

# 얇은 탄성 구조물을 위한 계층적 모델에서의 후 록킹인식

## A Posteriori Detection of Locking in Hierarchical Models for Thin Elastic Structures

조진래\*  
Cho, Jin-Rae

---

### 요약

전통적인 유한요소법을 이용하여 얇은 탄성 구조물을 해석하는 경우, 전단 및 막 록킹에 의하여 해석 결과의 품질이 저하될 수 있다. 더욱이 수치결과의 록킹발생 여부를 다른 참고할만한 자료와 비교하지 않고 감지한다는 것은 그다지 쉽지 않다. 본 논문은 록킹에 대한 이론적 해석과 더불어 후 록킹인식을 위한 신뢰성이 있는 한가지 간단한 방법을 소개하고자 한다. 또한 이론적인 결과를 입증하기 위한 수치결과도 주어져 있다.

### Abstract

In the analysis of thin elastic structures such as beam-, arch-, plate- and shell-like bodies using standard finite element schemes, there may occur deterioration of approximation quality owing to shear and membrane lockings. Moreover, a recognition of this phenomenon in the computed numerical results is not easy without comparing with other available reference numerical data. This paper analyses briefly this phenomenon and introduces one inexpensive but reliable *a posteriori* locking detection method. Numerical examples are given supporting the theoretical results.

**Keywords :** thin elastic structures, finite element method, locking phenomenon, *a posteriori* detection, bending dominance

---

### 1. 서론

전통적인 유한요소법을 이용하여 얇은 탄성 구조물을 해석하는 경우, 록킹현상(locking phenomenon)에 의한 해석 정확도의 저하가 발생할 수

있다. 이러한 현상은 충분치 못한 유한요소 공간(저 근사차수(low approximation order)와 성긴 체논(coarse mesh))내에서 잘 알려져 있는 전단 및 막 구속조건(shear and membrane constraints)이 두께감소에 따라 현저해짐에 기인한다.

---

\* 정희원 · 부산대학교 기계공학부, 기계기술 연구소 전임 강사

---

• 이 논문에 대한 토론을 1997년 3월 31일까지 본 학회에 보내주시면 1997년 6월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

본 연구는 부산대학교 공과대학 국책중점사업지원 학술연구비에 의한 연구임.

이 문제에 대한 수많은 연구 발표가 진행되어 왔고, 그 결과 수학적 해석과 대처방안에 있어서 현저한 진척이 있었다. 더욱이 최근에 와서 Pitkäranta<sup>1)</sup>에 의하여 록킹은 휨 변형이 지배적인 (bending-dominated) 문제에서만 발생함을, 그리고 Suri등<sup>2)</sup>에 의하여 이 현상은 변위장의 두께방향으로의 차수증가와 무관한 특성을 지니고 있음이 밝혀졌다(즉, 고차 모델도 Reissner-Mindlin 이론과 동일).

비록 록킹에 대한 해석과 대처방안에 대하여 많은 진전이 있었지만 또 다른 중요한 관심사인 후 록킹 감지(a posteriori locking detection)에 대하여는 거의 언급되지 않았다.

현실적으로, 계산된 수치결과와 록킹 발생여부를 다른 참고수치와 비교하지 않고 판단하는 일은 쉽지않다.

본 논문은 위에서 언급한 최근의 연구결과에 기초하여 후 록킹 감지를 위한 간편하고도 신뢰성 높은 한 방법을 제안하고자 한다. 이 방법은 유한요소 프로그램내에 간단한 서브루틴의 추가만으로 가능하다.

## 2. 계층적 모델의 공식화

그림 1은 평판과 같은 구조물을 보여주고 있는데 ( $\Omega = \omega \times [-d/2, d/2]$ ), 중립면이  $\omega \in \mathbb{R}^2$ 로 그리고 중립면의 경계는  $\partial\omega$ 로 표시되어 있다. 이와

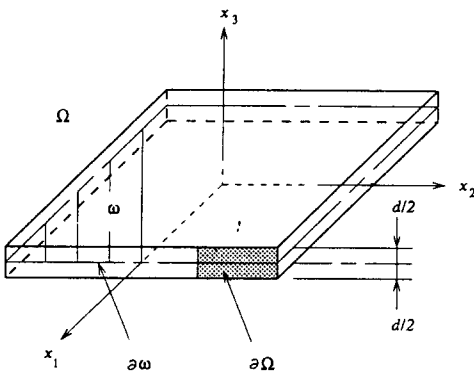


그림 1 평판과 같은 구조물의 형상

같은 구조물의 두께는 다른 두변의 길이에 비해 상대적으로 작기 때문에, 변위장의 두께 방향으로의 변화를 Kirchhoff, Reissner-Mindlin 이론과 같이 저차수 다항식으로 근사시켜 왔다.

그러나 응력상태가 복잡한 영역에서는 이러한 저차이론으로는 물체의 거동을 적절히 설명할 수 없다. 그러나 1990년 전후로 하여 Szabó, Babuška등<sup>3,4,5)</sup>에 의하여 원하는 정확도를 만족시키는 모델을 자동으로 선정해 주는 계층적 모델링(hierarchical modeling)이란 새로운 모델링 기법이 소개되었다. 또한 최근에 적절한 모델을 순응적(adaptively)으로 선택하는 기법이 Cho<sup>6)</sup>와 Oden<sup>7)</sup>에 의하여 개발되었다. 계층적 모델링에 있어서 변위 성분은 다음과 같이 표현된다.<sup>6)</sup>

$$u_i^h(x_1, x_2, x_3) = \sum_{\ell=0}^{q_i} U_i^\ell(x_1, x_2) P_\ell(x_3), \quad i=1,2,3(1)$$

여기서  $q_i$ 는 두께 방향으로의 다항식  $P_\ell(x_3)$ 의 최대 차수들을 의미하고,  $U_i^\ell(x_1, x_2)$ 는 각 차수에 대한 변위성분  $i$ 의 중립면에서의 함수이다. 따라서 차수  $q_i$ 의 선택으로 특정한  $(q_1, q_2, q_3)$  모델을 지정할 수 있다. 본 연구에서는 다항식  $P_\ell(x_3)$ 로 단항식  $(x_3)^\ell$ 을 사용한다.

다음으로 3차원 선형 탄성이론으로부터 모델 차수  $\mathbf{q}=(q_1, q_2, q_3)$ 를 가진 계층적 모델을 구하는 과정을 설명하고자 한다. 3차원 선형 탄성이론은 식 (2)로 표현된다.

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(\mathbf{u})_{,j} + f_i &= 0 \text{ in } \omega \times [-d/2, d/2] \\ u_i &= 0 \text{ on } \partial\omega_D \times [-d/2, d/2] \\ \sigma_{ij}(\mathbf{u})n_j &= t_i \text{ on } \Gamma_N \end{aligned} \quad (2)$$

여기서  $f_i \in H^1(\Omega)$  ( $H^1(\Omega)$  ~ Hilbert space)<sup>8)</sup>는 자중을  $\partial\omega_D$ 는 Dirichlet 경계 영역을 나타낸다. 그리고  $\Gamma_N$ 은 외부 응력  $t_i \in L^2(\Gamma_N)$  ( $L^2(\Gamma_N)$  ~ square integrable function space)<sup>8)</sup>이 작용하는 Neumann 경계영역으로서, 일반적으로 평판의 윗면과 아랫면이다.

3차원 선형 탄성 이론의 변분 공식화(varia-

tional formulation)를 위하여 유한한 변형 에너지를 갖는 허용 변위 공간(admissible displacement space)을 다음과 같이 정의한다.

$$V(\Omega) = \left\{ v_i \in [H^1(\omega \times [-d/2, d/2])]: v_i = 0 \text{ on } \partial\omega_D \times [-d/2, d/2] \right\} \quad (3)$$

식(1)에서 정의된  $\mathbf{u}^q$ 가  $V(\Omega)$ 에 속하기 위해서는 다음의 조건만 만족하면 되는데, 이에 대한 보다 상세한 내용은 Cho<sup>6)</sup>를 참조하기 바란다.

$$U_i^\ell \in H^1(\omega), U_i^\ell = 0 \text{ on } \partial\omega_D, 0 \leq \ell \leq q_i \quad (4)$$

식(4)의 조건으로부터 계층적 모델을 위한 허용 변위공간  $V^q(\Omega) \subset V(\Omega)$ 을 다음과 같이 정의한다.

$$V^q(\Omega) = \left\{ v_i^q = \sum_{\ell=0}^{q_i} V_i^\ell(x_1, x_2) P_\ell(x_3) \mid V_i^\ell \in H^1(\Omega), V_i^\ell = 0 \text{ on } \partial\omega_D \right\} \quad (5)$$

여기서 선경계  $\partial\omega_D$ 를 따라서  $V_i^\ell=0$ 는  $H^1(\Omega)$ 공간에 부적합한 것으로 사료될지 모르나,  $V_i^\ell P_\ell=0$ 로 선경계에 대한 경계조건이 아니라 면경계에 대한 경계조건이 됨을 밝혀둔다.

식(5)의 정의를 이용하면 다음의 차원 감소형(dimensionally-reduced) 변분공식을 얻게 된다.

식(6)을 만족하는  $\mathbf{u}^q \in V^q(\Omega)$ 를 구하시오.

$$a(\mathbf{u}^q, \mathbf{v}^q) = \ell(\mathbf{v}^q) \quad \forall \mathbf{v}^q \in V^q(\Omega) \quad (6)$$

여기서, 쌍선형 범함수(bilinear functional)  $a: V^q(\Omega) \times V^q(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ 와 선형 범함수(linear functional)  $\ell: V^q(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ 는 각각 다음과 같이 표현된다.

$$a(\mathbf{u}^q, \mathbf{v}^q) = \int_\omega \left[ \int_{-d/2}^{d/2} \sigma(\mathbf{u}^q) : \varepsilon(\mathbf{v}^q) dx_3 \right] d\omega \quad (7)$$

$$\ell(\mathbf{v}^q) = \int_\omega \left[ \int_{-d/2}^{d/2} v^{qT} \mathbf{f} dx_3 \right] d\omega + \int_{\Omega_N^-} \mathbf{v}^{qT} \mathbf{t}^- d\omega + \int_{\Omega_N^+} v^{qT} \mathbf{t}^+ d\omega \quad (8)$$

이 범함수에서, 응력  $\sigma_{ij}$ 와 변형  $\varepsilon_{ij}$ 는 3차원 선형 탄성 물질상수 행렬  $[E]$ <sup>3)</sup>로 구성되고, 위/아래 첨

자는 각각 판재의 윗면  $\partial\Omega^+$  과 아랫면  $\partial\Omega^-$ 에서의 값이다.

식(6)의 해  $\mathbf{u}^q$ 는 3차원 선형 탄성 이론  $\mathbf{u}$ 의 부분공간  $V^q(\Omega)$  내에서의 에너지 투영(energy projection)으로 정의된다.<sup>6,7)</sup>

$$a(\mathbf{u} - \mathbf{u}^q, \mathbf{v}^q) = 0 \quad \forall \mathbf{v}^q \in V^q \quad (9)$$

여기서  $(q_1, q_2, q_3)$  계층적 모델을 모델차수

$\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$ 를 가진  $\mathbf{u}$ 에 대한 차원 감소형 근사해(dimensionally-reduced approximate solution)  $\mathbf{u}^q$ 로 정의한다.

두께가 매우 작아지면( $d \rightarrow 0$ ), (1,1,0) 모델(즉, 두께방향으로  $u_1, u_2$ 는 일차함수이고  $u_3$ 는 상수인 모델)을 제외한 모든 계층적 모델들은 전통적인 Kirchhoff 판 이론에 접근한다<sup>3)</sup>(단, 경계에서와 같이 응력상태가 복잡한 영역은 제외). 두께가 감소하면 판재는 평면응력(plane stress) 문제로 되는 반면, (1,1,0)모델은 평면변형(plane strain) 상태를 나타내므로 모순이고, 그 결과 (1,1,0)모델은 Kirchhoff 판 이론으로 접근하지 않는다. 그러나 물질상수 행렬  $[E]$ 을 Reissner-Mindlin판 이론에서 사용되는 물질상수 행렬  $[E^{RM}]$ 로 대체하면 (1,1,0)모델도 같은 극한으로 접근한다.

본 논문에서는  $[E^{RM}]$ 을 사용하여 얻은 (1,1,0) 모델을 (1,1,0)\* 모델로 표기하기로 한다.

계층적 모델에 유한요소법을 적용할 때, 식(7)과 (8)에서 보는 바와 같이 두께 방향으로의 다항식을 적분하면 된다. 따라서 유한요소는 중립면에서의 2차원 문제가 된다. 즉, 식(6)의 문제에 대한 유한요소 근사는 계수  $U_i^\ell(x_1, x_2)$ 의 근사를 구하는 문제로 된다. 유한요소  $\Omega_K$ 에 대한  $\mathbf{v}^q \in V^q(\Omega)$ 의 한정(restriction)을 다음과 같이 표시한다.

$$\mathbf{v}^q|_{\Omega_K} = \mathbf{v}^q_K \in V^q(\Omega_K) \quad (10)$$

따라서 지역(local) 유한요소 근사해

$\mathbf{v}^q_K = \mathbf{v}^{q,h}|_{\Omega_K}$ 는 두 공간의 곱공간(product space)  $V^{q,h}(\Omega_K)$ 에 속한다.

$$V^{q,h}(\Omega_K) = P_K(\omega_K) \times Q_K(-d/2, d/2) \quad (11)$$

여기서  $P_K(\omega_K)$ 는 중립면에서 근사차수가  $p_K$ 인 단항식 공간이고,  $Q_K(-d/2, d/2)$ 는 차수가  $q_K$ 인 두께방향의 다항식 공간을 나타낸다.

전영역의 유한요소 근사해  $\mathbf{v}^{q,h} \in V^{q,h}(\Omega)$ 가 유한한 변형 에너지를 갖기 위해서 전역 근사(global approximation)  $\mathbf{v}^{q,h}$ 는 반드시 인접 유한요소들 간의 경계에서 연속이어야 한다(즉,  $\mathbf{v}^{q,h} \in C^0(\bar{\Omega})$ )<sup>3</sup>). 이때 식(6)의 문제에 대한 유한요소 근사식은 다음과 같다.

식(12)를 만족하는  $\mathbf{u}^{q,h} \in V^{q,h}(\Omega)$ 를 구하고자 한다.

$$a(\mathbf{u}^{q,h}, \mathbf{v}^{q,h}) = \ell(\mathbf{v}^{q,h}) \quad \forall \mathbf{v}^{q,h} \in V^{q,h}(\Omega) \quad (12)$$

### 3. 계층적 모델에서의 록킹

본 절에서는 계층적 모델에 있어서의 전단 및 막 록킹에 대하여 살펴보고자 한다. 이 해석결과를 기초로 하여 다음 절에서는 간단하고도 신뢰성이 있는 후 록킹감지 방법을 유도하기로 한다.

록킹현상을 해석하기 위하여 막(membrane), 휨(bending) 그리고 횡전단(transverse shear) 변형을  $\varepsilon^m, \varepsilon^b, \varepsilon^s$ 로 각각 표기하기로 한다. 해석을 위하여 위/아랫면에 각각 같은 크기의 법선응력  $g_N$ 이 작용하는 원통형 쉘(cylindrical shell)을 고려한다. 극좌표계를 이용하되  $x_1$ 은 축방향으로  $x_2, x_3$ 는 각각 원주방향과 반경방향으로 잡는다. ( $q_1, q_2, q_3$ ) 계층적 모델에 대한 위의 세 변형들은 다음과 같이 표현된다( $\alpha, \beta=1, 2, k=1, 2, 3, P_\ell = d P_\ell / dx_3$ ).

(i) 막 변형 :  $\{\beta_{\alpha\beta}^\ell, \beta_{33}^\ell\}$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta}^m &= \frac{1}{2}(\mathcal{u}_{\alpha,\beta}^\ell + \mathcal{u}_{\beta,\alpha}^\ell)_{even} + \delta_{\alpha 2} \delta_{\beta 2} \left(\frac{\mathcal{u}_3^\ell}{R}\right)_{even} \\ &= \frac{1}{2} \left( \sum_{\ell=0,2,\dots}^{q_1} U_{\alpha,\beta}^\ell + \sum_{\ell=0,2,\dots}^{q_1} U_{\beta,\alpha}^\ell \right) P_\ell \\ &\quad + \delta_{\alpha 2} \delta_{\beta 2} \sum_{\ell=0,2,\dots}^{q_1} \frac{U_3^\ell}{R} P_\ell = \sum_{\ell=0,2,\dots}^{q_1} \beta_{\alpha\beta}^\ell P_\ell \quad (13) \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{33}^m = \sum_{\ell=0,2,\dots}^{q_1} \beta_{33}^\ell P_\ell, \quad \beta_{33}^\ell = U_3^{\ell+1} \text{coef}(P_{\ell+1})$$

(ii) 휨 변형 :  $\{\kappa_{\alpha,\beta}^\ell, \kappa_{33}^\ell\}$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta}^b &= \frac{1}{2}(\mathcal{u}_{\alpha,\beta}^\ell + \mathcal{u}_{\beta,\alpha}^\ell)_{odd} + \delta_{\alpha 2} \delta_{\beta 2} \left(\frac{\mathcal{u}_3^\ell}{R}\right)_{odd} \\ &= \frac{1}{2} \left( \sum_{\ell=1,3,\dots}^{q_1} U_{\alpha,\beta}^\ell + \sum_{\ell=1,3,\dots}^{q_1} U_{\beta,\alpha}^\ell \right) P_\ell \\ &\quad + \delta_{\alpha 2} \delta_{\beta 2} \sum_{\ell=1,3,\dots}^{q_1} \frac{U_3^\ell}{R} P_\ell = \sum_{\ell=1,3,\dots}^{q_1} \kappa_{\alpha\beta}^\ell P_\ell \quad (14) \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{33}^b = \sum_{\ell=1,3,\dots}^{q_1} \kappa_{33}^\ell P_\ell, \quad \kappa_{33}^\ell = U_3^{\ell+1} \text{coef}(P_{\ell+1})$$

(iii) 횡전단 변형 :  $\{\rho_x^\ell\}$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{3\alpha}^s &= \frac{1}{2}(\mathcal{u}_{\alpha,3}^\ell + \mathcal{u}_{3,\alpha}^\ell) + \delta_{\alpha 2} \frac{\mathcal{u}_3^\ell}{R} \\ &= \frac{1}{2} \left( \sum_{\ell=0,1,2,\dots}^{q_1} U_{\alpha}^\ell P_\ell + \sum_{\ell=0,1,2,\dots}^{q_1} U_{3,\alpha}^\ell P_\ell \right) \\ &\quad + \delta_{\alpha 2} \sum_{\ell=0,1,2,\dots}^{q_1} \frac{U_3^\ell}{R} P_\ell \\ \rho_x^\ell &= U_{\alpha}^{\ell+1} \text{coef}(P_{\ell+1}) + U_{3,\alpha}^\ell + \delta_{\alpha 2} \frac{U_3^\ell}{R} \end{aligned} \quad (15)$$

여기서 아래 첨자 even/odd는 두께 방향으로의 단항식의 차수가 짝수/홀수임을 의미하고  $R$ 은 구조물의 중립면에서의 반경이다. Hooke의 법칙을 이용하고  $\sigma_{33}$ 를 무시하면, 다음과 같은 전체 변형 에너지  $U(\mathbf{u}^q)$ 를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} U &= U_m + U_b + U_s \\ &= \sum_{i=0,2,\dots}^{q_1} \sum_{j=0,2,\dots}^{q_1} d_{ij} \int_{\omega} \left\{ 2\mu \sum_{\alpha,\beta=1}^2 \beta_{\alpha\beta}^i \beta_{\alpha\beta}^j + \lambda \beta_{\alpha\alpha}^i \beta_{kk}^j \right\} d\omega \\ &\quad + \sum_{i=1,3,\dots}^{q_1} \sum_{j=1,3,\dots}^{q_1} d_{ij} \int_{\omega} \left\{ 2\mu \sum_{\alpha,\beta=1}^2 \kappa_{\alpha\beta}^i \kappa_{\alpha\beta}^j + \lambda \kappa_{\alpha\alpha}^i \kappa_{kk}^j \right\} d\omega \\ &\quad + \sum_{i=0,1,2,\dots}^{q_1} \sum_{j=0,1,2,\dots}^{q_1} d_{ij} \int_{\omega} 2\mu \rho_i^j \rho_j^i d\omega \quad (i+j=even) \end{aligned} \quad (16)$$

여기서  $U_m$ 은 막 변형,  $U_b$ 는 휨 변형 그리고  $U_s$ 는 횡전단 변형에 의한 에너지를 각각 나타낸다. 식(13)~(15) 속의 단항식들을 두께방향으로 적분하여 계수  $d_{ij}$ 로 표시한다.

$$2d_{ij} = \left(\frac{2}{i+j+1}\right) \left(\frac{d}{2}\right)^{i+j+1} \quad (17)$$

다음은 외력에 의한 일인데, 외력을  $d^3/12$ 로 보정(scaling)하면 다음과 같은 두께차수로 정렬된 극한 변분공식(limit variational formulation)을 구할 수 있다.

모든  $\mathbf{v}^q \in V^q(\Omega)$ 에 대해서 식(18)을 만족하는  $\mathbf{u}^q \in V^q(\Omega)$ 를 구하고자 한다.

$$a_d(\mathbf{u}^q, \mathbf{v}^q) + \frac{1}{d^2} b_d(\mathbf{u}^q, \mathbf{v}^q) + H.O.T = \ell(\mathbf{v}^q) \quad (18)$$

여기서 쌍선형 범함수  $a_d(\mathbf{u}^q, \mathbf{v}^q)$ ,  $b_d(\mathbf{u}^q, \mathbf{v}^q)$ , 선형 범함수  $\ell(\mathbf{v}^q)$  그리고 고차항(H.O.T)은 각각 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} a_d(\mathbf{u}^q, \mathbf{v}^q) &= \int_{\omega} \left\{ 2\mu \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \kappa_{\alpha\beta}^1 \kappa_{\alpha\beta}^1 + \lambda \kappa_{33}^1 \kappa_{33}^1 \right\} d\omega \\ b_d(\mathbf{u}^q, \mathbf{v}^q) &= 12 \int_{\omega} \left\{ 2\mu \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \beta_{\alpha\beta}^0 \beta_{\alpha\beta}^0 + \lambda \beta_{33}^0 \beta_{33}^0 \right\} d\omega \\ &\quad + 12 \int_{\omega} 2\mu \rho_{\alpha}^0 \rho_{\alpha}^0 d\omega \end{aligned} \quad (19)$$

$$\ell(\mathbf{v}^q) = 3 \sum_{\ell=0,2,\dots}^q \left(\frac{d}{2}\right)^{\ell-3} \int_{\omega} g_N V_3^{\ell} d\omega$$

$$H.O.T = a_d^{H.O.T}(\sim O(d^2)) + b_d^{H.O.T}(\sim O(1)) \quad (20)$$

두께  $d$ 가 줄어들면 외력에 의한 유한한 일  $\ell(\mathbf{v}^q)$ 에 대하여 유한한 변형 에너지를 가지기 위하여 식(18)로부터 쌍선형 범함수

$b_d(\mathbf{u}^q, \mathbf{v}^q)$ 는 영으로 수렴해야 한다. 이러한 조건에 의하여 다음의 두 가지 구속 조건식(constraints)이 현저(preval)하게 된다.

(i) 전단 구속 조건식(shear constraints)

$$\rho_x^0 = 0 : U_x^1 + \delta_{2x} \frac{U_2^0}{R} = -U_{3,x}^0 \quad (21)$$

(ii) 막 구속 조건식(membrane constraints)

$$\begin{aligned} \beta_{\alpha, \beta}^0 &= 0 : U_{\alpha, \beta}^0 + U_{\beta, \alpha}^0 + \delta_{2\alpha} \delta_{\beta 2} \frac{U_3^0}{R} \\ \beta_{33}^0 &= 0 : U_3^1 = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

여기서, 첫번째 조건식은 판재에서 Kirchhoff 구

속 조건식으로, 그리고 쉘에서 Kirchhoff-Love 구속 조건식으로 잘 알려져 있다.

하지만 조건식 (21), (22)은 빈약한 유한요소 공간(low approximation order and coarse mesh)에서는 각 저차항들  $U_i^0$ ,  $U_j^1$ 을 거의 영으로 구속함으로써 만족될 수 있는데, 이것이 록킹을 유발하는 이유이다. 따라서 록킹이 발생하면 이 저차항들로 표현되는 식(18)의 쌍선형 범함수  $a_d(\mathbf{u}^q, \mathbf{v}^q)$ 의 값이 매우 작게되어 결국 휨 변형 에너지의 근사값이 현저하게 줄어든다. 한편, 구조물이 휨 변형이 지배적이지 않을 경우(즉,  $a_d(\mathbf{u}^q, \mathbf{v}^q) \approx 0$ ), 이들 저차항들의 영향을 받지 않으므로 록킹이 발생하지 않는다.

위의 (21)와 (22)식에서 보듯이 구속 조건식은 저차항들( $\ell \leq 1$ )에만 한정되어 있기 때문에 고차항들( $\ell \geq 2$ )은 록킹에 영향을 미치지 않음을 확인할 수 있다. 즉 고차 계층적 모델은 Reissner-Mindlin 이론과 록킹이란 문제에서는 같은 특성을 지닌다. 다른 한편 판재의 경우는 막 록킹이 발생하지 않음을 알 수 있다. 왜냐하면, 판재의 휨에 있어서의 다음 항들이 모두 0이기 때문이다.

$$U_x^0 = U_3^1 = 1/R = 0 \quad (23)$$

#### 4. 후 록킹 감지

3절의 계층적 모델에 대한 극한 해석( $d \rightarrow 0$ )으로부터 모든 계층적 모델은 두께가 줄어들면 최저차 모델인 Kirchhoff 이론으로 접근함을 알았다((1,1,0) 모델은 (1,1,0)\* 모델로 대치). 따라서 전체 변형 에너지도 최저차 모델의 값으로 접근하는 것은 자명하다. 유한요소 해석에 있어서 Kirchhoff 이론은  $C^1$  유한요소를 필요로 하는 등의 어려움이 있다는 것은 잘 알려져 있다. 그래서 본 절에서는 실용상의 편의를 위하여 최 저차 모델로 판재의 경우는 Reissner-Mindlin 판 이론  $\mathbf{u}^{RM}$ 으로, 쉘의 경우는 변형된 3차원 쉘이론(degenerated 3D shell theory)  $\mathbf{u}^{deg}$ 을 사용하기로 한다.

변형된 3차원 쉘이론에 있어서 변위 성분은 다

음과 같이 표현된다<sup>9)</sup>.

$$\begin{aligned} u_\alpha(x_1, x_2, x_3) &= u_\alpha^0(x_1, x_2) + x_3 u_\alpha^1(x_1, x_2), \alpha = 1, 2 \\ u_3(x_1, x_2, 0) &= u_3^0(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (24)$$

원통형 셸을 고려하여  $E/\{12(1-\nu^2)\}$ 로 보정 (scaling)하면 각 변형 에너지는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} U_m(v^{deg}) &= 6d \int_\omega [\nu(\beta_{xx})^2 + (1-\nu) \sum_{i,j=1}^2 \beta_{ij}^2] R d\theta dz \\ U_s(v^{deg}) &= 6(1-\nu) d \int_\omega [\rho_1^2 + \rho_2^2] R d\theta dz \quad (25) \\ U_b(v^{deg}) &= \frac{d^3}{2} \int_\omega [\nu(\kappa_{xx})^2 + (1-\nu) \sum_{i,j=1}^2 \kappa_{ij}^2] R d\theta dz \end{aligned}$$

여기서,  $z, \theta$ 는 각각 축방향 및 원주방향으로의 좌표이고,  $\beta_{ij}, \kappa_{ij}, \rho_\alpha$ 는 앞 절에서 정의된 값들이다. 앞 절에서 록킹이 발생하면 휨변형 에너지가 매우 적은 값으로 나타남을 알았으므로, 전체 변형 에너지를 휨 변형 에너지  $U_b$ 와 그 나머지  $U_r = U_m + U_s$ 로 나누기로 한다. 그러면 임의의  $(q_1, q_2, q_3)$  모델에 대하여 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} U(\mathbf{u}^q) &= U_b(\mathbf{u}^q) + U_r(\mathbf{u}^q) \quad (26) \\ &\approx U_b(\mathbf{u}^{deg}) + U_r(\mathbf{u}^{deg}) \text{ as } d \rightarrow 0 \end{aligned}$$

여기서 총 변형 에너지에 대한 휨 변형 에너지의 비율을 휨 지배도(bending dominance)  $\eta^q$ 로 정의한다. 두께가 감소하면 식(26)으로부터, 판재의 경우  $\eta^q \rightarrow \eta^{RM}$  그리고 셸의 경우  $\eta^q \rightarrow \eta^{deg}$ 로 된다. 만일  $\eta^{RM}$ (판재)과  $\eta^{deg}$ (셸)를  $\eta^{BD}$ 로 정의하면 다음의 결과를 얻는다.

(공리 1) 만일 해석 결과에 록킹이 발생하지 않으면,  $\eta^{BD}$ 는  $d \rightarrow 0$ 에 따라서 다음과 같은 특성을 갖는다.

(i) 휨 변형 지배형 구조물에 대하여 :

$$\eta^{BD} \rightarrow 1$$

(ii) 막 변형 지배형 구조물에 대하여 :

$$\eta^{BD} \rightarrow 0$$

(정리 1) 휨 변형 지배형 구조물의 해석결과에

대하여  $\eta^{BD} \rightarrow 0$ 이면, 록킹이 존재한다.

평가방법 : 임의의  $(q_1, q_2, q_3)$  계층적 모델을 이용한 유한요소 해석결과에서  $(1, 1, 0)$ \*모델에 대응하는 저차 변위성분 항들만의 요소별(element-wise) 휨 변형 에너지와 전체 변형 에너지를 계산한다(앞의 식(25)에서 보인 것과 같이). 요소별 계산치를 합하여 전체 구조물에 대한 휨변형 에너지  $U_b(\mathbf{u}^q)$ 와 전체 변형에너지  $U(\mathbf{u}^q)$ 를 계산한다. 이 과정은 해석결과로부터 변형에너지를 계산하는 간단한 후 단계(post-step)만을 요하므로, 유한요소 프로그램내에 간단한 서브루틴만 추가하면 가능하다.

### 5. 수치해석 결과

세가지의 예제(하나의 판재 그리고 두개의 셸 형태의 문제)를 고려하기로 한다. 이 예제를 위하여 사각형 유한요소를 이용하고 형상함수로는 계층적 형상함수(hierarchical shape function)를 사용한다.

그림 2는 전체 경계가 고정(clamped)되어 있고 균일 수직 분포하중  $g$ 가 윗면에 작용하는 균일한 두께를 가진 정사각형 판재를 나타낸다. 이 문제는 두께가 감소하면 휨 변형 지배형으로 된다. 문제의 대칭성을 이용하여 그림과 같이 판재의 1/4 부분만을 택하여  $(1, 1, 2)$  계층적 모델을 적용한다. 그리고 16개의 균일한 유한요소를 이용하여 해석한다.

표 1 판재에서의 휨 지배도  $\eta^{BD}$ 의 계산치

a/d	3	10	30	100	500
p = 1	0.243	0.513	0.175	0.020	0.000
p = 2	0.272	0.810	0.950	0.965	0.656
p = 3	0.274	0.819	0.973	0.976	0.718
p = 4	0.277	0.862	0.995	0.999	1.000

표 1은 해석결과에 대한 휨 지배도  $\eta^{BD}$ 의 계산값을 보여주고 있는데, 1차 유한요소의 경우 두께가 감소함에 따라서 휨 지배도  $\eta^{BD}$ 가 0으로 접근한다. 이것은 1차 유한요소에 있어서는 완전한 록킹

(complete locking)이 발생함을 의미한다. 2, 3차 유한요소의 경우는 비록 1차 유한요소보다는 작지만 두께비  $a/d$ 가 100이상에서 휨 지배도가 현저히 감소함을 알 수 있다. 4차 유한요소는 두께비 증가에 따라 일관성있게 1로 수렴한다. 그림 3은 판재 중앙에서의 수직 변위 해석치  $u_3D/ga^4$ 를 각 유한요소와 두께비에 대하여 그래프로 보여주고 있다. 4차 유한요소의 경우 그래프로 부터 록킹을 찾아볼 수 없다. 이 그래프로 부터 표에서 보인 휨 지배도 계산치의 신뢰성을 확인할 수 있다.

그림 4는 한 측면이 고정되고 균일한 범선 응력  $g(\theta, x)$ 이 작용하는 원통형 쉘의 한 부분을 묘사하고 있다. 이 문제도 두께가 감소하면 휨 변형 지배형으로 접근함을 쉽게 확인할 수 있다.<sup>1)</sup> (2,2,2) 계층적 모델과 16개의 균일한 유한요소를 쉘의 좌측 절반에 적용하여 해석하였다. 해석 결과에 대한 휨 지배도가 표 2에 기록되어 있는데, 근사차수가  $p \leq 2$ 인 경우에 두께가 감소함에 따라서  $\eta^{BD}$ 가 현저히 줄어들음을 알 수 있다. 그림 5는 쉘의 P점에서의 반경 방향으로의 변위  $u_rD/gR^4$ 에 대한 해석치를 나타내고 있다. 여기서도 휨 지배도에 의한 평가가 실제 해석 결과에서의 록킹상태를 정확하게 예측하고 있음을 확인할 수 있다. 한편 앞의 판재의 경우와 비교할 때, 쉘의 경우가 록킹이 더 심하게 발생함을 알 수 있는데, 이것은 앞서 설명한 것과 같이 쉘에서는 막 록킹이 추가로 발생하기 때문이다.

표 2 휨 지배형 쉘에 있어서의 휨 지배도  $\eta^{BD}$ 의 계산치

R/d	3	10	30	100	500
p = 1	0.138	0.018	0.002	0.000	0.000
p = 2	0.854	0.581	0.139	0.014	0.001
p = 3	0.916	0.978	0.961	0.979	0.999
p = 4	0.918	0.989	0.997	0.998	1.000

마지막 예제는 그림 6에 있는 것과 같은 양쪽이 고정된 원통형 용기로서 내부에는 균일한 압력  $p_0$ 가 작용하고 있다. 이 구조물은 두께가 얇아지면 막변형이 지배적으로 된다. 왜냐하면 양단의 매우 좁은 영역을 제외하고는 주 변형이 원주 방향 성

분이기 때문이다. 따라서 앞 절의 이론적 결과로부터 록킹이 예상되지 않는다.

앞에서와 같이 문제의 대칭성을 이용하여 그림에서 해칭(hatching)된 영역만을 잡아서, (2,2,2) 계층적 모델에 대하여 균일한 16개의 유한요소를 이용하여 해석하였다. 표 3에서 보듯이 두께 변화에 무관하게 굽힘 지배도는 0으로 나타나 있다. 그림 7은 두께에 무관하게 보정된 전체 변형 에너지의 두께비에 따른 그래프로써, 록킹이 발견되지 않는다.

표 3 막 변형 지배형 쉘에서의 휨 지배도  $\eta^{BD}$ 의 계산치

R/d	3	10	30	100	500
p = 1	0.005	0.000	0.000	0.000	0.000
p = 2	0.016	0.003	0.000	0.000	0.000

위의 세가지 경우의 예제로부터 록킹이 심하게 발생한 해석결과에 있어서는 휨 지배도 계산치가

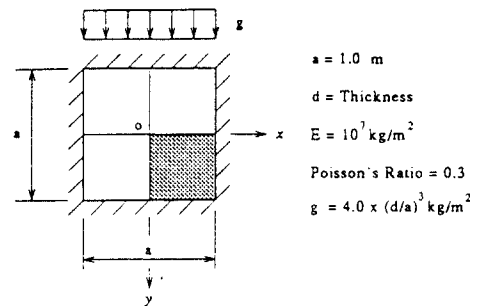


그림 2 윗면에 수직 분포하중  $g$ 가 작용하고 전체 경계면이 고정된 정사각형 판재

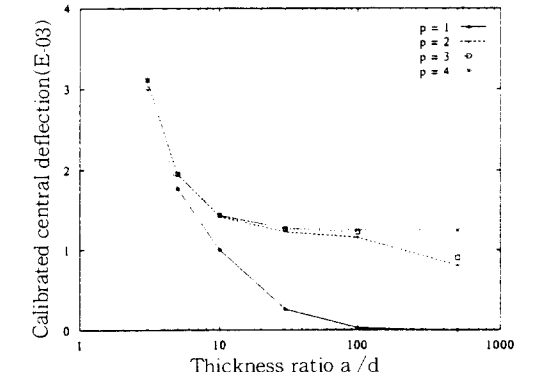
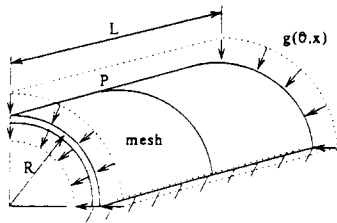
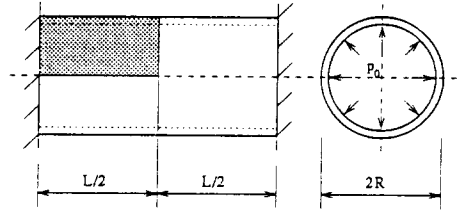


그림 3 (1,1,2) 계층적 모델을 이용한 판재의 해석에 있어서의 전단 록킹



$L=2.5\text{m}$        $g(\theta, x)=4.0x^3 (d/R)^3 \text{kg/m}^2$   
 $R=1.0\text{m}$        $E=10^7 \text{kg/m}^2$   
 $d=\text{Thickness}$       Poisson's Ratio=0.3

그림 4 균일한 법선 분포하중  $g(\theta, x)$ 가 작용하는 원통형 쉘



$L=2.5\text{m}$        $p_0=4.0 \times 10 \text{kg/m}^2$   
 $R=1.0\text{m}$        $E=10^7 \text{kg/m}^2$   
 $d=\text{Thickness}$       Poisson's Ratio=0.3

그림 6 균일한 내압  $p_0$ 을 받는 원통형 용기

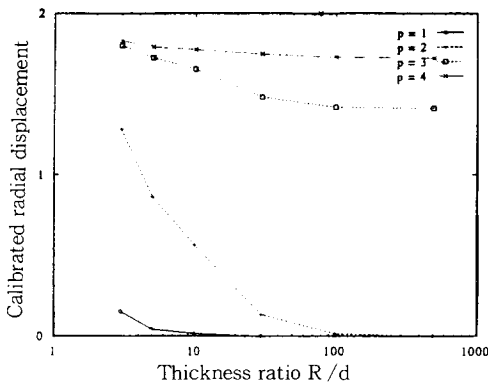


그림 5 휨 변형 지배형 원통형 쉘의 해석에 있어서의 전단 및 막 록킹

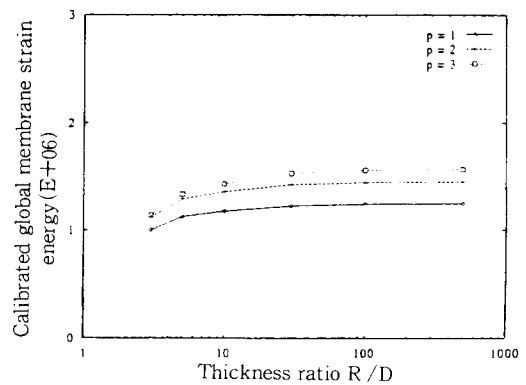


그림 7 록킹이 발생하지 않은 막 변형 지배형 원통형 용기

매우 작은 값이기 때문에 감지하기 쉽다. 록킹이 얼마의 휨 지배도에서 부터 시작되는지 판단하기는 어렵지만, 현저한 록킹이 발생했을 때의 휨 지배도 계산치는  $\eta^{BD} \leq 0(10^{-2})$ 이다. 따라서 휨 지배도를 이용한 후 록킹 감지는 신뢰성이 높으며 또한 간단히 계산할 수 있다.

## 6. 결 론

본 논문에서는 원통형 형상과 같은 물체의 계층적 모델을 이용하여 전단 및 막 록킹에 대하여 분석하였다. 록킹은 휨 변형이 지배적인(bending-dominated) 문제에만 나타나며, 빈약한 유한요소 공간속에서 잘 알려져 있는 전단 및 막 구속조건에 의하여 발생함을 살펴보았다. 그러나 이 두개

의 제약조건은 단지 저차수들( $q \leq 1$ )에만 관계한다.

본 논문에서는 수치결과에서 휨 지배도  $\eta^{BD}$ 를 측정하여 록킹을 후 감지하는 한가지 방법을 소개하였다. 제안한 이 방법을 세가지 경우의 수치적 예제를 통하여 실험한 결과, 해석하고자 하는 문제의 형태만 미리 알면(사실상 대부분의 문제에 대하여 가능함) 해석결과와 록킹 발생여부뿐만 아니라 그 강도까지 신뢰성있게 측정할 수 있음이 검증되었다.



## 부 록

$$[E^{RM}] = \begin{bmatrix} E_1^* & E_2^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_2^* & E_1^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_3^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_3^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_3^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \end{bmatrix} \quad (28)$$

$E_1^* = E / (1 - \nu^2)$ ,  $E_2^* = \nu E_1^*$ ,  $E_3^* = \kappa E / 2(1 + \nu)$   
 $E \sim$  영율,  $\nu \sim$  프와송비,  $\kappa \sim$  전단 보정 계수

## 참 고 문 헌

1. Pitkäranta, J., "The Problem of Membrane Locking in Finite Element Analysis of Cylindrical Shells," *Numerische Mathematik*, 61, 1992, pp.523-542.
2. Suri, M, Babuška, I. and Schwab, C., "Locking Effects in the Finite Element Approximation of Plate Model," *Mathematics of Computation*. Vol. 64, No. 210, 1995, pp.461-482.
3. Szabó, B.A. and Babuška, I., *Finite Element Analysis*, John Wiley, N.Y., 1991.
4. Babuška, I. and Li, L., "The Problem of Plate Modeling : Theoretical and Computational Results," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 100, 1992, pp.249-273.
5. Szabó, B. and Sahrman, G.J., "Hierarchic Plate and Shell Models Based on p-Extensions," *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, 26, 1988, pp.1855-1881.
6. Cho, J.R., "An *hpq*-Adaptive Finite Element Method for Hierarchical Modeling of Elastic Structures," Ph.D. Dissertaion, The University of Texas at Austin, 1995.
7. Oden, J.T. and Cho, J.R. "Adaptive *hpq*-Finite Element Methods of Hierarchical Models for Plate- and Shell-Like Structures," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, in press.
8. Adams, R.A., *Sobolev Spaces*, Academic Press, 1978.
9. Huang, H.C., *Static and Dynamic Analysis of Plates and Shells*, Springer-Verlag, 1988.

(접수일자 : 1996. 8. 16)