

일정체적 원형 변단면 보-기둥의 자유진동 및 좌굴하중

Free Vibrations and Buckling Loads of Tapered Beam-COLUMNS of Circular Cross-Section with Constant Volume

이 병 구*
Lee, Byoung-Koo

요 약

일정체적 원형단면을 갖는 변단면 보-기둥의 자유진동 및 좌굴하중을 지배하는 미분방정식을 유도하고 이를 수치해석하였다. 미분방정식에는 축하중효과를 고려하였다. 원형단면의 반경변화는 포물선식을 채택하였고, 고정-고정, 고정-회전 및 회전-회전 보-기둥의 고유진동수 및 좌굴하중을 산출하였다. 수치해석의 결과로 무차원 고유진동수와 무차원 변수들 사이의 관계 및 무차원 좌굴하중과 단면비 사이의 관계를 그림에 나타내었고, 최강기둥의 단면비와 좌굴하중을 구하였다.

Abstract

The differential equations governing both the free vibrations and buckling loads of tapered beam-columns of circular cross-section with constant volume are derived and solved numerically. The effects of axial load are included in the differential equations. The parabolic equation is chosen as the variable radius of circular cross-section for the tapered beam-column. In numerical examples, the clamped-clamped, clamped-hinged and hinged-hinged end constraints are considered. The variations of the frequency parameters and buckling load parameters with the non-dimensional system parameters are presented in figures and the configurations of strongest columns are obtained.

Keywords : buckling load, constant volume, free vibration, strongest column, tapered beam-column, Regula-Falsi method, Runge-Kutta method

1. 서 론

일정체적을 갖는 구조물의 정적, 동적해석은 구조공학자들의 주요한 관심사 중의 하나이다.¹⁾ 이

러한 연구들은 많은 문헌들^{2)~10)}에서 찾아볼 수 있으며 문헌^{2)~4)}에서는 가장 큰 제1고유진동수를 갖는 무재형상에 관한 연구가 이루어졌고, 문헌^{5)~10)}에서는 최대 좌굴하중을 갖는 무재형상에 관한 연구가

* 정회원 · 원광대학교 토목환경공학과 교수

• 이 논문에 대한 토론을 1996년 12월 31일까지 본 학회에 보내주시면 1997년 6월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

이루어졌다. 이를 문헌에 대한 개략적인 연구동향을 살펴보면 다음과 같다.

Niordson²⁾은 자유진동하는 보의 단면 최적형상에 관하여 연구하였으며, Kamat와 Simites^{3,4)}는 유한변위법에 의하여 최적 보의 고유진동수를 산출하고 전단변형과 회전관성이 최적 보의 자유진동에 미치는 영향을 분석하였다.

Keller⁵⁾ 및 Tadjbakhsh와 Keller⁶⁾는 최강기둥의 단면형상에 관한 연구를, Keller와 Niordson⁷⁾은 최장기둥에 관한 연구를 하였다. 또한 Taylor⁸⁾는 에너지법에 의하여 최강기둥을 산출하였다. Wilson, Holloway와 Biggers⁹⁾는 최강기둥의 안정영역에 관한 실험을 행하였으며, Masur¹⁰⁾는 여러개의 고유치를 갖는 구조물의 최적설계에 관하여 연구하였다.

이 논문은 일정체적을 갖는 변단면 보-기둥의 고유진동수 및 좌굴하중을 산출하는데 연구목적이 있다. 이를 위하여 일정체적을 갖는 변단면 보-기둥의 자유진동과 좌굴하중을 지배하는 상미분방정식을 각각 유도하였다. 이 미분방정식들을 수치적분기법을 이용하여 직접 수치적분하므로서 고유진동수와 진동형 및 좌굴하중을 산출하였다. 수치적분 기법은 Runge-Kutta method를 이용하였고, 고유치인 고유진동수와 좌굴하중은 Regula-Falsi method를 이용하여 산출하였다. 저자의 문헌조사결과로는 이와 같은 방법으로 고유진동수와 좌굴하중을 산출한 연구는 찾아볼 수 없었다. 이 연구에서는 변단면으로 원형단면의 반경이 포물선으로 변화하는 변단면을 채택하였고, 보-기둥의 재료는 선형탄성체로, 자유진동은 조화진동으로 가정하였다. 수치해석의 결과로 무차원 고유진동수와 무차원 변수들 사이의 관계 및 무차원 좌굴하중과 단면비 사이의 관계를 그림에 나타내었고 최강기둥의 단면비와 좌굴하중을 산출하였다.

2. 일정체적 변단면 보-기둥

그림 1은 직교좌표계(x, r)에서 시간길이가 l 인 원형단면을 갖는 변단면 보-기둥에서 단면의 반경

변화를 나타낸 그림이다. 이 그림에서 부재의 양단부 및 중앙지간에서 반경은 각각 r_0, r_m 이고 부재축 임의점 x 에서 반경은 r 로 표시되어 있다.

반경의 변화식으로는 직선식, 포물선식, 정현식 등의 모든 함수식이 가능하나 이 연구에서는 포물선식으로 채택하였다. 직교좌표계에서 3점 $(0, r_0, l/2, r_m), (l, r_0)$ 를 지나는 포물선의 반경변화식 r 은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$r = r_0[-k(x/l)^2 + k(x/l) + 1], \quad 0 \leq x \leq l \quad (1)$$

여기서,

$$n = r_m/r_0 \quad (2)$$

$$k = 4(n-1) \quad (3)$$

위의 (2)식에서 n 은 변단면 부재의 기하학적 형상을 나타내 주는 중앙지간의 단부에 대한 반경비 (r_m/r_0)이며 단면비로 정의한다. 그러므로 본 연구에서 대상으로 하는 보-기둥은 (1)식에 나타낸 r 식을 x 축으로 회전시켰을 때 만들어지는 중심 원형단면을 갖는 변단면 부재로 한다.

주어진 단면비 n 값들로부터 정의되는 변단면 부재들의 체적이 모두 일정한 체적 V 를 갖는다면, 이 일정체적 V 는 (1)식으로부터 다음과 같이 산출된다.

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^l r^2 dx \\ &= \beta \pi r_0^2 l \end{aligned} \quad (4)$$

여기서,

$$\beta = (8n^2 + 4n + 3)/15 \quad (5)$$

또한 부재축상 임의점 x 에서 단면적 A 및 단면이차모멘트 I 는 각각 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} A &= \pi r^2 \\ &= \pi r_0^2 [-k(x/l)^2 + k(x/l) + 1]^2 \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} I &= \pi r^4 / 4 \\ &= (\pi r_0^4 / 4) [-k(x/l)^2 + k(x/l) + 1]^4 \end{aligned} \quad (7)$$

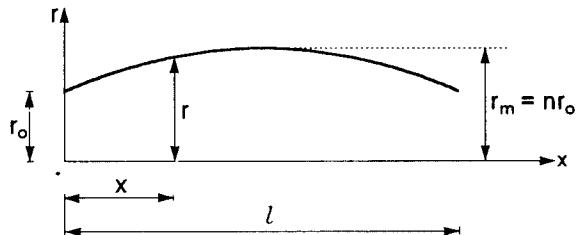


그림 1 일정체적 변단면 보-기둥의 반경변화

3. 지배미분방정식

그림 2에서 점선은 시간 길이가 l , 부재축상 임의점 x 에서 단면적 및 단면이차모멘트가 각각 A , I 이며 일정체적 V 를 갖는 변단면 보-기둥을 나타내며, 양단에 압축하중을 ‘+’로 하는 축하중 P 가 작용하고 있다. 보-기둥의 양단은 회전 또는 고정지점으로 지지되어 있다.

보-기둥이 자유진동하게 되면 그림의 실선으로 나타낸 바와 같이 부재축상 임의점은 동적변위 $W(x,t)$ 를 갖게 된다. 보-기둥의 자유진동을 조화진동으로 가정하면 동적변위 $W(x,t)$ 는 다음과 같이 표시된다.

$$W(x,t) = w(x)\sin(\omega t) \quad (8)$$

윗 식에서 x 는 부재의 축방향 좌표이고, ω 는 고유각진동수, t 는 시간이다. 또한 $w(x)$ 는 조화진동의 진폭으로 x 만의 함수이며 이후 w 로 표시한다.

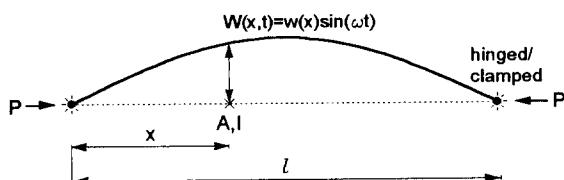


그림 2 축하중을 받는 보-기둥의 진동형

축하중을 받는 보-기둥의 자유진동을 지배하는 편미분방정식은 다음과 같다.¹¹⁾

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2} \right] + \rho A \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial t^2} + P \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2} = 0 \quad (9)$$

윗 식에서 E 는 탄성계수, ρ 는 단위체적당 질량이다. 위의 (9)식에서 A , I 는 각각 변단면의 단면적 및 단면이차모멘트로서 x 만의 함수이므로 (9)식은 다음 식과 같이 전개된다.

$$EI \frac{\partial^4 W(x,t)}{\partial x^4} + 2E \frac{dI}{dx} \frac{\partial^3 W(x,t)}{\partial x^3} + \left(E \frac{d^2 I}{dx^2} + P \right) \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (10)$$

(8)식으로부터 $\partial^2 W(x,t) / \partial t^2$, $\partial^2 W(x,t) / \partial x^2$, $\partial^3 W(x,t) / \partial x^3$, $\partial^4 W(x,t) / \partial x^4$ 을 구하여 (10)식에 대입하고 정리하면 다음 식과 같은 축하중을 받는 변단면 보-기둥의 자유진동을 지배하는 상미분방정식을 유도할 수 있다.

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} + 2E \frac{dI}{dx} \frac{d^3 w}{dx^3} + \left(E \frac{d^2 I}{dx^2} + P \right) \frac{d^2 w}{dx^2} - \rho A \omega^2 w = 0 \quad (11)$$

보-기둥의 경계조건은 다음과 같다. 회전지점 ($x=0$ 또는 $x=l$)에서 변위 w 및 휨모멘트 $M = EIw'$ 이 “0”이므로 회전지점의 경계조건은 다음과 같다.

$$w=0, \text{ 회전지점 } (x=0 \text{ 또는 } x=l) \text{에서} \quad (12)$$

$$w''=0, \text{ 회전지점 } (x=0 \text{ 또는 } x=l) \text{에서} \quad (13)$$

고정지점 ($x=0$ 또는 $x=l$)에서 변위 w 및 단면회전각 w' 이 “0”이므로 고정지점의 경계조건은 다음과 같다.

$$w=0, \text{ 고정지점 } (x=0 \text{ 또는 } x=l) \text{에서} \quad (14)$$

$$w'=0, \text{ 고정지점 } (x=0 \text{ 또는 } x=l) \text{에서} \quad (15)$$

자유진동을 지배하는 미분방정식을 무차원으로

유도하기 위하여 다음과 같은 무차원 변수들을 도입한다.

$$\xi = x/l \quad (16)$$

$$\eta = w/l \quad (17)$$

$$p = Pl^2/(EI_e) \quad (18)$$

$$c_i = \omega_i l^2 \sqrt{\rho A_e / EI_e}, \quad i=1,2,3,\dots \quad (19)$$

윗 식들에서 ξ, η 는 x, w 를 지간길이 l 로 정규화한 것이며, p 는 무차원 하중, c_i 는 무차원 고유진동수이고 i 는 모드번호이다. (18), (19)식에서 A_e, I_e 는 각각 보-기둥의 체적 V 를 길이가 l 인 등단면 원형단면으로 하는 경우의 단면적 및 단면이차모멘트로서 다음 식들과 같이 표시된다.

$$A_e = V/l \quad (20)$$

$$I_e = \frac{1}{\pi} \left(\frac{V}{2l} \right)^2 \quad (21)$$

이제 (6)식과 (7)식으로부터 구한 $dI/dx, d^2I/dx^2$ 을 (11)식의 미분방정식에 대입하고 (16)~(19)식의 무차원 변수들을 사용하면 다음 식과 같은 일정체적을 갖으며 단면의 반경이 포물선으로 변화하는 원형단면을 갖는 보-기둥의 자유진동을 지배하는 무차원 미분방정식이 유도된다.

$$\begin{aligned} \frac{d^4\eta}{d\xi^4} &= \frac{8k(2\xi-1)}{(-k\xi^2+k\xi+1)} \frac{d^3\eta}{d\xi^3} \\ &- \left[\frac{\beta^2 p}{(-k\xi^2+k\xi+1)} \right] \frac{d^2\eta}{d\xi^2} \\ &+ \frac{8k(7k\xi^2-7k\xi+1.5k-1)}{(-k\xi^2+k\xi+1)^2} \frac{d\eta}{d\xi} \\ &+ \frac{\beta c_i^2}{(-k\xi^2+k\xi+1)^2} \eta \end{aligned} \quad (22)$$

(12)~(15)식의 경계조건식은 다음과 같이 무차원화 한다.

$$\eta=0, \text{ 회전지점} (\xi=0 \text{ 또는 } \xi=1) \text{에서} \quad (23)$$

$$\eta'=0, \text{ 회전지점} (\xi=0 \text{ 또는 } \xi=1) \text{에서} \quad (24)$$

$$\eta=0, \text{ 고정지점} (\xi=0 \text{ 또는 } \xi=1) \text{에서} \quad (25)$$

$$\eta'=0, \text{ 고정지점} (\xi=0 \text{ 또는 } \xi=1) \text{에서} \quad " (26)$$

축압축하중이 증가하여 좌굴하중에 도달하면 고유진동수는 “0”이 되므로 (22)식에 $c_i=0, p=b_i$ 를 대입하면 좌굴하중을 지배하는 무차원 미분방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{d^4\eta}{d\xi^4} &= \frac{8k(2\xi-1)}{(-k\xi^2+k\xi+1)} \frac{d^3\eta}{d\xi^3} \\ &- \left[\frac{\beta^2 b_i}{(-k\xi^2+k\xi+1)^4} \right. \\ &\left. + \frac{8k(7k\xi^2-7k\xi+1.5k-1)}{(-k\xi^2+k\xi+1)^2} \right] \frac{d^2\eta}{d\xi^2} \end{aligned} \quad (27)$$

(27)식에서 b_i 는 다음 식과 같이 정의되는 무차원 좌굴하중이다.

$$b_i = \frac{B_i l^2}{EI_e}, \quad i=1,2,3,\dots \quad (28)$$

(28)식에서 B_i 는 좌굴하중이고 i 는 모드번호이다.

4. 수치해석 방법

이상에서 유도한 미분방정식들을 수치해석하여 주어진 보-기둥의 제원에 대한 무차원 고유진동수 c_i 및 진동형 $\eta=\eta(\xi)$ 와 무차원 좌굴하중 b_i 를 산출할 수 있는 FORTRAN 컴퓨터 프로그램을 작성하였다. 먼저 자유진동 문제에 대한 수치해석 알고리즘을 간단히 설명하면 다음과 같으며, 이러한 수치해석 알고리즘은 보의 자유진동에 관한 문헌^[12,13]들에서 그 유용성이 확인된 바 있다.

1) 단부조건, 변단면의 기하학적 형상인 n 값 및 무차원 하중 p 값을 입력하고 β 값을 계산한다.

2) 미분방정식 (22)식에 불확정량인 고유치 (eigenvalue) c_i 값을 가정하여 대입한다. 최초의 가정 값은 “0”이다.

3) 경계조건 (23), (24)식 또는 (25), (26)식을 $\xi=0$ 에서의 초기조건으로하여 미분방정식 (22)식을 $\xi=0$ 에서 $\xi=1$ 까지 수치적분한다. 본 연구에서 수치적분은 Runge-Kutta method를 이용하였다.

4) 수치적분의 결과로부터 $\xi=1$ 에서 (23), (24)

식 또는 (25), (26)식의 경계조건의 만족여부를 나타내주는 행렬 값 D 를 계산한다. 만일 $D=0$ 이면 앞에서 가정한 c_i 값은 자유진동의 고유치이며, $D \neq 0$ 이면 c_i 값을 앞에서 가정한 값보다 증가시켜 미분방정식에 대입한다.

5) 3), 4) 단계를 반복 수행하여 D 값의 부호를 관찰하고 만일 D 값의 부호가 바뀌면 참 c_i 값은 마지막 두 가정 값 사이에 존재한다.

6) Regula-Falsi method를 이용하여 참 c_i 값에 근접한 c_i 값을 계산한다.

7) Regula-Falsi method를 반복시행하여 수치해가 수렴조건을 만족하면 고유치 c_i 값과 진동 형 η 를 출력한다.

좌굴하중에 대한 미분방정식 (27)식의 수치해석방법도 위에서와 동일한 방법으로 수치해석하였다. 다만 좌굴하중 문제에서는 무차원 하중값 p 값을 입력시키지 않으며, 미분방정식 (27)식에서 고유치는 무차원 좌굴하중 b_i 가 된다.

5. 수치해석 예 및 고찰

수치해석 결과를 산출하기 전에 수치적분을 위한 단계길이($step\ size$) $\Delta\xi$ 를 산정하기 위하여 수렴해석을 실시하였다. 그림 3은 고정-고정, 고정-회전, 회전-회전 보-기둥에서 $n=1.2$, $p=5$ 일 때 c_i 와 $1/\Delta\xi$ 사이의 관계를 나타낸 것이다. 이 그림에서 $1/\Delta\xi$ 이 20이상이면 c_i 값은 충분한 정도(유효숫자 3자리)로 수렴하는 것을 알 수 있다. 즉 Runge-Kutta method를 이용하여 수치적분하는 경우 $\Delta\xi=0.05$ 이면 수치해는 충분한 정도로 수렴하였다. 마찬가지로 좌굴문제에서도 $\Delta\xi=0.05$ 이면 b_i 값은 역시 유효숫자 3자리의 정도로 수렴하였다. 그러나 수치해의 수렴성은 Regula-Falsi method를 적용시키는 과정에서 선택하는 또다른 수렴조건과도 관련성이 있기 때문에 본 연구에서는 수치해의 정도를 강화하기 위하여 $\Delta\xi=0.02$ 로 하여 수치해석하였다. 그리고 이 연구에서는 무차원 고유진동수 c_i 와 무차원 좌굴하중 b_i 를 모두 3모드까지 계산하였다.

본 연구에서의 수치해석 결과를 검증하기 위하여 본 연구와 문헌의 결과를 표 1에 비교하였다. 이 표에서 알 수 있는 바와 같이 본 연구결과는 문헌값과 우수하게 접근하여 본 연구결과의 타당성을 입증할 수 있다.

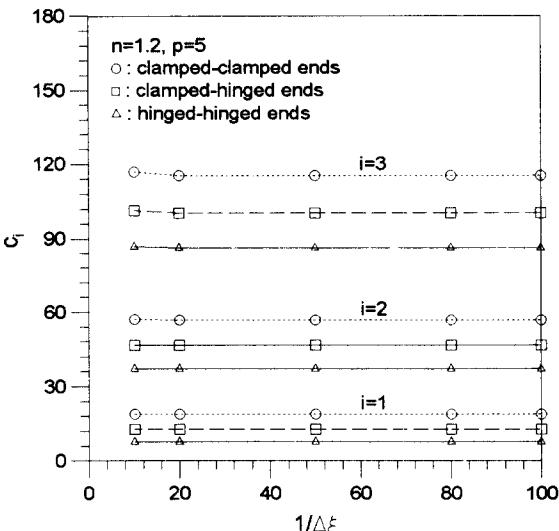


그림 3 수렴해석

표 1 수치해석결과의 검증

• 자유진동문제(회전-회전)

제원	비교문헌	c_1	c_2	c_3
$n=1.2$	본 연구	10.17	39.60	88.89
$p=0.$	SAP90	10.17	39.60	88.90
$n=1.5$	본 연구	10.38	39.14	88.22
$p=0.$	SAP90	10.38	39.15	88.22

• 좌굴하중문제(회전-회전)

n	비교문헌	문헌값	본 연구
1	문헌[14]	$b_1=9.87$	$b_1=9.87$
2.32*	문헌[9]	$B_1=550\ lbs$	$B_1=553\ lbs$

* $V=9\pi/16\ in^3$, $l=15.44\ in$, $E=10\times 10^6\ psi$

그림 4, 5, 6은 $p=0$ (점선)과 $p=10$ (실선)인 하중조건을 갖는 고정-고정, 고정-회전 및 회전-회전 보-기둥에 대하여 c_i 와 n 의 관계를 나타낸 그림이다. 이 그림들에서 n 값이 증가함에 따라 c_i 값은 증

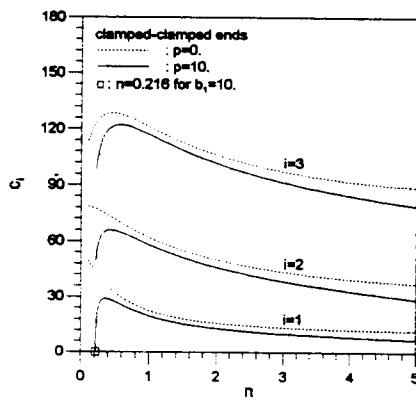


그림 4 c_i - n 곡선(고정-고정)

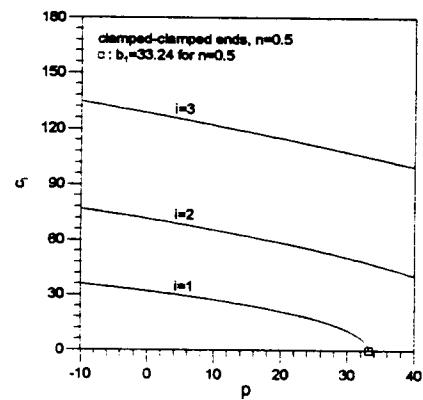


그림 7 c_i - p 곡선(고정-고정)

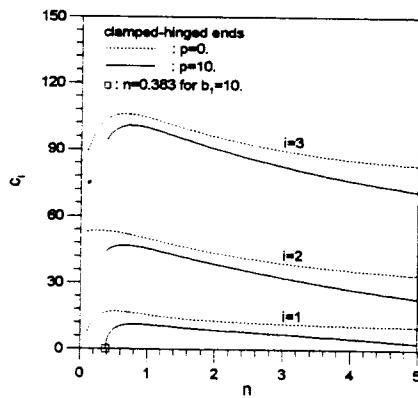


그림 5 c_i - n 곡선(고정-회전)

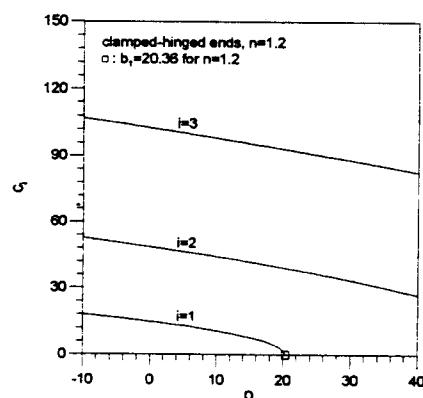


그림 8 c_i - p 곡선(고정-회전)

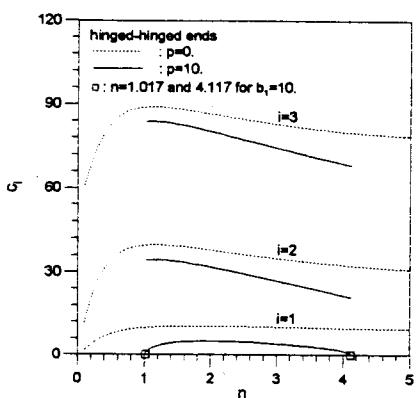


그림 6 c_i - n 곡선(회전-회전)

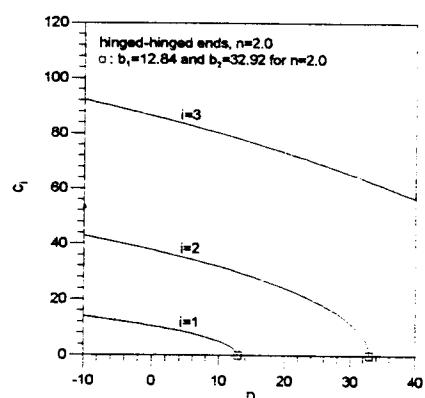


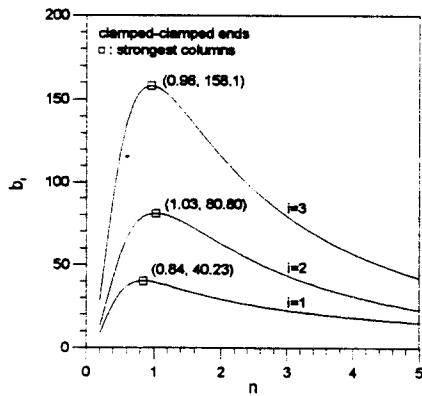
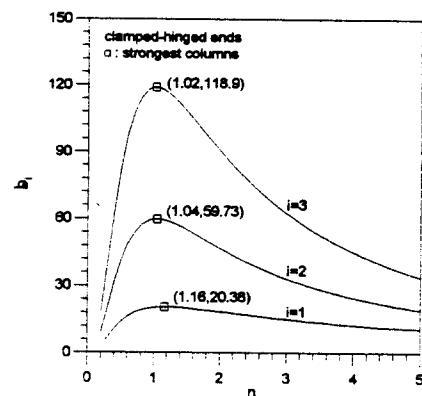
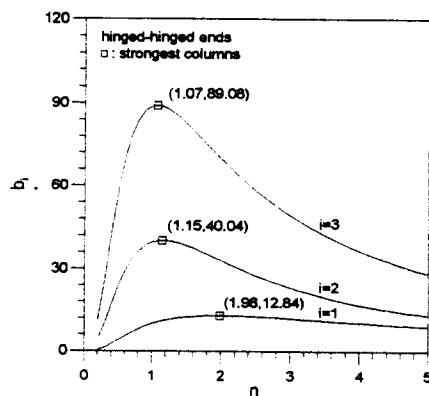
그림 9 c_i - p 곡선(회전-회전)

가하다 극치를 보인 후에 다시 감소하는 경향을 보이고 있다. $p=10$ 인 실선은 $p=0$ 인 점선과 비교하여 항상 작은 c_i 값을 보이고 있어서 축압축하중은 고유진동수를 감소시키는 요인임을 알 수 있다. 또한 특정한 n 값에 대하여 c_i 값은 “0”을 나타내고 있으며 이는 이 n 값 이하 또는 이상에서는 $p=10$ 인 무차원 축압축하중에 대하여 좌굴되는 불안정 영역임을 의미한다. 예로서 그림 6의 회전-회전 보-기둥에서 $p=10$ 인 압축하중에 대하여 $n \leq 1.017$, $n \geq 4.117$ 이 불안정영역이며 $1.017 < n < 4.117$ 이 안정영역이다.

그림 7, 8, 9는 고정-고정($n=0.5$), 고정-회전($n=1.2$) 및 회전-회전($n=2.0$) 보-기둥에서 c_i 와 p 와의 관계를 나타낸 그림이다. 이 그림들에서 “+”부호의 축압축하중은 c_i 값을 감소시키는 요인이며 “-”부호의 축인장하중은 c_i 값을 증가시키는 요인임을 알 수 있다. 또한 이 그림들에서 c_1 값이 “0”인 □로 표시된 수평축의 p 값이 해당 보-기둥의 무차원 좌굴하중 b_l 이 33.24임을 의미하는 것이다. 따라서 이 좌굴하중인 $b_l=33.24$ 이후의 c_2 , c_3 값은 좌굴이 발생한 이후이므로 무의미하다. 그러나 적당한 위치에 적절한 지점을 설치하는 경우에 제1모드의 좌굴을 방지할 수 있으므로 이 경우에는 c_2 또는 c_3 의 무차원 고유진동수를 가질 수도 있다.

그림 10, 11, 12는 고정-고정, 고정-회전 및 회전-회전 보-기둥의 n 값에 따른 무차원 좌굴하중 b_l 값을 나타낸 그림이다. 이 그림들에서 b_l 값들은 n 값이 증가함에 따라 증가하다 극치를 보인 후 다시 감소하고 있다. 최강 보-기둥은 일정체적의 보-기둥에서 가장 큰 좌굴능력을 보이는 보-기둥을 말하며 이 그림들에서 □로 표시한 극치의 b_l 값들이 최강 보-기둥의 기하학적 형상이 된다. 또한 주어진 (p , n)에 대하여 보-기둥이 안정하기 위해서는 b_l - n 곡선의 아래쪽에 (p , n)이 위치하여야 한다. 즉 b_l - n 곡선의 아래 부분이 해당 보-기둥의 좌굴에 대한 안정영역이 된다.

그림 13은 회전-회전 보-기둥에서 $p=0$ 일 때 최강 보-기둥($n=1.98$)과 등단면 보-기둥($n=1.0$)의

그림 10 b_l - n 곡선(고정-고정)그림 11 b_l - n 곡선(고정-회전)그림 12 b_l - n 곡선(회전-회전)

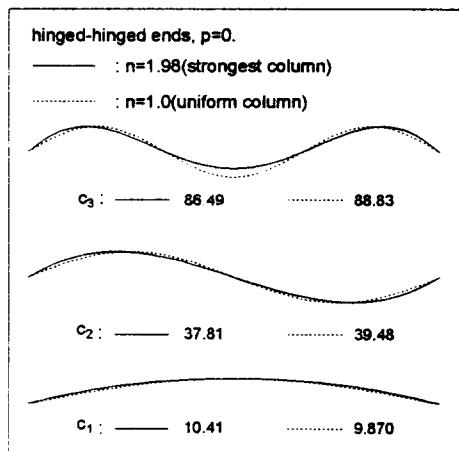


그림 13 진동형의 예

진동형을 보여준다. 이 그림에서 진동형들은 특정 위치의 진폭을 동일하게 하여 나타낸 것으로 1, 2 모드의 경우는 두 진동형이 거의 일치하나 제3모드의 경우에 중앙지간에서의 진폭은 등단면의 진폭이 최강기둥의 진폭보다 상당히 더 커졌다. 그러나 단면형상이 같고 축하중 p 의 크기를 변화시키는 경우 $\eta=0$ 인 6값인 nodal point에서 미소한 차 이를 보였을 뿐 진동형들 사이에는 큰 차이가 없었다.

6. 결 론

이 연구는 일정체적을 갖는 보-기둥의 자유진동 및 좌굴하중에 관한 연구이다. 축하중을 받는 보-기둥의 자유진동을 지배하는 편미분방정식을 이용하여 단면의 반경이 포물선으로 변화하는 원형 단면을 갖는 일정체적 보-기둥의 자유진동을 지배하는 상미분방정식을 유도하였다. 또한 이 상미분방정식으로부터 대상 보-기둥의 좌굴하중을 지배하는 상미분방정식을 유도하였다. 이 미분방정식들을 수치해석하여 고정-고정, 고정-회전 및 회전-회전 보-기둥의 고유진동수와 진동형 및 좌굴하중을 산출하였다. 수치해석의 결과로 단면비 및 축하중이 고유진동수에 미치는 영향을 분석하였고, 좌굴하중(b_i) - 단면비(n) 곡선으로부터 최강기둥

의 단면비와 좌굴하중을 구하였다.

감사의 글

이 논문은 1996년도 원광대학교 교내 연구비지 원에 의한 것으로 대학당국에 진심으로 감사드립니다.

참 고 문 헌

- Haftka R. T., Gürdal Z. and Kamat M. P., Elements of Structural Optimization, Kluwer Academic Publisher, 1990.
- Niordson F. I., "On the Optimal Design of a Vibrating Beam", Q. Appl. Math., Vol.23, 1965.
- Kamat, M. P. and Simites, G. J., "Optimal Beam Frequencies by the Finite Element Displacement Method", Int. J. Solids Struct., Vol.9, 1975, pp.51-62.
- Kamat, M. P. and Simites, G. J., "Effect of Shear Deformations and Rotary Inertia on Optimum Beam Frequencies", Int. J. Num. Meth. Eng., Vol.9, 1975, pp. 51-62.
- Keller, J. B., "The Shape of the Strongest Column", Archiv. Rat. Mech. and Anal., Vol. 5, 1960, pp. 275-285.
- Tadjbakhsh, I. and Keller, J. B. "Strongest Columns and Isoperimetric Inequalities for Eigenvalues", J. Appl. Mech., Vol.29, 1962, pp. 159-164.
- Keller, J. B. and Niordson, F. I., "The Tallest Column", Archiv. Rat. Mech. and Anal., Vol. pp. 433-446.
- Taylor, J. E., "The Strongest Column-An Energy Approach", J. Appl. Mech., Vol.34, 1967, pp. 486-487.
- Wilson, J. F., Holloway, D. M. and Biggers S. B., "Stability Experiments on the Strongest Columns and Circular Arches", Experimental Mechanics, Vol. 11, 1971, pp. 303-308.
- Masur, E. F., "Optimal Structural Design under Multiple Eigenvalue Constraints", Int. J. Solids Struct., Vol.20, 1984, pp. 211-231.
- Clough, R. W. and Penzien, J., Dynamics of

- Structures, 2nd Edition, McGraw-Hill, 1993.
12. Lee, B. K. and Oh, S. J., "Free Vibration and Buckling Loads of Beam-Columns on Elastic Foundations", Proceedings of ICVE '94, Beijing, 1994, pp. 73-77.
13. Lee, B. K., Oh, S. J. and Mo, J. M., "Approximate Methods for Natural Frequencies and Buckling Loads of Beam-Columns with Intermediate Multiple Elastic Springs", Proceedings of SDVNC '95, Berlin, 1995, pp. 1155-1160.
14. Timoshenko, S. P. and Gere, J. M., Theory of Elastic Stability, McGraw-Hill, 1961.

(접수일자 : 1996. 5. 30)