

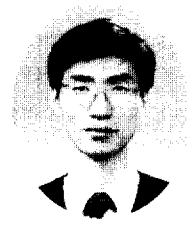
콘크리트 장대교량의 구조해석 기법

콘크리트 장대 교량의 재료 비탄성 모델링 기법

Inelastic Models of Concrete Material for Long-Span Bridge



김진근*



이상순**

1. 머리말

건설재료, 설계기술 및 시공기술의 발전으로 콘크리트 장대 교량의 건설이 크게 늘고 있다. 콘크리트는 경시효과(time effect)를 보이는 재료이며 이러한 콘크리트의 성질은 콘크리트 장대교량에 있어서 매우 중요한 의미를 갖는다. 대부분의 장대교량은 주로 분절공법에 의하여 시공이 되며 구조물의 각 부분은 재령이 다른 콘크리트로 구성되기 때문에 콘크리트의 경시효과는 구조물의 처짐 및 응력 변화를 예측하는데 매우 중요한 요소가 된다.

콘크리트 구조물의 장기거동 해석은 일반적으로 구조물의 건설 및 공용기간 동안의 처짐, 곡률, 변형률 및 응력을 예측하는 것을 의미한다. 콘크리트

의 크리이프 및 건조수축 특성은 매우 가변적이며 정확한 수치를 예측하기는 매우 어렵다. 따라서, 콘크리트 구조물의 장기거동을 해석하는 기법은 장기거동에 관한 다양한 가정과 근사적인 해석방법을 이용하여 임의의 특정 상황에서의 경시효과가 임계값을 초과하는지의 여부를 판단하는 경우에 사용된다.

본 고에서는 조사된 문헌을 근거로 하여 크리이프를 고려한 재료의 모델링기법과 콘크리트 구조물의 비탄성 해석 기법을 소개하고자 한다.

2. 크리이프를 고려한 재료의 모델링 기법

콘크리트에 일정한 하중이 지속적으로 가해지면 변형이 증가하는 현상을 보이는데 이러한 현상을

* 정회원, 한국과학기술원 토목공학과, 교수

** 정회원, 한국과학기술원 토목공학과, 박사과정

크리이프라고 한다. 시간 $t=t_0$ 에서 응력수준을 달리하여 하중을 재하(load)하고 $t_0, t_1, t_2, t_3, \dots$ 에서 변형률을 측정하여 동일한 시간에 측정된 데이터를 이어주면 그림 1과 같은 크리이프 isochrone을 얻을 수 있다. 구조물에 작용하는 응력이 일정한 값 이내인 경우에 응력과 변형률 관계가 선형을 유지한다. 이 경우는 선형 크리이프인 경우에 해당되며 점탄성 또는 선형 점탄성이라고 부른다. Isochrone이 하중 재하시 재료의 재령에 무관한 경우를 비재령 점탄성(non-ageing viscoelastic)이라고 한다. 그러나 잘 알려진 바와 같이 콘크리트는 재령에 영향을 받으며, 이 경우를 재령 점탄성(ageing viscoelastic)이라 한다.

응력과 변형률의 관계가 비례한도를 넘어선 경우 까지를 고려한 경우는 비선형 크리이프에 해당되며 비선형 점탄성(nonlinear viscoelasticity)이라고 부른다. 대부분의 콘크리트 구조물은 사용하중하에서 선형 점탄성 거동을 보인다. 따라서 본 절에서는 선형 점탄성 재료의 모델링 기법에 대하여 논의하고자 한다.

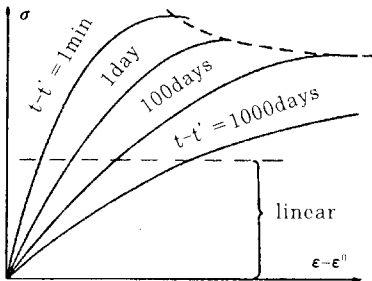
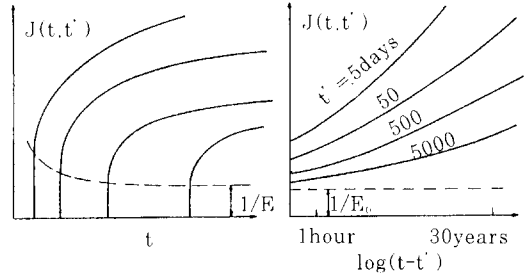


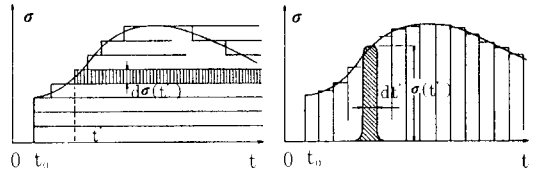
그림 1 Creep isochrone

2.1 Creep Function and Integral-Type Creep Law

그림 2(a)는 일정한 응력 σ 가 가해질 때 전형적인 크리이프 곡선이다. Thermodynamics의 제 2 법칙에 의하면 크리이프 곡선의 기울기는 음(-)이 될 수 없고, 손상을 입지 않은 재료의 경우에는 크리이프 곡선의 기울기가 시간이 지남에 따라 증가할 수 없다. 응력과 변형률 사이의 비례관계로 인한



(a)



(b)

(c)

그림 2 (a) Typical creep curves for various age t' at loading, (b)(c) decomposition of stress history into infinitesimal stress increment

여 점탄성 재료의 크리이프 곡선은 단위 하중이 가해졌을 때의 크리이프 곡선 즉 creep function $J(t, t')$ 로 단순화시켜 고려할 수 있다. 여기서 t 는 현재 시간이고 t' 는 단위하중이 가해진 시간이다.

임의의 응력이력(stress history) $\sigma(t)$ 를 그림 2(b)와 같이 미소의 응력 증분 $d\sigma(t')$ 으로 분할하고 각각의 응력 증분에 대하여 변형률의 변화를 구한 뒤에 중첩의 원리를 사용하여 전체적인 변형률의 이력을 구할 수 있다. 즉 시간에 따라 응력이 변하는 경우 크리이프 곡선은 다음과 같다.

$$\epsilon_{\sigma}(t) = \int_0^t J(t, t') d\sigma(t') \quad (1)$$

여기서, $\epsilon_{\sigma}(t)$

는 탄성변형과 크리이프변형의 합이다.

2.2 Differential-Type Creep Law and Rheologic Models

실제 구조 해석에 있어서 응력-변형률 관계를 시간에 대한 미분의 형태로 나타내는 것이 편리하다. 이는 그림 3과 같은 리올로지(rheology)를 이용하

여 재료를 모델링함으로써 가능하다. 어떤 형태의 점탄성 거동도 그림 3과 같은 임의의 리올로지 모델을 사용하여 요구되는 정확도 범위 내에서 이상화되어 질 수 있다.

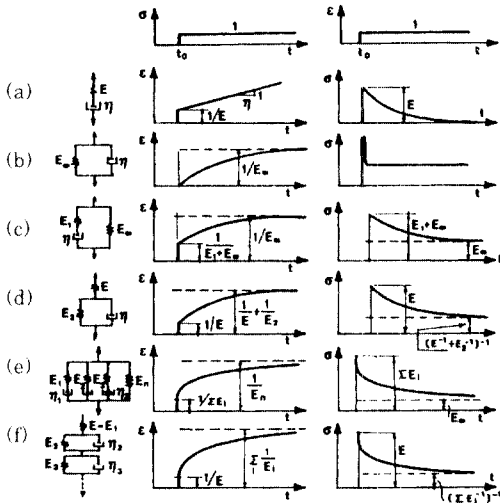


그림 3 Rheologic models : (a)Maxwell, (b)Kelvin, (c)standard solid (Maxwell), (d)standard solid (Kelvin), (e)Maxwell chain, (f)Kelvin chain

리올로지 모델에서 가해진 힘은 응력을 의미하고, 모델의 양단에서의 상대적인 변위는 변형률을 의미한다. 모델의 특징은 스프링의 탄성계수 E 와 dashpot의 점성 η 가 있다. 그림 3은 각각의 모델에 대하여 일정한 응력이 가해졌을 경우 변형률의 변화와 일정한 변형률이 주어진 경우에 응력의 변화를 나타낸 것이다. 19세기 말경 영국의 J. C. Maxwell이 제안한 Maxwell unit은 spring과 dashpot가 직렬로 연결되어 있다(그림 3(a)). 이 모델에서는 일정한 하중이 주어진 경우에 크리이프가 일정한 비율로 증가되고 일정한 변형률이 주어진 경우에 릴랙세이션이 일정 비율로 감소하여 시간 $t \rightarrow \infty$ 일 때 응력이 0에 수렴하는 거동을 보여주고 있다.

그림 3(b)는 독일의 Voigt와 영국의 Lord Kelvin이 제안한 Kelvin unit이다. 이 모델은 spring과 dashpot를 병렬로 연결한 것이다. 이 경우 크리이프 곡선의 기울기가 시간이 지남에 따라

감소하는 경향을 나타낸다. 그러나 Maxwell unit와는 달리 즉시 탄성 변형(instantaneous elastic deformation)이 없다. 크리이프 곡선의 기울기가 시간이 지남에 따라 감소하는 경향과 즉시 탄성 변형을 고려할 수 있는 가장 단순한 리올로지는 standard solid model이다. 이 모델은 그림 3(c)의 Maxwell type과 그림 3(d)의 Kelvin type 이 있다.

가장 일반적인 점탄성거동은 Maxwell chain model 그림 3(e)와 Kelvin chain model 그림 3(f)로 표현될 수 있다. 이 모델을 이용하면 크리이프와 릴랙세이션 곡선은 하중 및 변형률이 주어지는 시간 t_0 에서 변형률 및 응력이 순간적으로 증가되고, 곡선의 기울기가 지수함수보다는 완만하지만 하중지속시간 보다 빠른 속도로 감소하는 경향을 나타낸다(standard solid model을 사용하는 경우 지수함수로 감소된다). 실제 많은 재료가 이러한 거동을 보인다. 따라서 Maxwell과 Kelvin chain model은 상당히 정확하게 재료의 거동을 모델링할 수 있음을 알 수 있다.

Kelvin type의 standard solid model을 사용하여 미분의 형태로 응력과 변형률의 관계를 나타내면 다음과 같다.

$$\sigma(t) = E \epsilon_\sigma(t), \quad \epsilon_\sigma(t) = E^{-1} \sigma(t) \quad (2)$$

$$E = \frac{1 + \tau_r (\partial/\partial t)}{1/E_\infty + (\tau_r/E) (\partial/\partial t)}, \quad E^{-1} = \frac{1/E_\infty + (\tau_r/E) (\partial/\partial t)}{1 + \tau_r (\partial/\partial t)} \quad (3)$$

E 와 E^{-1} 는 differential operator이다.

E 는 relaxation operator 이고, E^{-1} 는 creep operator 이다. 보다 일반적인 점탄성 재료의 경우 relaxation operator는 다음과 같이 표현된다.

$$E = \frac{E_\infty + a_1 (\partial/\partial t) + a_2 (\partial^2/\partial t^2) + \dots}{1 + b_1 (\partial/\partial t) + b_2 (\partial^2/\partial t^2) + \dots} \quad (4)$$

여기서, $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$ 는 재료상수 이다. 약간의 제약조건을 제외하고 선형대수에서 적용되는 법칙들이 differential operator에서도 적용된다.

따라서 주어진 문제에 대한 지배방정식을 유도함에 있어서 재료가 탄성이라고 가정하고 지배방정식을 유도한 후에 relaxation operator와 creep operator로 각각 대치함으로써 점탄성인 경우의 지배방정식을 구할 수 있다. 이를 viscoelastic analogy라고 한다.

3. 크리이프 및 건조수축을 고려한 구조물 해석기법

구조물의 장기거동 해석 알고리즘은 유효탄성계수법(effective modulus method), 수정유효탄성계수법(age-adjusted effective modulus method), 크리이프율법(rate of creep method), 개선된 Dischinger 방법(improved dischinger method), step-by-step method 등이 있다. 이중 step-by-step method는 가장 일반적인 방법이다. 본 절에서는 step-by-step method를 이용한 건조수축과 크리이프 해석 알고리즘을 소개하고자 한다.

3.1 Linear Constitutive Relations with History Integrals

구조물에 가해진 하중을 그림 2(b)에서 보는 바와 같이 분할하고 각각의 하중 증분 $d\sigma(t')$ 에 대한 변형률의 증분 $d\epsilon(t')$ $J(t, t')$ 을 계산한 뒤에 이를 적분함으로써 전체의 변형률을 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned} \epsilon(t) &= \epsilon_{\sigma}(t) + \epsilon^0(t) \\ &= \int_0^t J(t, t') d\sigma(t') + \epsilon^0(t) \end{aligned} \quad (5)$$

여기서, $\epsilon^0(t)$ 는 온도나 건조수축과 같이 응력과 무관한 변형률이다. 이와 같은 중첩의 원리가 적용되기 위해서는 다음의 조건을 만족하여야 한다.

- (1) 응력이 압축강도의 약 40% 이내이다.
- (2) 변형률의 크기는 줄어들지 않는다.
- (3) 크리이프가 발생하는 동안 심한 건조가 발생되어서는 안된다.
- (4) 초기 하중 재하 후 급격한 하중의 변화가 있어서는 안된다.

가해진 응력이 압축강도의 40% 이상인 경우에는

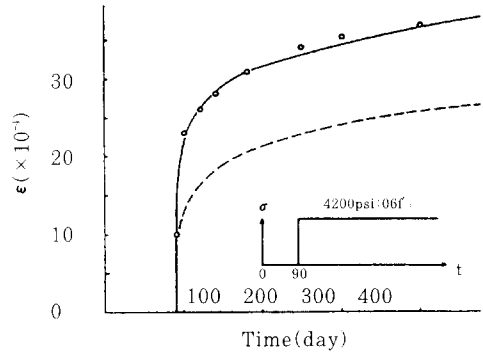


그림 4 Creep nonlinearity at high stress

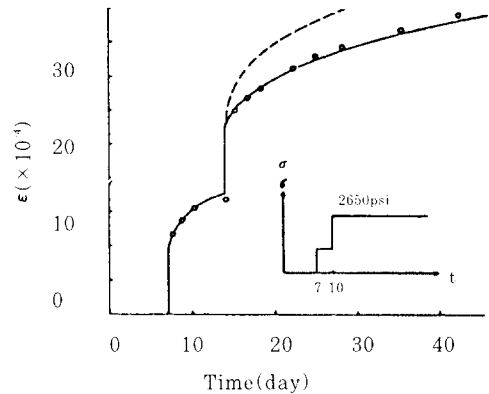


그림 5 Adaptation nonlinearity

그림 1에서 보는 바와 같이 응력과 변형률이 심한 비선형성을 보이며 비선형 영구변형(flow)이 발생한다. 따라서 이 경우에는 중첩의 원리가 적용되지 않는다.

그림 4는 가해진 응력이 압축강도의 40% 이상의 응력이 가해진 경우에 점선으로 나타낸 선형 크리이프 해석 결과와 실선으로 나타낸 비선형 크리이프 해석결과를 실험결과와 비교한 것이다. 선형 크리이프 해석결과는 실험결과와 많은 차이를 보임을 알 수 있다. 그림 5는 가해진 응력이 압축강도의 40%이내이고 초기 하중 재하 후 급격한 하중변화가 발생한 경우이다. 크리이프 적응(adaptation)으로 인하여 크리이프 변형이 감소하는 것을 알 수 있다. 따라서 일반적으로 초기하중 재하 후 급격한 하중 변화가 있는 경우에는 중첩의 원리를 사용할 수 없다. 최근에 Bazant는 이러한 비선형 변형과

크리이프 적용의 비선형성을 고려한 해석기법을 제안하였다.

위 조건 중에서 (4)번째 조건은 해석결과에 큰 오차를 발생시키지 않는다. 반면 (2)번째의 조건은 상당히 중요하다. 하중 제하(unloading)로 발생되

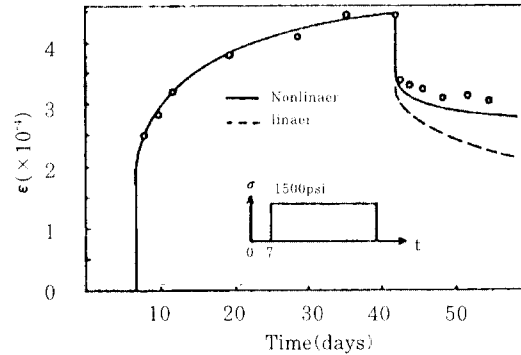


그림 6 Creep recovery

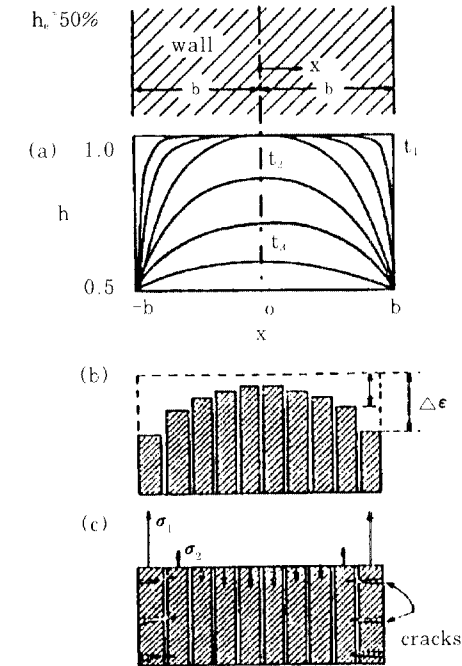


그림 7 (a) Typical distributions of pore humidity at various times during drying, (b) free shrinkage and creep at various points of cross section, (c) internal stresses due to drying

는 크리이프 회복을 중첩의 원리를 이용하여 계산한 결과는 실제 크리이프 회복에 비하여 상당히 크다. 따라서 이 경우에는 중첩의 원리를 적용할 수 없다. 몇몇 연구자들은 크리이프 회복 함수를 제안하여 이 문제를 해결하려고 하였으나 이러한 시도는 만족할 만한 결과를 주지 못했다. 크리이프 회복을 고려하기 위하여서는 비선형 이론을 사용하여야 한다.

일반적으로 대부분의 해석에 있어서 건조수축 변형은 응력에 무관하다는 가정 하에서 중첩의 원리를 사용하여 식 (5)와 같이 단순히 더해줌으로써 해석을 실시한다. 그러나 그림 7에서 보는 바와 같이 건조가 진행됨에 따라 단면내 공극의 상대습도가 그림 7(a)와 같이 부등분포하게 되고, 이로 인하여 표면부에는 인장응력이 내부에는 압축응력이 발생하게 된다. 또한 건조로 인하여 발생된 인장응력으로 인하여 그림 7(c)와 같이 표면에 미세균열이 발생하게 된다. 즉 건조수축은 응력에 무관하지 않은 값이며, 건조수축으로 인하여 단면내의 응력분포가 달라질 수 있다. 대부분의 교량 구조물은 건조수축과 크리이프가 거의 동시에 발생되며, 이 경우 그림 8에서 보는 바와 같이 건조로 인하여 크리이프가 증가된다. 이러한 현상을 Pickett 효과라고 한다. Pickett 효과는 단면이 얇을 수록 크게 발생한다. 그러나 장대 교량은 대부분이 부재의 단면이 크고, 단면에 프리스트레스가 도입됨으로 인하여 단면이 작은 철근 콘크리트 부재에 비하여 이러한 Pickett 효과는 상대적으로 작다. 이러한 건조의 영향을 정확하게 고려하여 해석하는 것은 매우 힘든 작업이다. 현존하는 모델식들은 단면내의 평균 응력과 평균변형률의 개념을 사용하여 건조 크리이프

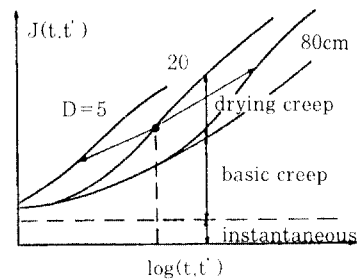


그림 8 Drying creep

프와 건조수축을 예측하고 있다. 따라서, 구조해석에 의하여 계산된 응력은 실제 구조물의 응력과는 상당한 차이를 보일 수 있다.

식 (5)에 $d\sigma(t') = [d\sigma(t')/dt'] dt'$ 을 대입하여 정리하면 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} + \int_0^t L(t,t') \sigma(t') dt' + \varepsilon^0(t) \quad (6)$$

여기서, $L(t,t') = -\frac{\partial J(t,t')}{\partial t'}$

위 식은 그림 2(b)에서 보는 바와 같이 응력이력을 수평으로 분할하지 않고 수직으로 분할하여 적분하는 형태이다.

$\sigma(t') dt'$ 은 단위 응력 임펄스(unit stress impulse)이고 $L(t,t') \sigma(t') dt'$ 는 이로 인한 변형률 응답이다. 따라서, $L(t,t')$ 는 Dirac δ -function으로서 impulse memory function이라고 한다.

3.2 Linear Constitutive Relations without History Integrals

위 방법은 크리이프에 의한 변형률의 증분을 구하기 위해서는 전체의 시간 구간에 대한 응력이력(stress history)이 필요하다. 그러나 복잡한 구조물에서는 모든 응력이력을 저장한다는 것은 비효율적이다. 이러한 단점을 개선하기 위한 많은 연구가 수행되었다. 이는 식(5)와 식(6)의 integral-type creep law를 rate-type creep law로 전환함으로써 가능하다. 즉 소위 말하는 degenerated kernel을 사용함으로써 앞에서 언급한 비효율성을 개선할 수 있다. Bresler와 Selna, Zienkiewicz와 Watson, Mukaddam, Kabir, Bazant와 Wu 등의 많은 연구자들이 이에 대한 연구를 수행하였다.

Kabir는 크리이프 함수(creep function) $J(t,t')$ 를 식 (7)과 같이 근사적으로 Dirichlet 급수로 나타내었다.

$$J(t,t') = \sum_{\mu=1}^N \frac{1}{C_{\mu}(t')} \left\{ 1 - e^{-\frac{(t-t')}{\tau_{\mu}}} \right\} \quad (7)$$

여기서, 상수 τ_{μ} 는 지연시간(retardation time)이다. 식(7)을 식(5)에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\varepsilon(t) = \sum_{\mu=1}^N \varepsilon_{\mu}(t) + \varepsilon^0(t)$$

$$\varepsilon_{\mu}(t) = \int_0^t \frac{d\sigma(t')}{C_{\mu}(t')} - \gamma_{\mu}(t)$$

$$\gamma_{\mu}(t) = \exp[-y_{\mu}(t)] \int_0^t \exp[y_{\mu}(t')] \frac{d\sigma(t')}{dy_{\mu}(t')} \frac{dy_{\mu}(t')}{C(t')}$$

$$y_{\mu} = t / \tau_{\mu}$$

(8)

일반적으로 첫번째의 지연시간 τ_1 을 아주 작은 값을 취한다. 그러면 탄성변형량은 $1/C_1(t')$ 이 된다. 따라서 $C_1(t') = E(t')$ 이다. 식(7)은 식(6)과는 달리 별도로 탄성변형을 고려할 필요가 없으므로 프로그램이 간단해지는 이점이 있다.

그림 9는 식 (7)을 그림으로 표현한 것이다. 각각의 지수함수는 0.1에서 10 사이에서 급격한 변화를 보이며, 그 외의 구간에서는 거의 변화가 없다. 또한 지연시간 τ_{μ} 는 거의 증분의 중앙에 위치한다. 크리이프 곡선은 그림 9(b)에서 보는 바와 같이 Dirichlet 급수로 근사적으로 표현할 수 있다.

일반적으로 τ_{μ} 는 임의로 선택할 수 있으나 $\tau_{\mu+1}$ 은 τ_{μ} 보다 10 배 이상 큰 값을 선택해서는 안된다. 일반적으로 $\tau_{\mu} = a^{\mu-2} \tau_2$ ($a < 10$) 을 사용하여 결정하는 것이 바람직하다. 또한 응답을 구하고자 하는 구간을 $(\tau_{\min}, \tau_{\max})$ 이라고 할 때 $\tau_2 \leq 3\tau_{\min}$ 이고 $\tau_N \geq 0.5\tau_{\max}$ 를 만족하여야 한다. 재령효과를 정확하게

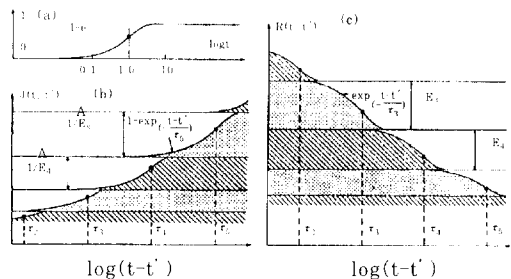


그림 9 Representation by Dirichlet series

고려하기 위해서는 τ_n 중 가장 작은 값(τ_1)이 하중이 최초로 재하될 때의 콘크리트 재령의 0.1배 이하로 하여야 한다. 계수 $C_n(t')$ 은 주어진 크리이프 곡선으로부터 최소자승법을 사용하여 계산한다.

해석의 정확도와 수치적분의 안정성(numerical stability)을 확보하기 위하여 시간 증분 Δt 는 τ_n 중 가장 작은 값보다 충분히 작아야 한다. 그러나 시간 증분을 작게 함으로써 해석에 매우 많은 시간이 소요된다. 따라서 이 문제를 해결하기 위해서는 시간 증분을 점차로 변화시킬 필요가 있다. Bazant는 시간 증분동안에 응력과 변형도를(strain rate) 및 재료의 강도와 재료특성이 일정하다는 가정하에서 시간증분을 변화시켜 가면서 해석이 가능한 알고리즘을 제안하였다.

4. 요약 및 결론

일반적으로 크리이프와 건조수축 해석의 오차는 크리이프와 건조수축을 정의하는 재료상수와 해석 프로그램에서 사용된 구성방정식에 의해 주로 발생된다. 그러나, 지금까지 여러 연구자들에 의하여 크리이프와 건조수축을 예측할 수 있는 많은 모델식들이 제시되었으나, 이들 모델식 사이에는 큰 차이를 보이고 있다.

현재 개발된 대부분의 해석프로그램에 의한 크리이프 해석은 중첩의 원리를 이용한 선형이론에 한정하고 있다. 선형 크리이프 해석에서는 aging effect, flow, adaptation 등과 같은 재료의 비선형성을 고려하지 못함으로써 해석값과 실험값이 큰 차이를 보일 수 있다. 특히 부재에 작용하는 하중이 허용응력보다 클 경우에는 심한 비선형성을 보일 수 있다. 이 경우에는 비선형 크리이프 해석을 수행하여야 한다.

구조물의 장기거동 해석 알고리즘은 유효탄성계수법, 수정유효탄성계수법, 크리이프율법, 개선된 Dischinger 방법, step-by-step method 등이 있으며, 이 중 컴퓨터에 의해 해석할 때에는 step-by-

step method가 가장 일반적인 방법으로서 널리 이용되고 있다. 응력과 변형률 관계는 creep function, impulse memory function 등을 기초로 한 적분형태의 구성방정식(integral-type constitutive law)이 주로 사용되는데, 이 경우 부재의 응력이력을 모두 기억하여야 하므로 이러한 형태의 구성방정식은 대형 구조물의 해석에는 적합하지 않다. 이러한 단점은 creep function이나, relaxation function을 Dirichlet 급수로 표현함으로써 극복할 수 있다.

지난 10여년 동안에 크리이프와 건조수축을 고려한 구조물의 해석기술의 많은 발전이 있었음에도 불구하고, 아직도 많은 해결과제가 산재해 있다. 따라서 이에 대한 보다 지속적인 연구가 수행되어야 할 필요가 있다.

참 고 문 헌

1. Bazant, Z. P., Kim, S. S., "Nonlinear creep of concrete-adaptation and flow," J. Eng. Mech. Div. 105, EM3, 1979. pp.419-46.
2. Bazant, Z. P., "Numerically stable algorithm with increasing time steps for integral-type aging creep," Pro. 1st int. Conf. on Structural Mechanics in Reactor Technology, West Berlin, Vol. 3, Paper H2/3, 1971.
3. Bazant, Z. P., Wittmann, F. H., Creep and shrinkage in concrete structures, 1982.
4. Gilbert, R. I., Time effects in concrete structures, 1988.
5. Kang, Y. J., and Scordelis, A. C., "Nonlinear analysis of prestressed concrete frames," J. Struct. Div. ASCE, 106, No. 1, 1980.
6. Bazant, Z. P., Rossow, E. C., and Horrigmoe, G., "Finite element program for creep analysis of concrete structures," Proc. 6th Int. J., 25, No 3, 1981 pp.86-122. 