

# 경계층을 가진 박판구조물의 유한요소 해석을 위한 체눈 디자인

## Mesh Design for the Finite Element Analysis of Thin Structures with Boundary Layers

조 진 래\*  
Cho, Jin-Rae

### 요 약

들보나 아치, 판재 그리고 셸과 같은 박판 구조물의 경계부근의 매우 좁은 영역에는 경계층이 존재하는데, 이 영역에서 해는 급격하게 변화하는 특이 거동을 나타낸다. 유한요소법을 이용하여 이러한 물체의 거동을 해석하는 경우, 이런 특이성을 묘사하기 위해 유한요소 체눈패턴이 대단히 중요한 역할을 한다. 이 논문은 경계층에 대한 이론적 해석과 최적의 체눈패턴을 형성하기 위한 가이드를 제시한다. 또한 이론적인 결과를 입증하는 예제도 소개하고자 한다.

### Abstract

For thin elastic structures such as beams, arches, plates and shells, there may exist the boundary layer in the narrow thin region neighborhood of boundaries, where the solution displays the singular behavior exponentially decaying in the normal direction to the boundary. In the finite element analysis of these structures, finite element mesh patterns have a significant role to capture this singularity. This paper introduces the analytic study of this problem and provides a guideline to construct optimal mesh patterns together with numerical experiments.

**Keywords :** thin elastic structures, boundary layer, singular behavior, finite element method, optimal mesh pattern.

### 1. 서 론

판재나 셸과 같은 박판 탄성 구조물에 대한 유한요소 해석에 있어서, 구조물의 두께가 작아지면

해석결과와 이산오차(discretization error)가 커지는 경우가 있다. 이러한 결과는 두가지의 잘 알려진 현상; 록킹현상(locking effect)과 경계층현상(boundary layer effect)에 기인한다. 하지만

\* 정회원 · 부산대학교 기계공학부, 기계기술 연구소 전임 강사

• 이 논문에 대한 토론을 1997년 3월 31일까지 본 학회에 보내주시면 1997년 6월호에 그 결과를 게재하겠습니다.  
본 연구는 부산대학교 공과대학 국책중점사업재원 학술연구비에 의한 연구임.

이 두현상은 굽힘변형이 지배적(bending-dominated)인 구조물에만 나타나는 특징이 있다.<sup>2,4,6)</sup>

록킹현상은 전통적(standard)인 유한요소법을 사용할 경우, 낮은 근차차수(approximation order)와 성긴 체논(coarse mesh)에서 키르히호프 구속조건(Kirchhoff constraints)에 기인한다. 유한요소법에서 록킹이란 전문용어는 체논 세분화에도 불구하고 이산오차가 감소하지 않거나, 감소하더라도 매우 천천히 줄어드는 현상으로 정의된다. 이 현상에 대해서는 지금까지 많은 연구가 진행되어 왔고, 그에 따라 수학적인 규명과 대처 방안이 있어서 현저한 진보가 있었다.<sup>4,6,9)</sup>

반면에 경계층현상에 대한 연구는 그리 많지 않았지만, Schartz등<sup>5)</sup>에 의한 수학적 해석을 근간으로 하여 조금씩 진척되어 왔다. 이 현상은 구조물의 두께가 줄어들면서 지배 방정식이 두께에 대한 특이 섭동 타원형 경계치 문제(singularly perturbed elliptic boundary value problem)로 되어서, 구조물의 경계에서 법선방향으로 매우 좁은 영역( $\sim t$ )내에서 변위장의 특이 거동에 의하여 발생한다. 따라서 이 좁은 영역에서의 특이 특성을 충분히 묘사해 주지 못하면 해석결과가 큰 오차를 수반한다.

최근에 Arnold<sup>1)</sup>와 Schwab등<sup>6,7)</sup>이 경계층현상을 극복하기 위한 수학적 해석 결과를 발표하였고, 그 결과 hp-유한요소법을 위한 정량적인 가이드를 제시하였다.

이 논문은 최근의 연구결과를 기초로하여 경계층현상에 대한 이론적인 고찰과 수치적인 실험을 통해 굽힘 지배적인 박판 구조물의 유한 요소해석에 있어서 체논 디자인이 해석결과에 얼마나 큰 영향을 미치는가를 살펴본다. 또한, 이러한 물체에 대한 올바른 체논 디자인을 제시하고자 한다.

## 2. 경계층에 대한 이론적 고찰

구조물의 거동은 두께가 줄어들면 전통적인 Kirchhoff Plate 이론으로 접근하지만, 경계부근에서의 복잡한 거동은 이 단순한 이론으로는 설명할 수 없다. 한편 경계층은 구조물의 두께가 줄어들

면서 나타나는 것이지만 경계에서의 특이 거동이 기 때문에 두께방향으로의 변위를 설명할 수 없는 Kirchhoff Plate 이론으로는 해석이 불가능하다. 따라서 경계층 해석을 위하여 본 연구에서는 두께를 고려한 Reissner-Mindlin Plate 이론을 사용하기로 한다.

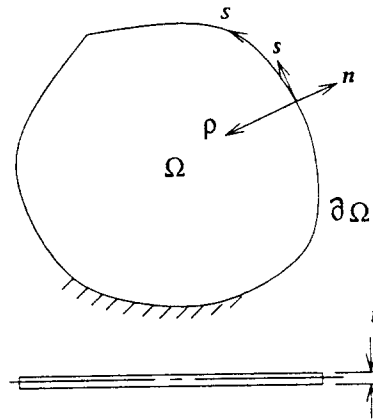


그림 1 얇은 판재의 영역

그림 1은 균일한 두께  $t$ 를 가진 중립면이  $\Omega$ 로 표시된( $R = \Omega \times (-t/2, t/2)$ ) 균질 등방성(homogeneous isotropic) 판재를 나타내고 있다. 중립면의 경계  $\partial\Omega$ 는 매끈하다(smooth)고 가정한다.

Reissner-Mindlin Plate 이론은 세개의 변위 성분  $w, \varphi_x, \varphi_y$ (이후  $\varphi_x, \varphi_y$ 는 벡터  $\varphi$ 로 표기함)을 갖고( $w$ : 중립면의 수직변위,  $\varphi$ : 중립면에 수직한 면의 회전), 다음과 같은 편미방으로 표시된다(자중은 없다고 가정한다).

$$-\frac{D}{2}\{(1-\nu)\Delta\varphi + (1+\nu)\nabla\nabla \cdot \varphi\} - \lambda t^{-2}(\nabla w - \varphi) = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

$$-\lambda t^{-2}\nabla \cdot (\nabla w - \varphi) = g \quad \text{in } \Omega \quad (2)$$

여기서  $D = E/12(1-\nu^2)$ ,  $\lambda = \kappa\mu$ ( $\kappa \sim$  전단 보정계수),  $\nu \sim$  프와송비 그리고  $g$ 는 외부작용 수직 분포 하중이다(여기서  $g$ 는 두께로 보정(scaling)된 값으로 실제 하중은  $gt^3$  임).

위의 식(2)와 키르히호프 조건( $\nabla w_0 = \varphi$ )을 이

용하면, 쉽게 아래의 Kirchhoff Plate 이론을 구할 수 있는데, 분명히 이 biharmonic

$$D\Delta^2 w_0 = g \quad \text{in } \Omega \quad (3)$$

방정식의 해  $w_0$ 는 두께에 무관한 매끄러운 함수이다. 반면에 식(1), (2)로 표현된 Reissner-Mindlin Plate 이론의 해는 두께를 고려한 복잡한 거동을 표현하고 있음을 확인 할 수 있다.

Reissner-Mindlin Plate 이론은 두께  $t$ 에 대한 특이 섭동 타원형 경계치 문제의 해  $(w, \varphi)$ 로서, 다음과 같이 전 영역에서 매끄러운 성분  $(w, \varphi)^S$ 과 경계 부근에 국한된 매끄럽지 못한 특이 성분  $(w, \varphi)^{BL}$ 으로 나눌 수 있다. 이것을 위하여 식 (2)를 식 (1)에 대입하면 다음과 같은  $w$ 에 대한 biharmonic 방정식을 쉽게 구할 수 있고, 이 결과로부터  $w$

$$D\Delta^2 w = g - \lambda^{-1} t^2 D\Delta g \quad \text{in } \Omega \quad (4)$$

는 biharmonic 방정식의 해가 되므로 전 영역에서 매끄러운 함수임을 알 수 있다. 따라서 매끄럽지 못한 경계층 성분은 변위 성분 중 회전성분  $\varphi$ 에 포함 되어있음을 알 수 있다(또한 식(1)로 부터도). 그래서 다음 형태의 성분분해가 가능하다.

$$(w, \varphi) = (w, \varphi)^S + (0, \varphi)^{BL} \quad (5)$$

지금까지의 결과에 기초하여 두께  $t$ 에 대한 점근적 전개(asymptotic expansion)를 이용하여 각 경계조건에 따른 경계에서의 경계층 현상의 차이를 살펴보기로 한다.

$$w = \sum_{i=0}^{\infty} t^i w_i \quad (6)$$

$$\varphi = \sum_{i=0}^{\infty} t^i (\varphi_i + \chi \Phi_i) \quad (7)$$

단,  $w_i = w_i(x, y)$ ,  $\varphi_i = \varphi_i(x, y)$ 로서 두께와 무관한 매끄러운 함수이고,  $\Phi_i = \Phi_i(\rho/t, s)$ 로서 경계를 보정해 주는 함수(boundary layer corrector)로, 다음과 같이 경계를 따라 매끄러운 함수  $C(s)$ 와 경계에서 수직으로는 급격하게 감소하는 함수  $\exp$

$(-\gamma \rho/t)$ 로 표시된다.<sup>8)</sup>

$$\Phi_i = C_i(s) \exp(-\gamma \rho/t) \quad (8)$$

여기서,  $\gamma$ 는 해의 정규도(regularity)에 의존하는 상수로서 0.24~0.29사이의 값이고  $\chi$ 와  $\alpha$ 는 각각 컷오프(cut off) 함수와 구조물의 특성길이를 의미한다.

$$I, \rho \leq \rho_0; \quad 0, \rho > \rho_0 \quad (9)$$

다음으로 공학상으로 관심이 되는 몇 가지의 경계조건들을 나열한다.

$$\text{- 견고한 고정} \quad : \varphi \cdot \mathbf{n} = \varphi \cdot \mathbf{s} = w = 0 \quad (10)$$

$$\text{- 유연한 고정} \quad : \varphi \cdot \mathbf{n} = M_s = w = 0 \quad (11)$$

$$\text{- 견고한 단순지지} \quad : M_n = \varphi \cdot \mathbf{s} = w = 0 \quad (12)$$

$$\text{- 유연한 단순지지} \quad : M_n = M_s = w = 0 \quad (13)$$

$$\text{- 자유지지} \quad : M_n = M_s = Q_n = 0 \quad (14)$$

참고로  $M_n, Q_n$ 는 각각  $\mathbf{n}$  방향으로의 굽힘 모멘트와 전단력이고,  $M_s$ 는  $\mathbf{s}$  방향으로의 굽힘 모멘트이다<sup>3)</sup>. 전개식(6), (7)을 편미방(1), (2)에 대입하여 두께에 대한 차수로 나열하면,  $(w, \varphi)^S$ 와  $(0, \varphi)^{BL}$ 에 대한  $t$ 차수별의 경계치 문제들을 정의할 수 있다.

우선  $(w, \varphi)^S$ 에 대하여 살펴보면, 다음과

$$\frac{D}{2} \{ (1-\nu) \Delta \varphi_{i-2} + (1+\nu) \nabla \nabla \cdot \varphi_{i-2} \} = \lambda (\varphi_i - \nabla w_i) \quad \text{in } \Omega \quad (15)$$

$$\lambda \nabla \cdot (\varphi_i - \nabla w_i) = \delta_{30} g \quad \text{in } \Omega \quad (16)$$

같은 2개의 편미방으로부터  $w_i$  대한 편미방과  $w_i$ 와  $\varphi_i$ 와의 관계식을 얻을 수 있다.

$$D\Delta^2 w_i = \delta_{30} g - \delta_{32} \lambda^{-1} D\Delta g \quad \text{in } \Omega \quad (17)$$

$$\varphi_i = \nabla [w_i + \lambda^{-1} D\Delta w_{i-2} + \delta_{34} \lambda^{-2} Dg] \quad (18)$$

다음으로  $(0, \varphi_i)^{BL}$ 에 대하여는 다음의 편미방 식(19)을 갖게된다. 식(17)은  $w_i$ 만의 선형 편미분

방정식으로서,  $w_0$ 는 Kirchhoff Plate 이론을 만족함을 알 수 있다. 반면에 식(19)는  $\Phi_i$ 에 대한 제차(homogeneous) 선형 편미분 방정식이다.

$$D(1-\nu)\Delta\Phi_{i-2} - 2\lambda\Phi_i = 0 \quad \text{in } \chi\Omega \quad (19)$$

다음으로 식(17)과 (19)로 표현되는 편미분 방정식에 대한  $(w_i, \Phi_i)$ 의 경계조건을 지정하여야 한다. 이것은 (10)~(14)로 주어진 Reissner-Mindlin Plate 이론의 경계조건에 전개식  $w = \sum_{i=0}^{\infty} t^i w_i$ ,  $\varphi = \sum_{i=0}^{\infty} t^i(\varphi_i + \chi\Phi_i)$ 를 대입하여 t의 각 차수에 대한 경계조건을 구하면 된다(여기서,  $\varphi_i$ 는 식(18)을 통하여  $w_i$ 로 표현된다).

하지만 본 논문에서의 주된 관심은 경계층을 표현하는 특이함수  $\Phi_i(s, \gamma a \rho / t, s)$ 이다. 왜냐하면 이 함수의 t에 따른 전개에서 위에 열거한 경계조건에 따라서 지배적인 항(t의 최저차 항)이 어떤 차수인가가 경계층 현상의 강도를 결정짓기 때문이다.

| 경계조건     | 없어지는 항                   |                  |
|----------|--------------------------|------------------|
| 견고한 고정   | $\Phi_0, \Phi_1$         | $\Phi_2 \cdot n$ |
| 유연한 고정   | $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2$ | $\Phi_3 \cdot n$ |
| 견고한 단순지지 | $\Phi_0, \Phi_1$         | $\Phi_2 \cdot n$ |
| 유연한 단순지지 | $\Phi_0$                 | $\Phi_1 \cdot n$ |
| 자유지지     | $\Phi_0$                 | $\Phi_1 \cdot n$ |

각 경계조건에 대한 상세한 수학적 해석은 Arnold 등<sup>1)</sup>의 연구결과를 참고한다. 이 연구결과에 따르면 각 경계조건에 따라서 다음의 저차수 항들이 사라진다. 여기서 흥미로운 사실은  $t^0$  차수의 항은 식(17)에서 보듯이 Kirchhoff Plate 이론으로 표현되고, 이 모델은 경계층을 갖지 않기 때문에<sup>8)</sup> 위에서와 같이 경계조건에 상관없이  $\Phi_0$ 가 상쇄되는 것을 알 수 있다. 또한 위 결과로부터 자유지지와 유연한 단순지지의 경우가 경계층 현상이 가장 심하고, 유연한 고정의 경우가 경계층 현상이 가장 약함을 알 수 있다.

다음으로 hp-유한요소법을 적용할 경우, 최적의 수렴률(convergence rate)을 보장하기 위한 체눈 크기 및 근사차수에 대하여 살펴보고자 한다. 매끈한 함수에 대해서는 기존의 오차-체눈 파라미터(error-mesh parameter) 관계식이 성립한다.

$$\|u - u^{hp}\|_{E(\Omega)} \leq C \frac{h^{\min(r-1,p)}}{p^{r-1}} \|u\|_{E(\Omega)} \quad (20)$$

여기서,  $u$ 는  $u(w, \varphi)$ 이고, r는 해  $u$ 의 정규도를 의미한다. 경계층이 존재하는 경우에는 경계층 함수의 특이성때문에 상수 C가 두께 t에 의존하게 되어, 기존의 균일한 체눈 형태로는 두께에 대하여 식(20)과 같은 균일한 수렴률을 얻을 수 없다.

경계층 함수는 식(8)과 같이 경계를 따라서(s 방향)는 매끈한 함수이므로, 결국 경계층은 경계에 수직( $\rho$  방향)으로의 일차원 문제가 된다. 따라서 경계층을 나타내는 exponential 함수  $e^{-(\gamma a \rho / t)}$ 의 근사를 최적화하기 위한 체눈 크기와 근사차수를 구하는 문제로 된다. 이것에 관하여 Schwab 등<sup>6)</sup>의 수학적 연구를 참고하면, 경계요소의 경계로부터 법선 방향으로의 체눈의 크기는 ( $\sim O(\rho t)$ )로 밝혀졌다.

### 3. 수치적 결과

여러 가지 예제들 중에서 본 논문에서는 공학상으로 가장 기본적이고, 또한 이론적 정해가 가능한 그림 2와 같은 판재를 고려한다.

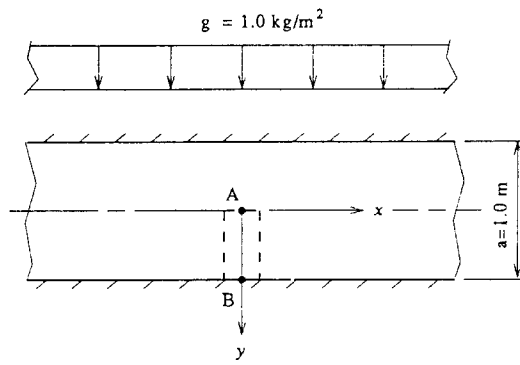


그림 2 양측면이 고정되고 윗면에 균일 분포하중이 작용하는 semi-infinite 판재

그림 2는 x축 방향으로 길이가 무한대이며 y축 방향으로 폭이 a, 폭에 대한 두께비 t/a=0.01인 판재를 보여준다. 경계조건은 y축의 양면이 고정(clamped)되어 있고 균일 분포하중 g가 윗면에 작용하고 있다. 이 문제의 해는 x축으로는 불변이므로 y축 방향으로의 역학적 해석이 기초 틀보 이론(elementary beam theory)에 의하여 가능하기 때문에 수치적 결과를 이론적인 정해와 비교할 수 있다.

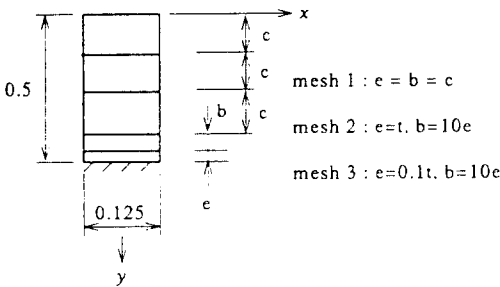


그림 3 유한요소 해석을 위한 세가지 체네패턴

유한요소 해석을 위하여 그림 3과 같이 체네패턴을 구성하였는데, 이것은 그림 2에서 심선으로 표시한 영역을 잡은 것으로서 경계조건은 그림에서와 같이 3면이 대칭이고 다른 한면은 고정이다. 5개의 유한요소(3개의 균일한 유한요소와 2개의 얇고 긴 유한요소)로 구성된 3개의 다른 체네패턴을 설정하여, 각 패턴에 따라서 수치결과가 어떻게 나타나는지를 살펴 보고자 한다. 유한요소 형상함수(shape function)는 3차원 계층적 형상함수를 사용하였고, 두께방향으로의 근사차수  $p_2$ 는 5로 일정하게 설정하고 종립면에서의 근사차수  $p_0$ (이하  $p_0$ 로 표시)는 2~5로 설정하였다.

이러한 구조물의 유한요소 해석에 있어서 공학상으로 중요한 관심은 해석자에 따라서 달라지겠지만, 일반적으로 가장 관심이 되는 것은 최대응력이 발생하는 곳과 그 곳에서의 최대 응력치이다. 따라서 아래와 같이 정의된 합응력(stress resultants)  $N_{x\beta}$ ,  $Q_{x\beta}$ ,  $M_{x\beta}$ 을 계산하여 실제 이론치와 비교함으로써, 체네패턴 디자인 및 근사차수  $p$ 가 결과에 미치는 영향을 살펴 보고자 한다.

$$\left. \begin{aligned} N_{x\beta} &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{x\beta} dz \\ Q_x &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{xz} dz \\ M_{x\beta} &= \int_{-t/2}^{t/2} Z\sigma_{x\beta} dz \end{aligned} \right\} (\alpha, \beta = x, y) \quad (21)$$

수치결과 가운데  $N_y$ ,  $Q_y$ ,  $M_y$ 를 체네패턴과 근사오차  $p$ 에 대하여 다음의 각 표와 그래프에 기록하였다.

표 1 A점에서의 합응력의 체네패턴과 p에 대한 변화

|   | p                                   | mesh 1 | mesh 2  | mesh 3  |
|---|-------------------------------------|--------|---------|---------|
| $N_y$<br>( $\text{kg}/\text{m}^2 \times 10^{-2}$ )                | 2                                   | 2.0974 | 2.1376  | 2.1378  |
|   | 3                                   | 2.1182 | 2.1379  | 2.1381  |
|   | 4                                   | 2.1271 | 2.1380  | 2.1381  |
|   | 5                                   | 2.1316 | 2.1380  | 2.1381  |
|   | 6                                   | 2.1342 | 2.1381  | 2.1381  |
|   | $Q_y$<br>( $\text{kg}/\text{m}^2$ ) | 2      | -0.2529 | -0.1311 |
| 3   |                                     | 0.0866 | 0.1311  | 0.1695  |
| 4   |                                     | 0.0    | 0.0     | 0.0     |
| 5   |                                     | 0.0    | 0.0     | 0.0     |
| 6   |                                     | 0.0    | 0.0     | 0.0     |
| $M_y$<br>( $\text{kg} \cdot \text{m}/\text{m}^2 \times 10^{-1}$ ) |                                     | 2      | 4.0432  | 3.9647  |
|   | 3                                   | 4.2066 | 4.2896  | 4.3636  |
|   | 4                                   | 4.1532 | 4.1648  | 4.1651  |
|   | 5                                   | 4.1576 | 4.1650  | 4.1651  |
|   | 6                                   | 4.1602 | 4.1651  | 4.1651  |

표 2 B점에서의 합응력의 체네패턴과 p에 대한 변화

|   | p                                   | mesh 1  | mesh 2  | mesh 3  |
|---|-------------------------------------|---------|---------|---------|
| $N_y$<br>( $\text{kg}/\text{m}^2 \times 10^{-2}$ )                | 2                                   | 1.1240  | 1.4519  | 2.0260  |
|   | 3                                   | 1.3605  | 1.8162  | 2.1041  |
|   | 4                                   | 1.5191  | 2.0041  | 2.1268  |
|   | 5                                   | 1.6385  | 2.0709  | 2.1353  |
|   | 6                                   | 1.7357  | 2.0918  | 2.1381  |
|   | $Q_y$<br>( $\text{kg}/\text{m}^2$ ) | 2       | -2.1400 | -0.3611 |
| 3   |                                     | 0.0367  | -0.5082 | -0.5108 |
| 4   |                                     | 0.0351  | -0.5893 | -0.5012 |
| 5   |                                     | -0.0706 | -0.5795 | -0.5001 |
| 6   |                                     | -0.1685 | -0.5454 | -0.5001 |
| $M_y$<br>( $\text{kg} \cdot \text{m}/\text{m}^2 \times 10^{-1}$ ) |                                     | 2       | -7.4804 | -9.2650 |
|   | 3                                   | -9.4225 | -8.8316 | -8.3842 |
|   | 4                                   | -9.2026 | -8.6455 | -8.3447 |
|   | 5                                   | -9.0037 | -8.5212 | -8.3365 |
|   | 6                                   | -8.8864 | -8.4481 | -8.3365 |

참고로 기초 돌보이론에 의한 이론치는 A점에서  $Q_y=0 \text{ kg/m}^2$ ,  $M_y=1/24 \text{ kg} \cdot \text{m/m}^2$ , B점에서  $Q_y=-1/2 \text{ kg/m}^2$ ,  $M_y=-1/12 \text{ kg} \cdot \text{m/m}^2$ 이다. 표 1에서 A점에서의 각 체눈패턴에 대한 결과들이 거의 차이를 나타내지 않지만, 표 2, 즉 B점에 있어서는, 체눈패턴에 따라서 현저한 차이가 있음을 알 수 있다. 균일한 체눈패턴(패턴 1)은 경계에서 근사차수 p가 증가하여도 정확한 값에서 상당히 벗어난 결과를 보여주는 반면, 비균일 체눈패턴(패턴 2, 3)들은 근사차수의 증가와 더불어 이론치에 매우 가까운 결과를 나타낸다. 따라서 경계층에서의 정확한 구조해석을 위해서는 균일한 체눈패턴 대신에 비균일한 체눈패턴을 사용하여 함을 확인할 수 있다.

다음의 그림 7, 8 그리고 9는 세가지 체눈패턴에

대한 결과의 y축 방향으로의 함응력을 그래프로 나타낸 것이다(이 경우 근사차수 p는 4이다).

세 그래프에서 보듯이 균일한 체눈패턴에 대해서 결과가 매우 벗어남을 알 수 있는 반면, 비균일한 체눈패턴에 대하여는 경계 근처의 매우 좁은 영역에서만 조금의 오차를 보여주고 있다.

따라서 경계에서의 경계 유한요소(boundary element)의 크기(경계로부터의 수직거리)에 따라서 해석결과가 매우 달라짐을 알 수 있고, 또한 이 크기가 경계 부분이 아닌 물체 내부의 결과에도 큰 영향을 미침을 알 수 있다.

다른 한편, 중립면의 근사차수가 증가하면 해석정도도 증가하지만, 균일 체눈패턴은 여전히 큰 오차를 가짐을 볼 수 있다.

결과적으로 경계층을 가지는 박판 구조물의 정

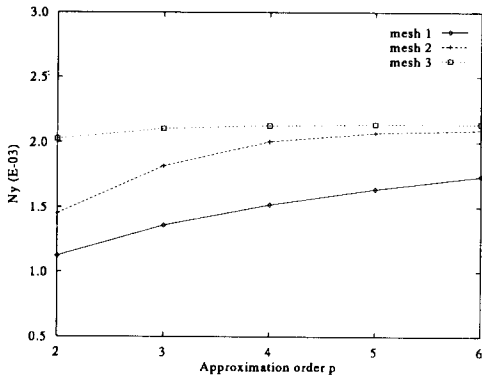


그림 4 B점에서의 함응력  $N_y$

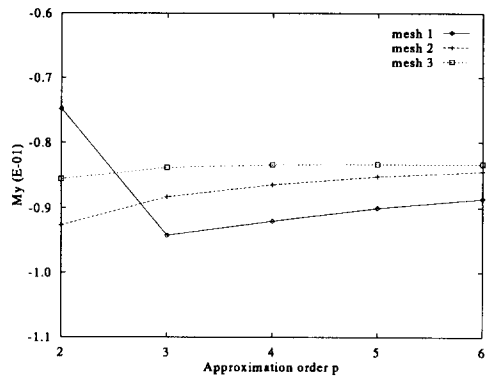


그림 6 B점에서의 모멘트  $M_y$

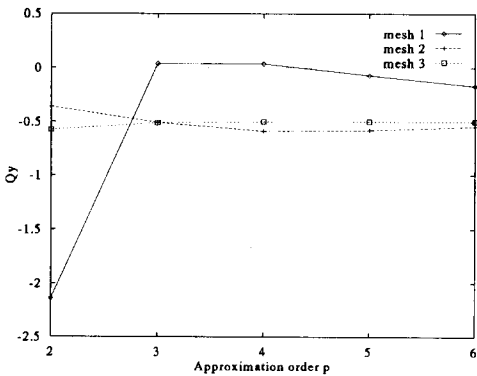


그림 5 B점에서의 함응력  $Q_y$

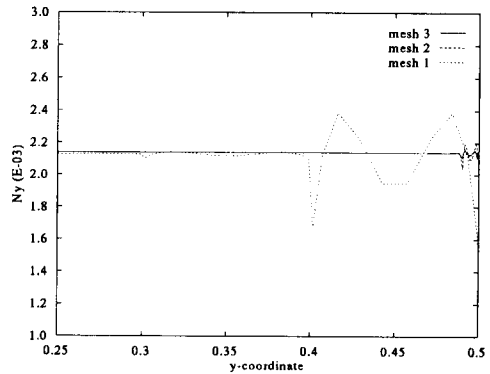


그림 7 y축으로의 함응력  $N_y(p=4)$

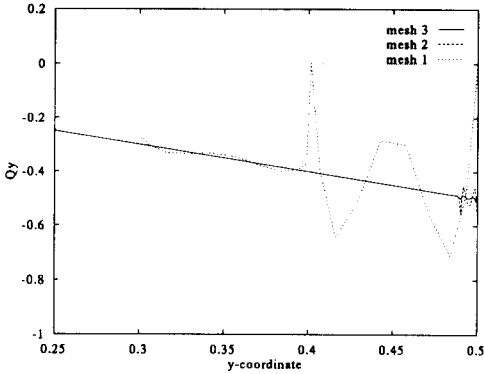


그림 8 y축으로의 합응력  $Q_y(p=4)$

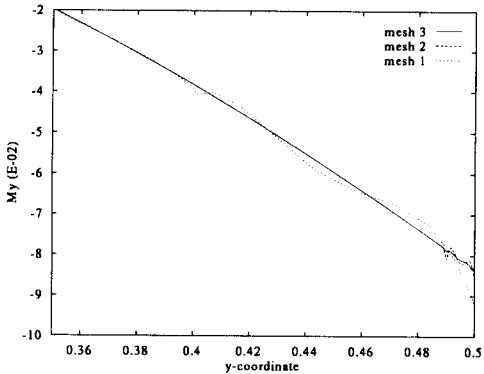


그림 9 y축으로의 모멘트  $M_y(p=4)$

확한 해석을 위한 경계에서의 첫 유한요소의 형태는 경계를 따라서 얇고 긴(thin narrow) 형상의 것이 효율적이다.

마지막 두 그림 10, 11은 경계층현상을 고려한 효과적인 체눈패턴을 보여주는 예로서, 만일 균일한 체눈을 이용한다면 엄청난 유한요소들을 필요로 하게 된다. 비록 일반적인 균일 체눈패턴을 이용한 해석결과가 에너지기준(energy norm)  $\|e\|_{E(\Omega)}$ 을 만족할지라도(왜냐하면 경계층에 의하여 발생하는 오차영역은 매우 좁기 때문), 합응력의 각 위치상의  $L^x(R(e))$  기준 오차에서 본다면, 경계부근에서 큰 오차를 나타낸다.

$$\|e\|_{E(\Omega)} = (\int_{\Omega} \epsilon^T(e) \sigma(e) d\Omega)^{1/2} \quad (22)$$

$$L^x(R(e)) = \max_{\Omega} |(N_{\alpha\beta}(e), Q_{\alpha}(e), M_{\alpha\beta}(e))| \quad (23)$$

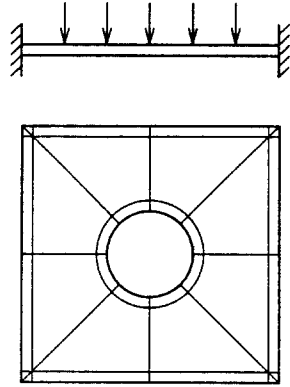


그림 10 중앙에 hole을 가진 정방형 판재를 위한 비균일 체눈패턴

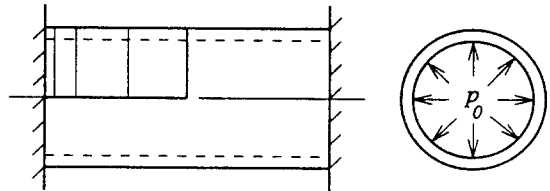


그림 11 균일한 내압  $p_0$ 을 받는 원통형 용기를 위한 비균일 체눈패턴

비록 큰 오차( $L^x(R(e))$ 로 측정한다)를 가진 영역이 매우 작을지라도 이 오차가 공학상의 구조해석에 있어서 치명적인 결과를 낳는다는 것은 자명한 사실이다. 왜냐하면, 구조물 파괴의 대부분은 이러한 경계부근에서의 큰 응력에 의하여 발생하기 때문이다. 따라서 경계에서의 유한요소의 체눈크기가 해석에 매우 결정적인 역할을 함은 확실하다.

물론 균일 체눈패턴으로도 체눈크기를 계속 줄여나가다 보면 보다 나은 해석 결과를 얻을지만, 그렇게 되면 필요 이상으로 많은 자유도를 갖게 되어 해석상 많은 시간과 경비를 요하게 되어 비효율적이다.

#### 4. 결 론

본 연구에서 우리는 박판 구조물의 경계층현상

의 이론적 고찰과 유한요소 해석을 위한 최적의 체논패턴 형성에 대하여 살펴 보았다.

본 연구 결과로부터 경계층을 가진 문제 해석을 위해서는 본 연구에서 제시한 체논크기( $\sim O(pt)$ )를 가진 경계 유한요소를 사용한 비균일 체논패턴이 최적임을 알았다. 더욱이 경계에 접선방향으로의 유한요소 크기는 큰 영향을 미치지 않음도 알았다.

하지만 자동으로 오차를 평가하고 최적의 체논패턴을 제공하는 hp-유한요소 프로그램에 적용하기 위해서는 합응력에 대한  $L^\infty$  오차 평가방법의 개발과 초기 체논 형성시 자동적으로 경계유한요소를 설정하는 일등이 향후 연구과제로 남아있다.

### 참 고 문 헌

1. Arnold, D.N. and Falk, R.S., "Asymptotic Analysis of The Boundary Layer for The Reissner-Mindlin Plate Model," *SIAM J. Mathematical Analysis*, Vol.27, No.2, 1996, pp.486-514.
2. Cho, J.R., "An *hpq*-Adaptive Finite Element Method for Hierarchical Modeling of Elastic Structures," Ph.D. Dissertation, The University of Texas at Austin, 1995.
3. Huang, H.C. *Static and Dynamic Analyses of Plates and Shells*, Springer-Verlag, 1988.
4. Pitkäranta, J., "The Problem of Membrane Locking in Finite Element Analysis of Cylindrical Shells," *Numerische Mathematik*, 61, 1992, pp.523-542.
5. Schatz, A.H. and Wahlbin, L.B., "On The Finite Element Method for Singularly Perturbed Reaction-Diffusion Problems in Two and One Dimensions," *Mathematics and Computation*, 40, 1983, pp.47-89.
6. Schwab, C. and Suri, M., "Locking and Boundary Layer Effects in The Finite Element Approximation of The Reissner-Mindlin Plate Model," *Proc. of Symposia in Applied Mathematics*, Vol.48, 1994, pp.367-371.
7. Schwab, C. and Suri, M., "The *p* and *hp* Versions of The Finite Element Method for Problems with Boundary Layers," *Research Report SUR95-01*, University of Maryland, Baltimore County, 1995.
8. Szabó, B. and Babuška, I., *Finite Element Analysis*, John Wiley, 1991.
9. Zhang, Z., "Locking and Robustness in the Finite Element Method for Circular Arch Problem," *Numerische Mathematik*, 69, 1995, pp. 509-522.

(접수일자 : 1996. 8. 16)