(\sum_{u=1}^{l-1} \sum_{v=u+1}^{l} n_{iu}n_{iv}(c_v - c_u)\beta / \sqrt{N} + \sum_{u=l}^{J-1} \sum_{v=u+1}^{J} n_{iu}n_{iv}(c_u - c_v)\beta / \sqrt{N}\Big)$$

$$Var(P) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{I} \Big(2(N_{i1}^3 + N_{i2}^3) - 2\sum_{j=1}^{J} n_{ij}^3 - 2n_{il}^3 + 12(n_{il}N_{i1}N_{i2} - N_i n_{il}^2)\Big) / 6$$

$$\text{단, } N_{i1} = \sum_{j=1}^{l} n_{ij},\ N_{i2} = \sum_{j=l}^{J} n_{ij},\ N_i = \sum_{j=1}^{J} n_{ij}.$$

김동희, 김영철(1992)의 통계량은 다음과 같다.

$$A = \sum_{i=1}^{I}\Big(\sum_{u=1}^{l-1} \sum_{v=u+1}^{l} U_{ivu} + \sum_{u=l}^{J-1} \sum_{v=u+1}^{J} U_{iuv}\Big).$$ 단, U_{ivu}는 Mann-Whitney 통계량이다.

보조 정리 5 : 가정 1과 2를 가정하고, 전이 대립가설에서는

$(A - E(A))/(Var(A))^{1/2} \to N(0,\ 1)$ 이다. 여기서 $E(A)$와 $Var(A)$는 다음과 같다.

$$E(A) = \sum_{i=1}^{I}\Big(\sum_{u=1}^{l-1} \sum_{v=u+1}^{l} n_{iu}n_{iv}\int(1-F(y-(c_v-c_u)\beta/\sqrt{N}))dF(y)$$

$$+ \sum_{u=l}^{J-1} \sum_{v=u+1}^{J} n_{iu}n_{iv}\int(1-F(y-(c_u-c_v)\beta/\sqrt{N}))dF(y)$$

$$Var(A) = \sum_{i=1}^{I}(2(N_{i1}^3+N_{i2}^3)+3(N_{i1}^2+N_{i2}^2) - \sum_{j=1}^{J} n_{ij}^2(2n_{ij}+3)$$

$$- n_{il}^2(2n_{il}+3) + 12(n_{il}N_{i1}N_{i2} - n_{il}^2 N_i)) / 72$$

$$\text{단, } N_{i1} = \sum_{j=1}^{l} n_{ij},\ N_{i2} = \sum_{j=l}^{J} n_{ij},\ N_i = \sum_{j=1}^{J} n_{ij}.$$

다음으로 $S(\hat{\alpha})$와 P 그리고 $S(\hat{\alpha})$와 A의 점근 상대효율은 다음과 같다.

$$ARE(S(\hat{a}),\, P) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_0^2(P)}{\sigma_0^2(S(\hat{a}))} \left(\int f(t)^2 dt \right)^2 \cdot I^2$$

만약 $J \to \infty$ 가 된다면, $ARE(S(\hat{a}),\, P) = 12\,\sigma^2 \left(\int f(t)^2 dt \right)^2$ 이며, 이것은 Wilcoxon검정의 t 검정에 대한 점근 상대효율과 같은 결과이다.

$$ARE(S(\hat{a}),\, A) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_0^2(A)}{\sigma_0^2(S(\hat{a}))} \cdot I^2$$

특히, $n_{ij} = k$, 모든 칸의 돗수가 동일하면, $ARE(S(\hat{a}),\, A) > 1$임을 알 수 있다.

4. 소표본 Monte Carlo 연구

다음으로 소표본에서, 제안된 통계량을 수정된 Puri 통계량 P와 김동희, 김영철(1992)의 통계량 A와 비교하기 위하여 Monte Calro연구를 하였다. 비교연구에서는 5개의 분포, 균일 분포, 정규분포, 이중 지수 분포, 코시 분포, 오염 정규 분포에 대하여 연구를 하였다. 여기서 오염 정규 분포의 분포함수는 $F(x) = 0.9\,\Phi(x) + 0.1\,\Phi(x/3)$로 주어진 분포이다.

각 모형과 분포 함수에 대하여 주어진 표본을 IMSL에 있는 부 프로그램을 이용하여 생성하여 검정 통계량의 값을 구한 다음 유의 수준 5%에서 기각값을 비교하였다. 이런 실험을 10000번 반복하여 실험 검정력을 구하였다.

실험 구조는 다음과 같다.

경우 1 : $n_{i1}=3,\ n_{i2}=6,\ n_{i3}=6,\ n_{i4}=3,\quad i=1,2,3,4$

경우 2 : $n_{i1}=6,\ n_{i2}=3,\ n_{i3}=3,\ n_{i4}=6,\quad i=1,2,3,4$

경우 3 : $n_{i1}=3,\ n_{i2}=3,\ n_{i3}=3,\ n_{i4}=3,\quad i=1,2,3,4$

경우 4 : $n_{i1}=3,\ n_{i2}=6,\ n_{i3}=9,\ n_{i4}=6,\ n_{i5}=3,\quad i=1,2,3,4$

경우 5 : $n_{i1}=9,\ n_{i2}=6,\ n_{i3}=3,\ n_{i4}=6,\ n_{i4}=9,\quad i=1,2,3,4$

경우 6 : $n_{ij}=3,\quad i=1,2,3,4,\quad j=1,2,3,4,5.$

여기서, 처리효과의 형태는

정점이 2인 경우 $\beta_2^* = (\ \delta\sigma/3,\ 2\delta\sigma/3,\ \delta\sigma/3,\ -\delta\sigma/3\ )$

정점이 3인 경우 $\beta_3^* = (\ -\delta\sigma/3,\ \delta\sigma/3,\ \delta\sigma,\ \delta\sigma/3,\ -\delta\sigma/3\ )$

이고, β_2^*는 처리효과가 등간격이 아닌 경우이고, β_3^*는 처리효과가 등간격인 경우이다.

δ의 범위는 0.0 에서 1.0 까지 0.2씩 증가시켰다. 모든 분포에서 분산이 존재하면 분산은 1이되도록 하였고, 단지 코시 분포에서는 분산이 존재하지 않으므로 정규분포의 표준편차를 이용하여

표준편차를 구하였다.

즉, $\int_{-\sigma}^{\sigma} (\pi(1+X^2))^{-1} dX = \Phi(1) - \Phi(-1) = 0.6827.$

즉, σ는 1.8326으로 택하였다.

<표 1>은 경우가 1, 2, 3이면서 정점이 2인 경우의 β_2^*에 대한 결과를 나타낸 것이며, <표 2>는 경우가 4, 5, 6이면서 정점이 3인 경우의 β_3^*에 대한 결과이다.

전체적인 실험구조에 대한 결과를 요약하면 제안된 통계량은 칸 돗수가 같은 경우보다 다른 경우일 때 검정력이 더 크고, 처리효과가 등간격인 아닌 경우보다 등간격인 경우에 검정력이 더 큰 것으로 나타났다.

5. 결 론

위 실험의 결과는 제안된 통계량이 P와 A에 비하여 꼬리가 두터운 분포에 관해서는 검정력이 우수한것으로 나타났다. 그리고, 정규 분포나 균등 분포에서도 제안된 통계량이 김동희,김영철(1992)의 통계량보다는 로버스트한 것으로 나타났다. 제안된 통계량이 블록 효과를 추정하여 제거한 후 관측치의 블록들간의 순위를 사용하였기 때문에 통계량 A나 P의 블록 내의 순위를 사용한것 보다 더 검정력이 뛰어날 것이다. 결론적으로, 제안된 통계량은 이중지수분포, 코시분포와 오염정규분포에서는 A와 P의 통계량보다 검정력이 뛰어남을 알 수 있다.

〈 표 1 〉 (정점 2, β_2^*)

통계량	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	통계량	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	통계량	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
경우 1							경우 2							경우 3						
균 일 분 포							균 일 분 포							균 일 분 포						
$S(\hat{a})$	0.04	0.09	0.22	0.42	0.62	0.80	$S(\hat{a})$	0.03	0.09	0.21	0.40	0.62	0.79	$S(\hat{a})$	0.04	0.08	0.18	0.33	0.49	0.66
P	0.07	0.15	0.29	0.50	0.68	0.83	P	0.06	0.14	0.29	0.49	0.68	0.83	P	0.07	0.15	0.28	0.44	0.60	0.74
A	0.05	0.12	0.23	0.41	0.59	0.76	A	0.05	0.11	0.23	0.40	0.59	0.75	A	0.04	0.10	0.19	0.32	0.47	0.61
정 규 분 포							정 규 분 포							정 규 분 포						
$S(\hat{a})$	0.04	0.10	0.22	0.40	0.59	0.76	$S(\hat{a})$	0.03	0.09	0.21	0.40	0.59	0.76	$S(\hat{a})$	0.03	0.08	0.17	0.32	0.47	0.63
P	0.06	0.15	0.30	0.48	0.67	0.83	P	0.06	0.15	0.29	0.49	0.67	0.83	P	0.07	0.15	0.27	0.43	0.60	0.74
A	0.04	0.12	0.24	0.39	0.56	0.72	A	0.05	0.12	0.23	0.39	0.56	0.72	A	0.04	0.10	0.18	0.31	0.45	0.58
이 중 지 수 분 포							이 중 지 수 분 포							이 중 지 수 분 포						
$S(\hat{a})$	0.04	0.12	0.31	0.54	0.76	0.90	$S(\hat{a})$	0.03	0.12	0.29	0.53	0.75	0.89	$S(\hat{a})$	0.03	0.11	0.23	0.43	0.64	0.79
P	0.06	0.15	0.30	0.50	0.68	0.83	P	0.06	0.15	0.30	0.48	0.68	0.83	P	0.07	0.15	0.28	0.44	0.61	0.75
A	0.05	0.14	0.31	0.52	0.72	0.86	A	0.05	0.14	0.31	0.51	0.72	0.85	A	0.04	0.12	0.24	0.41	0.59	0.74
코 시 분 포							코 시 분 포							코 시 분 포						
$S(\hat{a})$	0.03	0.10	0.24	0.41	0.60	0.75	$S(\hat{a})$	0.03	0.10	0.22	0.41	0.59	0.73	$S(\hat{a})$	0.03	0.09	0.18	0.32	0.47	0.63
P	0.05	0.07	0.09	0.12	0.15	0.18	P	0.07	0.08	0.10	0.12	0.14	0.18	P	0.07	0.10	0.12	0.14	0.19	0.22
A	0.04	0.12	0.25	0.41	0.57	0.72	A	0.05	0.12	0.24	0.41	0.57	0.70	A	0.04	0.10	0.19	0.31	0.45	0.59
오 염 정 규 분 포							오 염 정 규 분 포							오 염 정 규 분 포						
$S(\hat{a})$	0.04	0.11	0.28	0.52	0.75	0.89	$S(\hat{a})$	0.03	0.11	0.29	0.53	0.76	0.89	$S(\hat{a})$	0.03	0.10	0.23	0.42	0.63	0.79
P	0.06	0.15	0.31	0.49	0.69	0.83	P	0.06	0.16	0.30	0.51	0.69	0.83	P	0.07	0.16	0.28	0.45	0.61	0.76
A	0.04	0.13	0.30	0.50	0.72	0.86	A	0.05	0.14	0.29	0.51	0.72	0.86	A	0.04	0.12	0.23	0.40	0.58	0.73

< 표 2 > (정점 3, β_3^*)

통계량	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	통계량	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	통계량	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
경우 4							경우 5							경우 6						
균 일 분 포							균 일 분 포							균 일 분 포						
$S(\hat{\alpha})$	0.04	0.21	0.61	0.91	0.99	0.99	$S(\hat{\alpha})$	0.03	0.21	0.62	0.91	0.99	0.99	$S(\hat{\alpha})$	0.04	0.14	0.40	0.71	0.91	0.98
P	0.06	0.28	0.66	0.91	0.99	0.99	P	0.05	0.27	0.66	0.91	0.99	0.99	P	0.08	0.24	0.51	0.78	0.94	0.98
A	0.05	0.23	0.59	0.87	0.98	0.99	A	0.05	0.23	0.59	0.88	0.98	0.99	A	0.05	0.16	0.38	0.66	0.87	0.96
정 규 분 포							정 규 분 포							정 규 분 포						
$S(\hat{\alpha})$	0.03	0.21	0.58	0.88	0.98	0.99	$S(\hat{\alpha})$	0.03	0.21	0.60	0.89	0.98	0.99	$S(\hat{\alpha})$	0.03	0.15	0.41	0.69	0.89	0.97
P	0.06	0.28	0.65	0.91	0.99	0.99	P	0.06	0.28	0.65	0.92	0.99	0.99	P	0.07	0.24	0.52	0.79	0.94	0.99
A	0.04	0.23	0.56	0.85	0.97	0.99	A	0.05	0.23	0.58	0.86	0.97	0.99	A	0.05	0.16	0.38	0.63	0.84	0.95
이 중 지 수 분 포							이 중 지 수 분 포							이 중 지 수 분 포						
$S(\hat{\alpha})$	0.03	0.30	0.77	0.97	0.99	1.00	$S(\hat{\alpha})$	0.03	0.31	0.78	0.97	0.99	1.00	$S(\hat{\alpha})$	0.03	0.20	0.55	0.84	0.96	0.99
P	0.06	0.29	0.66	0.91	0.98	0.99	P	0.06	0.28	0.66	0.91	0.99	0.99	P	0.07	0.26	0.52	0.78	0.93	0.98
A	0.05	0.31	0.73	0.95	0.99	1.00	A	0.05	0.32	0.75	0.95	0.99	0.99	A	0.04	0.22	0.51	0.79	0.94	0.99
코 시 분 포							코 시 분 포							코 시 분 포						
$S(\hat{\alpha})$	0.03	0.22	0.61	0.88	0.98	0.99	$S(\hat{\alpha})$	0.03	0.23	0.62	0.89	0.98	0.99	$S(\hat{\alpha})$	0.03	0.16	0.41	0.69	0.86	0.95
P	0.05	0.07	0.12	0.17	0.23	0.30	P	0.05	0.07	0.09	0.13	0.17	0.22	P	0.08	0.10	0.14	0.20	0.26	0.32
A	0.05	0.24	0.58	0.85	0.96	0.99	A	0.05	0.26	0.60	0.86	0.96	0.99	A	0.04	0.17	0.39	0.64	0.81	0.91
오 염 정 규 분 포							오 염 정 규 분 포							오 염 정 규 분 포						
$S(\hat{\alpha})$	0.03	0.28	0.75	0.97	0.99	1.00	$S(\hat{\alpha})$	0.03	0.29	0.77	0.97	0.99	1.00	$S(\hat{\alpha})$	0.03	0.19	0.53	0.85	0.97	0.99
P	0.06	0.29	0.66	0.91	0.98	0.99	P	0.06	0.29	0.67	0.92	0.98	0.99	P	0.07	0.25	0.54	0.79	0.93	0.98
A	0.05	0.29	0.72	0.95	0.99	0.99	A	0.05	0.34	0.73	0.96	0.99	0.99	A	0.04	0.20	0.50	0.79	0.95	0.99

참고문헌

[1] Archambault,W.A.T.,Mack,G.A. and Wolfe,D.A. (1977). k-sample rank tests using pair specific scoring function, *The Canadian Journal of Statistics*, 5, 195-207.

[2] Kim,D.H. and Kim,Y.C. (1992). On the distribution-free tests for umbrella alternatives in a randomized block design, *The Korean Journal of Applied Statistics*, Vol. 5, No. 1, 41-57.

[3] Mack,G.A. and Wolfe,D.A. (1981). K-sample tests for umbrella alternatives, *Journal of the American Statistical Association*, 76, 175-181.

[4] Mansouri-Ghiassi,S.H. and Govindarajulu,Z. (1986). On nonparametric tests for ordered alternatives in two-way layouts, *Advances in Order Restricted Statistical Inference, Lecture Notes in Statistics*, 37, Springer-Verlag, 153-168.

[5] Puri,M.L. (1964). Asymptotic efficiency of a class of c-sample tests, *Annals of Mathematical Statistics*, 35, 102-121.

[6] Serfling, R.J. (1980). *Approximation Theorems of Mathematical Statistics*, New York:Wiley.

[7] Song,M.S. and Kim,J.H. (1991). Onthe asymptotically distribution-free tests for ordered alternatives in two-way layouts, *The Korean Journal of Applied Statistics*, Vol. 4, No. 1, 25-32.