

일반 등방경화 구성관계에 대한 내재적인 응력적분 : I. 정식화

Implicit Stress Integration of the Generalized Isotropic
Hardening Constitutive Model : I. Formulation

오 세 봉*¹
Oh, Se-Boong
이 승 래*²
Lee, Seung-Rae

Abstract

An implicit stress integration algorithm was formulated for implementing an anisotropic hardening constitutive model which has been based on the generalized isotropic hardening rule in nonlinear finite element analysis technique. The rate form of stress tensor was implicitly integrated using the generalized trapezoidal rule and the tangent stress-strain modulus was evaluated consistently with the nonlinear solution technique. As a result, it has been found that the nonlinear analysis with the anisotropic hardening constitutive model might be performed accurately and efficiently.

요 지

연약한 지반의 거동을 적절하게 표현할 수 있는 일반 등방경화 규칙에 근거한 비등방경화 구성모형을 비선형 유한요소해석에 적용하기 위하여 내재적인 응력적분기법을 정식화하였다. 정식화된 응력적분기법은 비선형 해석시에 필요한 응력을 일반 사다리꼴규칙에 의하여 내재적으로 적분하고 응력-변형을 접선계수를 비선형 해법에 일관되게 도출할 수 있다. 이러한 알고리즘을 통하여 해의 정확도 및 수렴도를 확보할 수 있으므로, 비등방경화 구성 관계를 적용한 비선형 해석을 정확하고 효율적으로 수행할 수 있는 토대를 구축할 수 있었다.

Keywords : Implicit stress integration, Consistent tangent modulus, Anisotropic hardening rule, Elastoplastic constitutive relationship, Generalized trapezoidal rule.

*¹ 정희원, 영남대학교 토목공학과 전임강사

*² 정희원, 한국과학기술원 토목공학과 부교수

1. 서론

최근에는 지반재료의 복잡한 비선형거동을 고려하여 유한요소법으로 지반공학 문제를 해석하는 범주가 넓어지고 있는 추세이다. 이와 같이 비선형 유한요소해석을 수행할 때에는, 효율적이고 정확한 수치해석을 수행하기 위하여 Newton 법과 같은 반복 계산기법을 적용하고 있다.

지배방정식을 만족하기 위하여 이루어지는 해풀이 반복과정에서는 변형(또는 변형률)에 상응하는 응력값이 요구되며, 충분형태로 나타나는 비선형 탄소성 구성관계의 경우에는 응력적분이 수행되어야 한다. 이 때 구성관계의 수치적분 방법에 따라 비선형해석의 수치적인 정확도 및 수렴성이 크게 좌우될 수 있다 [Simo & Taylor(1985), Ortiz & Popov(1985)]. 널리 사용되는 대부분의 탄소성 구성관계는 해석적인 응력적분이 불가능하며 외연적(explicit) 적분방법을 적용하면 오차가 크게 발생할 수 있다. 따라서 해법의 안정성과 정확도를 확보하기 위해서는 내재적인(implicit) 수치 응력적분을 수행해야 한다.

또한 수치적으로 적분된 응력에 상응하는 접선계수 C 는 지배방정식의 해를 구하는 반복적인 과정과 일관되게 정식화되어야 해의 수렴도가 우수한 것으로 알려져 있다 [Simo & Taylor(1985)]. 따라서 내재적으로 적분된 응력을 변형률에 대하여 미분함으로써 일관된 접선계수를 구하는 것이 유리하다.

지반의 복잡한 거동을 표현할 수 있는 구성모델 중 Druker-Prager 모델 [Simo & Taylor(1985), Cap 모델 [Simo et al. (1988)], Cam-clay 모델 [Gens & Potts(1988)] 등의 등방경화 탄소성모델들은 이미 내재적인 적분법이 적용되어 왔다.

최근에는 기존의 등방경화모델로는 현장지반에서 일어나는 여러 단계의 역재하 하중효과를 적합하게 고려할 수 없으므로 비등방경화 구성모델을 적용하기에 이르렀다. 그리하여 단

순한 형태의 항복면으로 이루어진 비등방경화 모델을 적용하기에 이르렀다. 그리하여 단순한 형태의 항복면으로 이루어진 비등방경화모델에 대하여 회귀사상 알고리즘(return mapping algorithm)을 적용하였다 [Borja & Amies(1994), Hopperstad & Remseth(1995)]. 그러나 복잡한 비등방경화 구성관계는 경화률 기술하는 내부변수가 많고 항복면이 복잡하여 대체로 외연적으로 적분되고 있다 [Herrmann et al.(1987)]. 이러한 외연적인 적분은 비등방경화 모델을 적용한 비선형 유한요소해석을 정확하고 효율적으로 수행하는 데 심각한 지장을 줄 수 있다.

한편 이승래 & 오세봉(1995)은 일반 등방경화규칙(generalized isotropic hardening rule, 약하여 GIH)에 기반하여 점토의 거동을 표현할 수 있는 비등방경화 구성모델을 제안하였다. 이 구성관계는 기준면과 항복면으로 이루어지며, 기준면은 점토의 거동을 적합하게 모델할 수 있도록 한계상태이론에 근거하여 설정하였다. 등방경화의 상동중심은 역재하가 발생하는 응력상태에서 바로 생성되며, GIH에 의거한 비등방 경화규칙은 (1) 규준상동 응력의 불연속적인 생성, (2) 기준면과 항복면의 복합적인 GIH에 의하여 나타난다. 따라서 역재하 과정에서의 항복이 적절히 모델될 수 있었고 단순한 경화함수만을 사용하여 흙의 비등방 거동을 예측할 수 있었다. 특히 이러한 일반 등방경화 구성모델을 적용하여 여러 지반공학 문제에 대한 수치해석을 수행할 때에는 K_0 압밀된 지반의 과압밀 상태 및 역재하시의 소성거동을 비교적 잘 반영할 수 있다.

본 연구에서는 이러한 비등방경화 구성모델에 대하여 내재적인 적분 및 일관된 접선계수를 정식화함으로써, 비선형 유한요소해석에 있어서 요구되는 정확도 및 수렴도를 확보하고자 하였다.

2. 내재적인 응력적분

2.1 경로 독립적인 내재적인 응력적분법

(path independent implicit stress integration)

일반적으로 지반의 탄소성 유효응력-변형률 관계는 다음과 같은 증분형태의 식으로 나타나고,

$$d\sigma = \underline{C}^{\sigma} \cdot d\varepsilon \quad (1)$$

이 식을 구성하는 함수는 대체로 해석적인 적분이 불가능하다. 만약에 응력증분과 변형률의 증분이 미소량이라면, 응력은 기지의 \underline{C}^{σ} , $d\varepsilon$ 를 식 (1)에 대입하여 쉽게 구할 수 있다. 그런데 변위의 증분은 반복단계에 따라 수치적으로 규정되는 양이므로, 변형률증분과 그에 따른 응력의 변화는 미소한 양으로 규정지을 수 없다. 따라서 식 (1)을 전진 오일러법(forward Euler method)에 의하여 선형적으로 응력적분을 하면 오차가 누적된다.

전진 오일러법과 같은 외연적(explicit)인 적분법은 기지의 응력 및 변형률로부터 구성관계를 적분하는 방법이다[Zienkiewicz & Taylor(1989)]. 이러한 외연적인 적분법에서 발생하는 오차는 평형조건이 만족되지 않아서 유발된 것이 아니라, 소성변형률을 도출하는 유동규칙(flow rule)의 적분에서 수학적으로 나타나는 것이다[Crisfield(1991)].

이에 반하여, 내재적인(implicit) 응력적분법은 미지의 응력을 이용하여 적분을 수행하는 것으로 소성변형률을 수치적으로 적분함으로써 정확도를 확보할 수 있다. 따라서 Newton 법을 이용한 해석방법의 수렴성 및 정확도를 확보하기 위해서는, 내재적인(implicit) 응력적분법이 가장 효과적이고 합리적인 것으로 알려져 있다.

내재적인 응력적분에 있어서, 변형률증분은 다음의 두가지로 구분될 수 있다[Dodds(1986)].

$$(\Delta \underline{\varepsilon}_{n+1}^k)_{PI} = \underline{\varepsilon}_{n+1}^k - \underline{\varepsilon}_n \quad (2a)$$

$$(\Delta \underline{\varepsilon}_{n+1}^k)_{PD} = \underline{\varepsilon}_{n+1}^k - \underline{\varepsilon}_n^{k-1} \quad (2b)$$

식 (2a)에 정의된 변형률증분은 경로에 독립적인(path independent) 특성을 가지고 있다. 현단계 t_{n+1} 내의 반복과정에서 응력은 전단계 t_n 에서 수렴된 ε_n 으로부터 구해진 총 변형률증분을 구간으로 하여 적분된다(그림 1). 한편 식 (2b)에 정의된 변형률증분은 경로에 의존적인(path dependent) 특성을 가지고 있다. 이때 응력-변형률 관계는 반복수 $k-1$ 에서 k 까지의 구간에 상응하는 변형률에 대하여 적분된다.

for(n+1)-th step

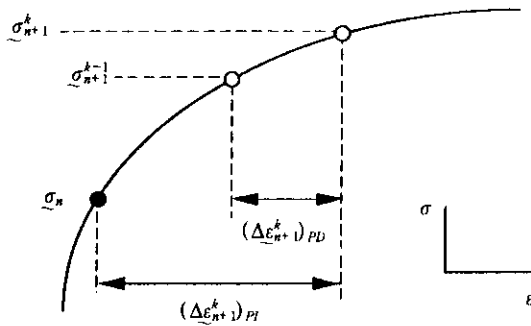


그림 1. 경로독립 및 경로의존적인 변형률증분

경로에 의존적인 경우에는, 식 (2b)에 의하여 정의된 변형률이 실제 변형률경로와 상이할 수 있다[Dodds(1986)]. 왜냐하면 소성변형률의 방향이 수치적인 반복과정마다 변화하는 것이 적분에 반영되므로, 현 시간단계내에서 평균적인 소성변형률의 방향을 적합하게 표현할 수 없기 때문이다. 또한 반복과정내에서 변형률의 증분방향이 날카롭게 변화하면, 실제와는 상이하게 항복면 내부로 제하(unloading)를 일으키는 오류를 범할 수도 있다.

한편 경로에 독립적인 식 (2a)의 적분은 이러한 문제들을 피할 수 있다. 그러나 상대적으로 큰 양의 변형률에 대하여 응력-변형률 관계를 적분해야 하므로, 적분과정의 정확도와

수렴에 대한 안정성을 확보하는 것이 필수적으로 요구된다[Dodds(1986), Crisfield(1991)]. 따라서 본 연구에서는 일반 사다리꼴 규칙에 의하여 비교적 정확한 적분을 수행함으로써 경로에 독립적인 적분이 가능하도록 하였다.

2.2 일반 사다리꼴 규칙을 이용한 응력적분법

이전의 시간단계 t_n 에서 수렴한 응력을 σ_n 이라고 규정할 때, 기지의 값 $\underline{\varepsilon}_{n+1}^k = \underline{\varepsilon}_n + \Delta \underline{\varepsilon}_{n+1}^k$ 에 상응하는 현 단계에서의 응력 $\underline{\sigma}_{n+1}^k$ 은 다음과 같이 구해질 수 있다.

$$\underline{\sigma}_{n+1}^k = \underline{\sigma}_n + f_{in}^{n+1} \underline{C}^v \cdot d\underline{\varepsilon}^v \quad (3)$$

이때 변형률을 탄성 및 소성량으로 선형적으로 분리할 수 있다고 가정하면 $d\underline{\varepsilon}^v = d\underline{\varepsilon} - d\underline{\varepsilon}^p$ 이다. 또한 탄성 응력-변형률 접선계수 \underline{C}^v 가 주어진 적분구간내에서 일정한 값이라고 가정하면, 기지의 값이 시도응력텐서 $\underline{\sigma}_n$ 을 다음과 같이 정의할 수 있고,

$$\underline{\sigma}' = \underline{\sigma}_n + \underline{C}^v \cdot \Delta \underline{\varepsilon}_{n+1}^k \quad (4)$$

이러한 시도응력을 이용하여 식 (3)은 다음 식과 같이 변환될 수 있다.

$$\underline{\sigma}_{n+1}^k = \underline{\sigma}' - \underline{C}^v \cdot f_{in}^{n+1} d\underline{\varepsilon}^p \quad (5)$$

따라서 식 (5)에 의하면 식 (3)에 나타난 응력적분의 항은 단지 소성 변형률에 대한 수치적분만이 요구됨을 알 수 있다.

이때 소성변형률은 관련유동규칙(associative flow rule)에 따라 다음과 같이 정의된다.

$$d\underline{\varepsilon}^p = d\phi \underline{f}_{\underline{m}} \quad (6)$$

그런데 일반적으로 탄소성 구성관계에 대하여 식 (6)에 나타난 소성변형률은 해석적으로 적분하는 것이 불가능하다. 따라서 소성변형률

에 대한 적분은 수치적분에 의하여 구해지며 적분구간 $[t_n, t_{n+1}]$ 에서 일반 사다리꼴 규칙(generalized trapezoidal rule)을 적용하여 다음과 같이 근사화할 수 있다[Ortiz & Popov (1985)].

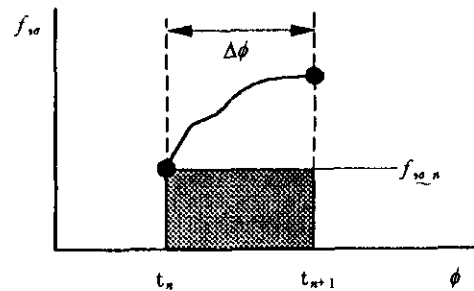
$$f_{in}^{n+1} \underline{f}_{\underline{m}} d\phi \approx \Delta\phi \{(1-\delta)(\underline{f}_{\underline{m}})_n + \delta(\underline{f}_{\underline{m}})_{n+1}\} \quad (7)$$

여기서 $(\underline{f}_{\underline{m}})_n, (\underline{f}_{\underline{m}})_{n+1}$ 은 각각 n 및 $(n+1)$ 단계에서 응력에 대한 항복면함수의 미분 값들이다. 또 δ 는 사다리꼴 계수이며 $\Delta\phi$ 는 일관성 계수(consistency parameter)이다. 그림 2는 식 (7)에 나타난 소성변형률의 수치적분을 $\phi - \underline{f}_{\underline{m}}$ 관계에서 가상적으로 나타낸 것이다. $\delta=0$ 인 경우에는 완전 외연적인(explicit) 적분법이고, $\delta=1$ 인 경우는 완전 내재적인(implicit) 적분법으로 최단투사법(closest point projection)이라고도 한다[Simo & Taylor(1985)]. 또한 $\delta=1/2$ 이면 그림 2의 (b)경우와 같이 사다리꼴의 면적으로 나타난다.

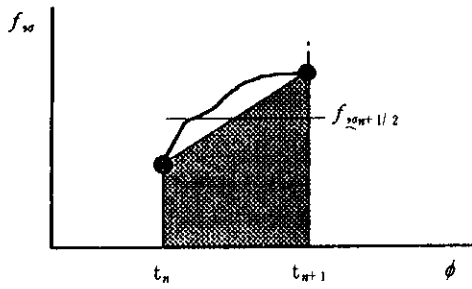
따라서 식 (7)을 식 (5)에 대입하면 다음 식들이 유도될 수 있다.

$$\underline{\sigma}_{n+1} = \underline{\sigma}' - \Delta\phi \underline{C}^v \cdot (\underline{f}_{\underline{m}})_{n+1} \delta \quad (8a)$$

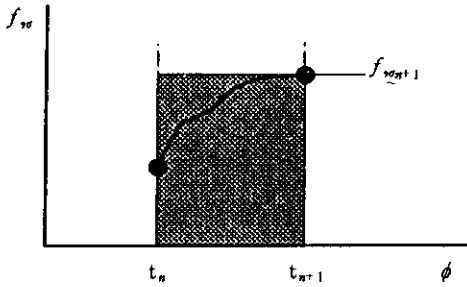
$$(\underline{f}_{\underline{m}})_{n+1} \delta = (1-\delta)(\underline{f}_{\underline{m}})_n + \delta(\underline{f}_{\underline{m}})_{n+1} \quad (8b)$$



(a) $\delta=0.0$ fully explicit integration
forward Euler



(b) $\delta=0.5$ trapezoidal rule



(c) $\delta=1.0$ closest point projection backward Euler

그림 2. 일반사다리꼴규칙에 따른 적분

이때 식 (8a)의 우변에 있는 항복면의 미분은 σ_{n+1} 에 의존하므로 이 식에 의한 응력적분은 내재적(implicit)으로 반복해석을 수행하여야 한다.

한편 Newton법을 통한 비선형 유한요소해석에서 강성행렬을 도출하기 위해서는 탄소성 접선계수 \underline{C}_{n+1}^k 가 필요하다. 이때 Newton법의 2차 수렴도를 유지하기 위하여, \underline{C}_{n+1}^k 는 응력을 적분하는데 사용된 수치적인 방법과 일관되어야 한다. 여기서 일관됨이란 변형률증분 $\Delta \underline{\epsilon}_{n+1}^k$ 에 \underline{C}_{n+1}^k 를 연산하여 구한 $\Delta \underline{\sigma}$ 가 수치적인 응력 적분기법으로 구한 값과 비교하여 1차 정확도까지 일치함을 의미한다 [Dodds(1986), Crisfield, (1991)].

식 (1)에서 사용된 \underline{C}^{σ} 는 경로의존적인 응력 적분과정(식 (2b))에서는 응력적분의 시점이 σ_{n+1}^k 일 때 $\underline{\epsilon}_{n+1}^k - \underline{\epsilon}_{n+1}^{k-1}$ 에 대하여 1차 정확도를 갖

도록 응력의 증분을 계산하므로 적분알고리즘과 일관될 수 있다. 그러나 경로독립적인 응력 적분과정(식 (2a))에 대해서는 일관된 접선계수가 아니다 [Dodds(1987)]. 따라서 경로독립적으로 응력을 적분할 때는 \underline{C}^{σ} 를 사용하면 비선형 유한요소해석의 반복과정에서 해의 수렴성을 심각하게 저해하게 된다.

이와 관련하여 Simo & Taylor(1985)는 최단투사법에 따라 경로독립적인 변형률에 대하여 응력적분을 수행하고, 적분된 응력을 해석적으로 미분하여 Newton법의 선형화에 일관되도록 접선계수를 도출하였다. 이때의 일관된 접선계수는 Newton법의 점근적인 2차 수렴도를 보전하는 것으로 밝혀졌다. 따라서 본 연구에서는 일반 사다리꼴 규칙에 의하여 수치적분된 식 (8)의 응력을 미분함으로써 다음 식과 같이 일관된 접선계수 \underline{C}_{n+1}^k 를 도출하게 된다.

$$\underline{C}_{n+1}^k = \frac{\partial \underline{\sigma}_{n+1}^k}{\partial \underline{\epsilon}_{n+1}^k} = \underline{1} \frac{\partial \underline{p}_{n+1}^k}{\partial \underline{\epsilon}_{n+1}^k} + \frac{\partial \underline{S}_{n+1}^k}{\partial \underline{\epsilon}_{n+1}^k} \quad (9)$$

여기서 $\underline{1} = \delta_{ij}$ (Kronecker delta)로 정의된다.

3. 일반등방경화 구성모델의 응력적분

3.1 구성모델의 기본적인 함수

일반 등방경화규칙에 의거한 비등방경화 구성모델 [Lee & Oh(1995)]에서 사용된 기준면 함수와 항복면함수는 축대칭 응력장에서 정의

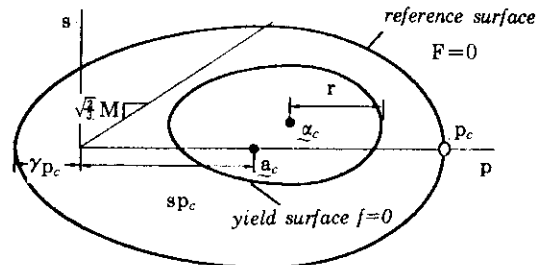


그림 3. 일반 등방경화규칙에 의거한 비등방경화 구성모델

된 축차응력 q 에 의하여 정의된 것으로 그림 3에서 보여지듯이 일반적인 응력장에 대한 식으로 수정할 필요가 있다. 즉

$$F = (p - sp_c)^2 + \frac{3}{2} \frac{s \cdot s}{m^2} - d^2 p_c^2 = 0 \quad (10a)$$

$$f = (p - \alpha)^2 + \frac{3}{2} \frac{(s - \beta) \cdot (s - \beta)}{m^2} - r^2 = 0 \quad (10b)$$

여기서, 응력텐서, 변형률텐서 및 항복면 중심응력텐서는 각각

$$\underline{\sigma} = p \underline{1} + \underline{s} \quad (11a)$$

$$\underline{\varepsilon} = \frac{1}{3} \varepsilon_v \underline{1} + \underline{e} \quad (11b)$$

$$\underline{\alpha} = \alpha \underline{1} + \underline{\beta} \quad (11c)$$

등으로 체적항 및 축차항으로 분해된다. 그리고 식 (10)에 나타난 상수들은 그림 3에 나타난 M , s 및 γ 를 이용하여 다음 식 (12)와 같이 정의된다.

$$d = 1 - s, \quad m = Ms / (1 - s), \quad \text{if } p \geq \alpha \quad (12a)$$

$$d = \gamma + s, \quad m = Ms / (\gamma + s), \quad \text{if } p < \alpha \quad (12b)$$

기준면의 항복에 대한 경화규칙은 Cam-caly 모델 [Roscoe & Burland(1968)]과 같이 소성 체적변형률에 의존하는 식 (13a)을 적용하였으며, 기준면내에서 항복이 일어날 때에는 소성축차변형률에 의한 경화함수로 식 (13b)와 같이 가정하였다.

$$\dot{p}_c = \frac{1+e}{\lambda - \kappa} p_c \dot{\varepsilon}_v^p \quad (13a)$$

$$\bar{\varepsilon}_d^p = f d \varepsilon_d^p = \frac{a}{m^2 \theta^2} \frac{(cr | dp_c)^b}{1 - cr | dp_c} \quad (13b)$$

이때의 적분범위는 하나의 역재하과정을 통하여 정의되고, $d \varepsilon_d^p = \sqrt{2/3} \|d \varepsilon_v^p - d \varepsilon_{kk}^p / 3\|$ 이

며 $\bar{\theta} = \sqrt{\theta_{//}^2 / 9 + 2(\theta_{//} - \theta_{//} / 3)^2} / 3$ 로 규준상동응력 $\theta_{//}$ 에 의하여 정의 된다 [Lee & Oh(1995)].

응력 및 내부변수 r 에 대한 항복면의 미분은 식 (10b)로부터 다음과 같이 구해질 수 있고

$$f_{,p} = f_{,r} = 2(p - \alpha) \quad (14a)$$

$$f_{,s} = f_{,\beta} = 3(s - \beta) / m^2 \quad (14b)$$

$$f_{,r} = -2r \quad (14c)$$

항복면의 중심은 기하학적인 관계로부터 다음과 같이 구해진다.

$$\alpha(r, p_c) = \alpha_{,pc} p_c + \alpha_{,r} r \quad (15a)$$

$$\alpha_{,pc} = \underline{\theta}, \quad \alpha_{,r} = a / dp_c - \underline{\theta} / d \quad (15b)$$

여기서 $\alpha_{,pc}$ 와 $\alpha_{,r}$ 는 일정한 값을 가진 텐서량이다.

기준면상의 응력적분은 Cam-caly모델과 거의 유사하며, 기존의 연구 [Lee (1989), 오세봉 (1991)]에 이미 보고되어 있다. 그러나 기준면 내부에서 일어나는 비등방경화 구성관계는 내부변수가 많고 경화규칙이 복잡하여 내재적인 응력적분을 구현한 연구실적이 거의 없는 실정이다. 따라서 본 연구에서는 비선형 수치해석을 수행하기 위하여 비등방경화를 일으키는 항복면식 (10b)에 대한 응력적분을 수행함으로써 이 구성관계를 적용한 유한 요소해석이 가능하도록 하였다.

3.2 일반 등방경화 구성모델의 응력적분

$n+1$ 번째 시간단계내의 해를 구하는 과정에서 볼 때, k 번째 반복수에서 주어진 변형률증분 $\Delta \underline{\varepsilon} \equiv \Delta \underline{\varepsilon}_{n+1}^k = \underline{\varepsilon}_{n+1}^k - \underline{\varepsilon}_n$ 에 대하여 식 (4)에 따라 시도응력(trial stress) 텐서는

$$\underline{\sigma}^r = \underline{\sigma}_n + \underline{C}^e \cdot \Delta \underline{\varepsilon} \quad (16)$$

임을 알 수 있다. 여기서 탄성계수는 다음과 같이 가정할 수 있다 [Lee (1989)].

$$\underline{C}^e = K \underline{1} \otimes \underline{1} + 2G \left(\underline{I} - \frac{1}{3} \underline{1} \otimes \underline{1} \right) \quad (17a)$$

$$K = \frac{1 + \nu}{\kappa} p, \quad G = \frac{3K(1 - 2\nu)}{2(1 + \nu)} \quad (17b)$$

이때 직각좌표계에서 $(a \otimes b)_{ijkl} = a_{ij} b_{kl}$ 로 정의되고 K, G는 현 시간단계내에서 일정하다고 가정하였다. 따라서 시도응력의 체적항 및 축차항은 각각 식 (11a, b) 및 식 (16, 17)로부터

$$\underline{p}'' \equiv \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\sigma}'') = \underline{p}_n + K \Delta \epsilon, \quad (18a)$$

$$\underline{s}'' \equiv \underline{\sigma}'' - \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\sigma}'') = \underline{s}_n + 2G \Delta \underline{\epsilon} \quad (18b)$$

이다. 이 응력들은 기지의 응력 및 변형률증분으로부터 구한 값으로 변형률증분을 모두 탄성량으로 간주하여 계산한 시도응력이다.

식 (8a)로부터 적분 응력은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\underline{\sigma} \equiv \underline{\sigma}_{n+1}^k = \underline{\sigma}'' - \Delta \phi \underline{C}^e \cdot (f_{,n})_{n+\delta} \quad (19)$$

또한 응력에 대한 항복면의 미분값은 $f_{,n} = \frac{1}{3} f_{,n} \underline{1} + f_{,n}$ 로 분해될 수 있으므로 식 (11a)로부터 식 (19)는 다음과 같이 구해질 수 있다.

$$\underline{p} \equiv \underline{p}_{n+1}^k = \underline{p}'' - K \Delta \phi (f_{,n})_{n+\delta} \quad (20a)$$

$$\underline{s} \equiv \underline{s}_{n+1}^k = \underline{s}'' - 2G \Delta \phi (f_{,n})_{n+\delta} \quad (20b)$$

윗 식들에서 나타나는 항복면의 미분항은 식 (8b)에 따라 다음과 같이 도출된다.

$$(f_{,n})_{n+\delta} = (1 - \delta)(f_{,n})_n + \delta(f_{,n})_{n+1} \quad (21a)$$

$$(f_{,n})_{n+\delta} = (1 - \delta)(f_{,n})_n + \delta(f_{,n})_{n+1} \quad (21b)$$

한편 경화함수의 적분은 식 (13a, b)에 의하여 다음과 같이 나타난다.

$$\underline{p}_c \equiv (\underline{p}_c)_{n+1} = \underline{p}_c \exp(\theta \Delta \phi (f_{,n})_{n+\delta}) \quad (22a)$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}} \|\underline{\epsilon}^p\| = \psi(r, p_c) \quad (22b)$$

여기서

$$\underline{p}_c \equiv \underline{p}_c(t_n),$$

$$\underline{\epsilon}^p \equiv \underline{\epsilon}_{n+1}^p = (\underline{\epsilon}^p)_n + \Delta \phi (f_{,n})_{n+\delta}$$

$$\psi(r, p_c) = \frac{a}{m^2 \|\underline{\theta}\|^2} \frac{\langle cr | d p_c \rangle^b}{1 - cr | d p_c}$$

따라서 응력적분값은 식 (10b, 20, 22)를 내재적으로 연립하여 풀어야 한다. 이때 변수벡터 $\underline{u} = \{ \underline{p}, \underline{s}, \underline{p}_c, r, \Delta \phi \}^T$ 에 대한 잔류벡터 $\underline{g} = \{ g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 \}^T$ 를 정의하면,

$$g_1 = \underline{p} - \underline{p}'' + K \Delta \phi (f_{,n})_{n+\delta} \quad (23a)$$

$$g_2 = \underline{s} - \underline{s}'' + 2G \Delta \phi (f_{,n})_{n+\delta} \quad (23b)$$

$$g_3 = \underline{p}_c - \underline{p}_c \exp(\theta \Delta \phi (f_{,n})_{n+\delta}) \quad (23c)$$

$$g_4 = \sqrt{\frac{2}{3}} \|\underline{\epsilon}^p\| - \psi(r, p_c) \quad (23d)$$

$$g_5 = (\underline{p} - \alpha)^2 + \frac{2}{3} \frac{(\underline{s} - \beta) \cdot (\underline{s} - \beta)}{m^2} - r^2 \quad (23e)$$

이다.

본 구성관계의 응력적분은 다음의 비선형계를 만족하는 해를 구하여 수행할 수 있다.

$$\underline{g}(\underline{u}_{n+1}) = 0 \quad (24)$$

이를 위하여 식 (24)를 선형화하여 Newton 법으로 해를 구하면

$$\underline{g}'(\underline{u}_{n+1}^k) \Delta \underline{u}^k = \underline{g}^k, \quad \underline{u}_{n+1}^{k+1} = \underline{u}_{n+1}^k - \Delta \underline{u}^k \quad (25)$$

$$\underline{g} = \begin{Bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \\ g_5 \end{Bmatrix}, \quad \underline{u} = \begin{Bmatrix} \underline{p} \\ \underline{s} \\ \underline{p}_c \\ r \\ \Delta \phi \end{Bmatrix}, \quad \underline{g}'(\underline{u}) = \begin{Bmatrix} \underline{g}_{1,p} & \underline{0}^T & \underline{g}_{1,p_c} & \underline{g}_{1,r} & \underline{g}_{1,\Delta \phi} \\ \underline{0} & \underline{g}_{2,s}^T & \underline{g}_{2,p_c} & \underline{g}_{2,r} & \underline{g}_{2,\Delta \phi} \\ \underline{g}_{3,p} & \underline{0}^T & \underline{g}_{3,p_c} & \underline{g}_{3,r} & \underline{g}_{3,\Delta \phi} \\ \underline{0} & \underline{g}_{4,s}^T & \underline{g}_{4,p_c} & \underline{g}_{4,r} & \underline{g}_{4,\Delta \phi} \\ \underline{g}_{5,p} & \underline{g}_{5,s}^T & \underline{g}_{5,p_c} & \underline{g}_{5,r} & \underline{0} \end{Bmatrix} \quad (26)$$

식 (26)에 필요한 함수들은 부록 I에 자세

히 수록되어 있다. 또한 풀이과정은 표 1과 같이 $\|g^k\|/\|g^0\|$ 가 충분히 작은 수로 규정된 값에 도달할 때까지 반복된다.

표 1 $g(u_{n+1})=0$ 을 계산하기 위한 알고리즘

1. Initialize $k=0, \underline{u}_{n+1}^k = \underline{0}$
2. Compute $\underline{g}^k = \underline{g}(\underline{u}_{n+1}^k)$
3. If $\ \underline{g}^k\ /\ \underline{g}^0\ < \text{Tolerance}$, then return; else
4. Update $\underline{u}_{n+1}^{k+1} = \underline{u}_{n+1}^k - \Delta \underline{u}^k$ such that $\underline{g}'(\underline{u}_{n+1}^k) \Delta \underline{u}^k = \underline{g}^k$
5. $k \leftarrow k+1$ and go to 2

3.3 일반 등방경화 구성모델의 접선계수

지배식의 풀이과정에서 Newton법의 점근적인 2차 수렴도를 유지하기 위하여 수치적으로 적분된 응력에 일관된 접선계수(consistent tangent modulus)를 다음과 같이 구하여 적용해야 한다[Simo & Taylor(1985)].

$$\underline{C}_{n+1}^k = \frac{\partial \underline{Q}_{n+1}^k}{\partial \underline{e}_{n+1}^k} = \underline{1} \otimes \frac{\partial \underline{p}_{n+1}^k}{\partial \underline{e}_{n+1}^k} + \frac{\partial \underline{s}_{n+1}^k}{\partial \underline{e}_{n+1}^k} \quad (9\text{bis.})$$

$(\bullet)' \equiv \partial(\bullet)_{n+1}^k / \partial \underline{e}_{n+1}^k$ 로 정의할 때, 위 식의 우변은 식 (20)을 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\underline{p}' = (\underline{p}'')' - \underline{K} \Delta \phi'(f_{,n})'_{n+\delta} - \underline{K} \Delta \phi(f_{,n})'_{n+\delta} \quad (27\text{a})$$

$$\underline{s}' = (\underline{s}'')' - 2\underline{G}(f_{,n})'_{n+\delta} \otimes \Delta \phi' - 2\underline{G} \Delta \phi(f_{,n})'_{n+\delta} \quad (27\text{b})$$

식 (18)로부터 $(\underline{p}'')' = \underline{K} \underline{1} (\underline{s}'')' = 2\underline{G} (\underline{1} - \frac{1}{3} \underline{1} \otimes \underline{1})$ 이고, 식 (14, 21)으로부터

$$(f_{,n})'_{n+\delta} = 2\delta(\underline{p}' - \underline{\alpha}') \quad (28\text{a})$$

$$(f_{,n})'_{n+\delta} = \frac{3}{m} \delta(\underline{s}' - \underline{\beta}') \quad (28\text{b})$$

을 도출할 수 있다. 그리고 식 (15)로부터

$$\underline{\alpha}' = \underline{\alpha}_{,n} \otimes \underline{p}'_c + \underline{\alpha}_{,n} \otimes \underline{r}' \quad (29)$$

을 구할 수 있으므로, 식 (28, 29)로부터 식 (27)이 $\underline{p}', \underline{s}', \underline{p}'_c, \underline{r}', \Delta \phi'$ 의 독립적인 텐서로 이루어진 관계식이라는 것을 알 수 있다. 따라서 식 (27a, b)와 더불어 3개의 식이 추가로 필요하다.

이를 위하여 기준면의 경화함수를 나타내는 식 (22a)로부터

$$\underline{p}'_c = \theta \Delta \phi p_c(f_{,n})'_{n+\delta} + \theta(f_{,n})'_{n+\delta} p_c \Delta \phi' \quad (30)$$

을 도출할 수 있고 항복면의 경화함수를 나타내는 식 (22b)로부터

$$\frac{\sqrt{3}}{\|\underline{e}'\|} \underline{e}' \cdot \{\Delta \phi'(f_{,n})'_{n+\delta} + \Delta \phi(f_{,n})'_{n+\delta}\} = \psi_{,n} \underline{p}'_c + \psi_{,n} \underline{r}' \quad (31)$$

을 유도할 수 있다. 이때 $\psi_{,n}$ 과 $\psi_{,n}$ 은 부록 I에 수록되어 있다. 또 항복면의 식 (10b)를 미분하면

$$f_{,n}(\underline{p}' - \underline{\alpha}') + f_{,n}(\underline{s}' - \underline{\beta}') + f_{,n} \underline{r}' = 0 \quad (32)$$

이다. 그러므로 식 (28)을 식 (30~32)에 대입하면 식 (27)과 마찬가지로 $\underline{p}', \underline{s}', \underline{p}'_c, \underline{r}', \Delta \phi'$ 의 독립적인 변수로 구성되어 있다. 따라서 식 (30~32)를 식 (27a,b)와 더불어 연립하여 다음의 행렬식과 같이 $\underline{p}', \underline{s}'$ 를 풀면, 접선계수 \underline{C}_{n+1}^k 를 구할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} a_1 \underline{0}^T & a_3 a_4 a_5 \\ 0 & b_1 \underline{1} & b_3 b_4 b_5 \\ c_1 \underline{0}^T & c_3 c_4 c_5 \\ \underline{p} & d_2 \underline{e}^T d_3 d_4 d_5 \\ e_1 \underline{e}_2^T & e_3 e_4 e_5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{p}'^T \\ \underline{s}'^T \\ \underline{p}'_c{}^T \\ \underline{r}'^T \\ \Delta \phi'^T \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{K} \underline{1}^T \\ 2\underline{G}(\underline{1} - \frac{1}{3} \underline{1} \otimes \underline{1}) \\ \underline{0}^T \\ \underline{0}^T \\ \underline{0}^T \end{Bmatrix} \quad (33)$$

식 (33)의 성분에 대한 자세한 유도과정은

부록 II에 기술되어 있다.

구해진 접선계수는 비대칭 행렬이고 $\Delta\phi$ 가 0에 가까운 작은 수일 경우에는 외연적인 적분시의 접선계수($\delta=0$)와 일치하게 된다. 또한 선형계인 식 (33)은 역행렬을 구하여 해석적인 해를 구할 수 있지만, 계산 소요시간이 매우 많이 소요된다. 따라서 본 연구에서는 부록 II와 같이 Gauss소거방식의 해법을 이용하여 효율적으로 구하였다.

4. 결론

본 연구에서는 비등방 탄소성 구성관계를 적용한 비선형 유한요소해석을 정확하게 수행하기 위하여, 일반 사다리꼴규칙에 의한 수치적인 응력적분을 정식화하였다. 정식화한 응력적분법은 내재적으로 응력을 구하므로 국부적인 Newton법에 의하여 반복적으로 해를 구해야 한다. 이때 지배식의 해를 구하는 과정에서 Newton법에 수렴도를 확보하기 위하여 일관된 응력-변형률 접선계수를 정식화하였다. 본 연구는 특정한 구성관계에 국한하여 기술하였지만 여타 비등방경화 구성관계에 대한 응력적분 알고리즘을 정식화하는 경우에도 동일한 방법으로 적용하는 것이 가능하리라고 사료된다.

이러한 정식화과정을 토대로 비등방 탄소성 구성관계를 비선형 유한요소해석 프로그램 등의 수치해석기법에 구현하면, 지반의 거동을 보다 정확하고 효율적으로 모델할 수 있게 된다. 따라서 동반논문[이승래 & 오세봉 (1996)]에서는 본 연구에서 정식화된 응력적분 알고리즘을 검증하기 위하여 이의 정확도 및 수렴도 해석을 수행할 것이다. 또한 일반 등방경화규칙에 의거한 비등방경화 구성관계[이승래 & 오세봉 (1995)]를 실제 지반공학 문제에 적용함으로써, 등방경화 구성관계를 적용한 해석에 비하여 더욱 엄밀한 비선형 유한요소해석을 수행하고자 하였다.

참고 문헌

1. 오세봉(1991), 흙의 수치해석모델 개발과 회귀사상 알고리즘에 의한 유한요소해석, 석사학위논문, 한국과학기술원.
2. 오세봉(1996), 점토의 비등방경화 구성모델에 관한 연구, 박사학위논문, 한국과학기술원.
3. 이승래, 오세봉(1995), "일반 등방경화규칙에 의거한 점토의 비등방 탄소성 구성모델", 한국지반공학회지, 10권, 3호, 17~32.
4. 오세봉, 이승래(1996), "일반응방경화 구성관계에 대한 내재적인 응력적분: II. 검증" 한국지반공학회지, 게재승인
5. Borja, R. I. and Amies, A. P.(1994). "Multiaxial Cyclic Plasticity Model for Clays", *J. Geotechnical Engineering Div.*, ASCE, 120, 1051~1070.
6. Crisfield, M. A.(1991). *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*, Vol. 1: Essentials, John Wiley & Sons.
7. Dodds, R. H.(1987). "Numerical Techniques for Plasticity Computations in Finite Element analysis", *Computers & Structures*, 26, 767~779.
8. Gens, A. and Potts, D. M.(1988). "Critical State Models in Computational Geomechanics", *Engrg. Comput.*, 5, 178~197.
9. Herrmann, L. R., Kaliakin, a. M., Shen, C. K., Mish K. D., and Zhu, Z.-Y.(1987). "Numerical Implementation of Plasticity Model for Cohesive Soils", *J. Engineering Mechanics Div.*, ASCE, 113, 500~519.
10. Hopperstad, O. S. and Remseth, S.(1995). "A Return Mapping Algorithm for a Class of Cyclic Plasticity Models", *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, 38, 549~564.
11. Lee, S. R.(1989). Non-Linear Elasto-Plastic finite Element Analysis of Braced Excavations in Clays, Thesis presented to Stanford Univ., Stanford, Calif. in partial fulfillment of requirements for the degree of Doctor of philosophy.
12. Lee, S. R. and Oh, S.(1995). "An Anisotropic Hardening Constitutive Model Based on

- Generalized Isotropic Hardening Rule for Modeling Clay Behavior”, *Int. J. Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 19, 683~703.
13. Ortiz, M. and Popov, E. P.(1985). “Accuracy and Stability of Integration Algorithms for Elastoplastic Constitutive Equations,” *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, 21, 1561~1576.
14. Roscoe, K. H., and Burland, J. B.(1968). “On the Generalized Stress-strain Behavior of ‘Wet’ Clay”, in *Engineering plasticity*, J. Heyman and Leckie(Eds.) Cambridge Univ. Press, Cambridge, 535~609.
15. Simo, J. C. and Taylor, R. L.(1985). “Consistent Tangent Operators for Rate-Independent Elastoplasticity”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.*, 48, 101~118.
16. Simo, J. C., Ju, J.-W., Pister, K. S., and Taylor, R. L.(1990). “Assessment of Cap Model:Consistent Return Mapping Algorithm and Rate-Dependent Extension”, *J. Engineering Mechanics Div.*, ASCE, 114, 191~218.
17. Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L.(1991). *The finite Element Method*, volume 2, 2nd Ed., McGraw Hill.

(접수일자 1996. 4. 4)

부 록

I. 응력적분을 위한 Jacobian 행렬

항복면의 중심응력텐서 $\underline{\alpha} = \alpha \underline{1} + \underline{\beta}$ 를 경화변수에 대하여 미분하면 식 (29)로부터 다음과 같이 전개된다.

$$\alpha_{,p_c} = \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\theta}), \quad \beta_{,p_c} = \underline{\theta} - \alpha_{,p_c} \underline{1} \quad (\text{A1.1})$$

$$\alpha_{,r} = \frac{1}{3} \left\{ \frac{\text{tr}(\underline{a})}{dp_c} - \frac{\text{tr}(\underline{\theta})}{d} \right\},$$

$$\beta_{,r} = \frac{\underline{a}}{dp_c} - \frac{\underline{\theta}}{d} - \alpha_{,r} \underline{1} \quad (\text{A1.2})$$

또한 $\underline{g}'(\underline{u}_{n+1}^k)$ 는 다음과 같이 식 (23a~e)를 미분하여 구할 수 있다.

(1) \underline{g}_1 의 미분항 :

$$\underline{g}_{1,p} = 1 + K \Delta \phi \frac{\partial (f_{,p})_{n+1}}{\partial p}, \quad \underline{g}_{1,s} = 0,$$

$$\underline{g}_{1,p_c} = K \Delta \phi \frac{\partial (f_{,p})_{n+1}}{\partial p_c}, \quad \underline{g}_{1,r} = K \Delta \phi \frac{\partial (f_{,p})_{n+1}}{\partial r},$$

$$\underline{g}_{1,\Delta \phi} = K (f_{,p})_{n+1} \quad (\text{A1.3})$$

여기서

$$\frac{\partial (f_{,p})_{n+1}}{\partial p} = 2\delta, \quad \frac{\partial (f_{,p})_{n+1}}{\partial p_c} = -2\delta \alpha_{,p_c},$$

$$\frac{\partial (f_{,p})_{n+1}}{\partial r} = -2\delta \alpha_{,r} \quad (\text{A1.4})$$

(2) \underline{g}_2 의 미분항 :

$$\underline{g}_{2,p} = 0, \quad \underline{g}_{2,s} = \underline{I} + 2G \Delta \phi \frac{\partial (f_{,s})_{n+1}}{\partial s},$$

$$\underline{g}_{2,p_c} = 2G \Delta \phi \frac{\partial (f_{,s})_{n+1}}{\partial p_c}, \quad \underline{g}_{2,r} = 2G \Delta \phi \frac{\partial (f_{,s})_{n+1}}{\partial r},$$

$$\underline{g}_{2,\Delta \phi} = 2G (f_{,s})_{n+1} \quad (\text{A1.5})$$

여기서

$$\begin{aligned} \frac{\partial (f_{\underline{s}})_{n+\delta}}{\partial \underline{s}} &= \frac{3\delta}{m^2} \underline{1}, \quad \frac{\partial (f_{\underline{s}})_{n+\delta}}{\partial p_c} = \frac{3\delta}{m^2} \underline{\beta}_{pc}, \\ \frac{\partial (f_{\underline{s}})_{n+\delta}}{\partial r} &= -\frac{3\delta}{m^2} \underline{\beta}_r \end{aligned} \quad (A1.6)$$

(3) g_i 의 미분항 :

$$\begin{aligned} g_{i,p} &= -\theta p_c \Delta \phi \frac{\partial (f_{\underline{p}})_{n+\delta}}{\partial p}, \quad g_{i,\underline{s}} = 0, \\ g_{i,p_c} &= 1 - \theta p_c \Delta \phi \frac{\partial (f_{\underline{p}})_{n+\delta}}{\partial p_c}, \\ g_{i,r} &= -\theta p_c \Delta \phi \frac{\partial (f_{\underline{p}})_{n+\delta}}{\partial r}, \\ g_{i,\Delta \phi} &= -\theta p_c (f_{\underline{p}})_{n+\delta} \end{aligned} \quad (A1.7)$$

(4) g_i 의 미분항 :

$$\begin{aligned} g_{i,p} &= 0, \quad g_{i,\underline{s}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\partial \|e^p\|}{\partial \underline{s}}, \\ g_{i,p_c} &= \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\partial \|e^p\|}{\partial p_c} - \psi_{pc}, \\ g_{i,r} &= \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\partial \|e^p\|}{\partial r} - \psi_r, \quad g_{i,\Delta \phi} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\partial \|e^p\|}{\partial \Delta \phi} \end{aligned} \quad (A1.8)$$

여기서

$$\begin{aligned} \frac{\partial \|e^p\|}{\partial \underline{s}} &= \frac{e^p}{\|e^p\|} \cdot \frac{\partial e^p}{\partial \underline{s}}, \quad \frac{\partial e^p}{\partial \underline{s}} = \Delta \phi \frac{\partial (f_{\underline{s}})_{n+\delta}}{\partial \underline{s}} \\ \frac{\partial \|e^p\|}{\partial p_c} &= \frac{e^p}{\|e^p\|} \cdot \frac{\partial e^p}{\partial p_c}, \quad \frac{\partial e^p}{\partial p_c} = \Delta \phi \frac{\partial (f_{\underline{p}})_{n+\delta}}{\partial p_c} \\ \frac{\partial \|e^p\|}{\partial r} &= \frac{e^p}{\|e^p\|} \cdot \frac{\partial e^p}{\partial r}, \quad \frac{\partial e^p}{\partial r} = \Delta \phi \frac{\partial (f_{\underline{r}})_{n+\delta}}{\partial r} \end{aligned} \quad (A1.9)$$

이며,

$$\frac{\partial \psi}{\partial p_c} = \frac{a}{m^2 \theta p_c}$$

$$\begin{aligned} & \frac{-b(cr|dp_c)^b - (1-b)(cr|dp_c)^{b+1}}{(1-cr|dp_c)^2} \\ \frac{\partial \psi}{\partial r} &= \frac{ac}{m^2 \theta dp_c} \\ & \frac{b(cr|dp_c)^{b-1} + (1-b)(cr|dp_c)^b}{(1-cr|dp_c)^2} \end{aligned} \quad (A1.10)$$

(5) g_i 의 미분항 :

$$\begin{aligned} g_{i,p} &= f_{\underline{p}}, \quad g_{i,\underline{s}} = f_{\underline{s}}, \\ g_{i,p_c} &= f_{\underline{r}} \alpha_{pc} + f_{\underline{p}} \underline{\beta}_{pc}, \\ g_{i,r} &= f_{\underline{r}} \alpha_r + f_{\underline{p}} \underline{\beta}_r + f_{\underline{s}}, \\ g_{i,\Delta \phi} &= 0 \end{aligned} \quad (A1.11)$$

따라서 위 식들에 나타난 \underline{g}' 와 더불어 식 (23)에 나타난 \underline{g} 와 \underline{u} 를 행렬의 형태로 나타내면 식 (26)과 같이 구할 수 있다.

II. 일관된 접선계수 행렬

적분된 응력에 대한 일관된 접선계수는 식 (9)로부터 구해진다. 이때 $(\bullet)' \equiv \partial(\bullet)'/\partial \underline{e}_{n+1}^k, \underline{f}_{n+1} = (f_{\underline{s}})_{n+\delta}$ 로 정의하면 항복면의 미분식을 식 (20a)에 대입함으로써 다음 식이 구해진다.

$$a_1 p' + a_2 p'_c + a_3 r' + a_4 \Delta \phi' = K \underline{1} \quad (A2.1)$$

여기서

$$\begin{aligned} a_1 &= 2K \Delta \phi, \quad a_2 = 1 + a_0, \quad a_3 = -a_0 \alpha_{pc}, \\ a_4 &= -a_0 a_r, \quad a_5 = K f_{\underline{p}} \end{aligned} \quad (A2.2)$$

이다. 또한 식 (20b)는

$$\begin{aligned} & b \underline{s}' + \underline{b}_1 \otimes p'_c + \underline{b}_2 \otimes r' + \underline{b}_3 \otimes \Delta \phi' \\ & = 2G \left(1 - \frac{1}{3} \underline{1} \otimes \underline{1} \right) \end{aligned} \quad (A2.3)$$

과 같이 미분할 수 있고, 여기서

$$\begin{aligned} b_2 &= 1 + b_{0r}, \quad b_3 = -b_0 \beta_{2pc}, \quad b_4 = -b_0 \beta_{3r}, \\ b_5 &= 2Gf_{2r}, \quad b_0 = 6G\delta(\Delta\phi) / m^2, \end{aligned} \quad (A2.4)$$

이다.

마찬가지로 식 (22a)는 다음과 같이 미분되고,

$$c_1 p' + c_3 p' + c_4 r' + c_5 \Delta\phi' = 0 \quad (A2.5)$$

여기서

$$\begin{aligned} c_1 &= -2c_0 \Delta\phi, \quad c_3 = -c_1 \alpha_{2pc}, \quad c_4 = 1 - c_1 \alpha_{3r}, \\ c_5 &= -c_0 f_{2r}, \quad c_0 = \theta p_c \end{aligned} \quad (A2.6)$$

이며 식 (22b)의 미분항은

$$d_2 \underline{e} \cdot \underline{s}' + d_3 p' + d_4 r' + d_5 \Delta\phi' = 0 \quad (A2.7)$$

이고 이때 나타나는 계수들은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} d_2 &= d_0, \quad d_3 = -\psi_{2pc} - d_0 \underline{e} \cdot \underline{\beta}_{2pc}, \\ d_4 &= -\psi_{3r} - d_0 \underline{e} \cdot \underline{\beta}_{3r} \end{aligned} \quad (A2.8)$$

$$d_5 = \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{\underline{e}}{\|\underline{e}\|} \cdot \underline{f}_{2r}, \quad d_0 = \frac{\sqrt{6}\Delta\phi}{m^2 \|\underline{e}\|}$$

마지막으로 식 (10b)는 다음과 같이 미분할 수 있다.

$$e_1 p' + e_2 \cdot \underline{s}' + e_3 p' + e_4 r' = 0 \quad (A2.9)$$

여기서

$$\begin{aligned} e_1 &= f_{2r}, \quad e_2 = f_{3r}, \quad e_3 = f_{32\alpha_{2pc}} + f_{3r} \cdot \underline{\beta}_{2pc}, \\ e_4 &= f_{32\alpha_{3r}} + f_{3r} \cdot \underline{\beta}_{3r} + f_{3r} \end{aligned} \quad (A2.10)$$

따라서 식 (A.2.1~10)을 행렬식으로 나타내면 식 (33)과 같다. 또한 식 (33)을 다음과 같이 정의 할 때

$$[A][x] = [y] \quad (A2.11)$$

2차원 해석의 경우에 [A]는 8x8행렬이며 다음과 같이 나타난다.

$$[A] = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_3 & a_4 & a_5 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 & 0 & (b_3)_1 & (b_4)_1 & (b_5)_1 \\ 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & (b_3)_2 & (b_4)_2 & (b_5)_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_2 & 0 & (b_3)_3 & (b_4)_3 & (b_5)_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_2 & (b_3)_4 & (b_4)_4 & (b_5)_4 \\ c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_3 & c_4 & c_5 \\ 0 & d_2(\underline{e}^p)_1 & d_2(\underline{e}^p)_2 & d_2(\underline{e}^p)_3 & d_2(\underline{e}^p)_4 & d_3 & d_4 & d_5 \\ e_1 & (e_2)_1 & (e_2)_2 & (e_2)_3 & (e_2)_4 & e_3 & e_4 & 0 \end{bmatrix} \quad (A2.12)$$

여기서 $(\bullet)_j$ 는 (\bullet) 의 j번째 성분을 나타낸다. 그리고 변수행렬 $[x] = [\{x_1\}\{x_2\}\{x_3\}\{x_4\}]$ 로 나타낼 때, j번째 열벡터는

$$\{x_j\} = \begin{Bmatrix} p_{rj} \\ s_{rj} \\ p_{cj} \\ r_{rj} \\ \Delta\phi_{rj} \end{Bmatrix}, \quad j=1, \dots, 4 \quad (A2.13)$$

이다. 이때 기지값은

$$[y] = [\{y_1\}\{y_2\}\{y_3\}\{y_4\}] = \begin{bmatrix} K & K & K & 0 \\ \frac{4}{3}G & \frac{2}{3}G & \frac{2}{3}G & 0 \\ \frac{2}{3}G & \frac{4}{3}G & \frac{2}{3}G & 0 \\ \frac{2}{3}G & \frac{2}{3}G & \frac{4}{3}G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2G \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (A2.14)$$

이다.

결국 다음과 같은 선형계를 풀어야 한다.

$$[A]\{x_i\} = \{y_i\}, \quad i=1, \dots, 4 \quad (A2.15)$$

이로부터 식 (A2.13)의 $p_{rj}, s_{rj} (i=1, \dots, 4)$ 를 구하여 식 (9)의 접선계수 C_{r+1}^* 를 도출할 수 있다.