

# Arc Length Method에 의한 비선형 문제의 해법

## Nonlinear Analysis Method by the Arc Length Method

이 대 희\*

Lee, Dae-Hee

최 종 근\*\*

Choi, Jong-Keun

### 요 약

비선형 알고리즘으로 “Arc length method”를 사용하여 변형률 요소 기법에 의해 구성된 전단 효과를 고려한 압선보 요소를 이용하여 아치보(arch beam)의 스냅 좌굴(snap buckling) 현상을 해석함으로써 접선 강성 행렬의 선택에 따른 알고리즘의 수렴 특성을 검토하였다. 또한 아치보의 스냅 좌굴 현상에서 아치보의 길이와 높이의 비에 따른 스냅 좌굴 전전 특성을 검토하였다.

### Abstract

The performance for the algorithm of the arc length method has been examined in terms of the choice of the tangential stiffness matrix through the analysis for the snap buckling phenomenon of the arch beam. The curved beam element with 2 nodes including shear effect has been formed by strain element technique and then it has been used in this nonlinear analysis. Snap-through characteristics has been examined with respect to the ratios of the arch beam length to hight.

**Keywords :** nonlinear analysis, Arc length method, arch beam, snap buckling, strain elements technique

### 1. 서 론

구조 설계에 있어서 구조물의 최종 강도를 정확히 예측하는 것은 설계의 합리화에 대단히 중요한 것으로 이것은 비선형 구조 해석을 통하여 수행될

수 있다. 최근 구조 해석에서 유한요소법의 발달은 선형 영역에서의 완전한 해를 제시하고 있는 추세이지만 재료 비선형과 기하학적 비선형이 함께하는 고차의 비선형 해석에서는 아직도 해결되어야 할 과제가 많이 남아 있다. 그 중 가장 큰 과

\* 정희원·한국원자력연구소, 기계설계팀 세통기계분야,  
선임연구원

\*\* 고등기술연구원, 자동차기술연구실 선임연구원

• 이 논문에 대한 토론을 1996년 12월 31일까지 본 학회에  
보내주시면 1997년 6월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

제는 비선형 해석 알고리즘에 관한 것으로 구조 비선형 문제를 유한요소법을 이용하여 해석할 때 지금까지 보편적으로 알려진 알고리즘으로 크게 다음 세가지를 들 수 있다.

## 1) Substitution method

## 2) Newton-Raphson method

## 3) Incremental load-displacement method

이중에서 1) 과 2)의 개별적인 사용은 수렴성이 느리고 비선형의 형태에 따라 발산의 여지가 있고 또 초기값의 선정등의 문제에 의존하는 비효율적인 점들이 있어서 일반적으로 3)의 하중과 변위를 동시에 조절하는 ‘변위법에 기초한 하중 증분법’이 최근 비선형 해석에서 가장 우수한 방법으로 알려지고 이에 대한 많은 연구가 이루어졌다.<sup>2,4,6,10)</sup> 변위법에 기초한 하중증분법에 대한 연구에서 최근에 주목을 받는 것으로는 Crisfield의 “Arc length method”<sup>7)</sup>과 할 수 있다. 이것은 Riks<sup>6)</sup>의 극점 (limit point)을 극복하는 새로운 해법을 유한 요소법에 적용할 수 있도록 수정한 것으로 비선형 계적에 일정 반경의 구속 조건을 추가하여 보다 안정된 해의 보장을 제안한 것이다. 기존의 연구가 “Arc length method”的 수렴성을 향상시키기 위하여 수행되어 졌지만<sup>8,10)</sup> 기본적으로는 모두 접선 강성 행렬(tangential stiffness matrix)의 선택 방법에 관한 문제로 귀결될 수 있다.

본 연구에서는 변형률 요소기법(strain element technique)에 의해 구성된 극선보 요소<sup>11)</sup>를 사용하여 아치보의 스냅 좌굴(snap buckling) 현상을 해석하였다. 비선형 알고리즘으로 “Arc length method”를 사용하여 기하학적 비선형 구조 해석을 수행하였다. 접선 강성 행렬의 선택에 따른 알고리즘의 수렴 특성을 고찰하였으며 아치보의 길이와 두께의 비에 따른 스냅 좌굴 특성을 살펴보았다.

## 2. Arc length method에 대한 알고리즘 구성

그림 1에서와 같이  $m^{\text{th}}$  하중 증분 단계에서 다음 관계식이 성립하고

$$K_0 \delta d_1 = \delta \lambda_1 q \quad (1)$$

다음과 같은 구속 조건이 그 하중 증분 단계에서 성립한다.

$$\Delta d_i^T \Delta d_i + b \lambda_i^2 q^T q = \Delta l^2 \quad (2)$$

그림 1에서와 같이  $i=1$  일 때는

$$\Delta d_i = \delta d_i \quad (3)$$

이 되고  $i=2, 3, \dots$  일 때는

$$\Delta d_i = \Delta d_{i-1} + \delta d_i \quad (4)$$

와 같음을 알 수 있다.

$i=1$  을 제외한  $i=2, 3, \dots$  의 나머지 반복 과정에서 변위 증분량  $\delta d_i$ 에 대한 적합 방정식은

$$\delta d_i = \delta d_r + \delta \lambda_i \delta d_e \quad (i=2, 3, \dots) \quad (5)$$

이 된다.

여기서

$$\delta d_r = [K_{i-1}]^{-1} (\lambda_{i-1} q - P_{i-1}) \quad (6)$$

$$\delta d_e = [K_{i-1}]^{-1} q \quad (7)$$

$$\delta \lambda_i \delta d_e = [K_{i-1}]^{-1} \delta \lambda_i q$$

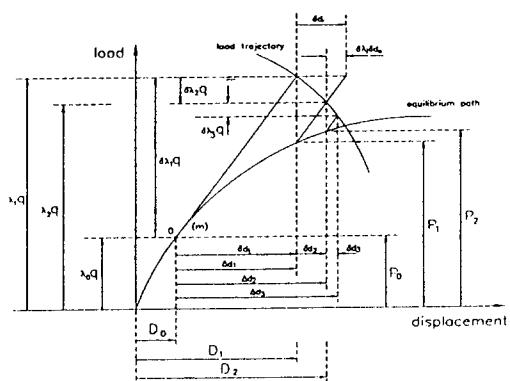


그림 1 Procedure of the Arc-length method for the one d.o.f. system

식 (2), (4)와 (5)를 조합하면

$$a_1 \delta \lambda_i^2 + a_2 \delta \lambda_i + a_3 = 0 \quad (8)$$

와 같은 하중 증분 계수  $\delta \lambda_i$ 에 관한 2차 방정식을 얻을 수 있고

$$a_1 = \delta d_e^T \delta d_e$$

$$a_2 = 2(\Delta d_{i-1} + \delta d_r)^T \delta d_e$$

$$a_3 = (\Delta d_{i-1} + \delta d_r)^T (\Delta d_{i-1} + \delta d_r) - \Delta l^2 + b \lambda_i^2 q^T q$$

와 같이 된다. (8)식의 해를 위하여  $b$ 를 다음 두 경우로 생각할 수 있다.

1)  $b=0$  으로 한 경우

(2)식은  $\Delta d_i^T \Delta d_i = \Delta l^2$ 와 같이 되고  $a_1, a_2, a_3$ 는 다음과 같이 된다.

$$a_1 = \delta d_e^T \delta d_e$$

$$a_2 = 2(\Delta d_{i-1} + \delta d_r)^T \delta d_e$$

$$a_3 = (\Delta d_{i-1} + \delta d_r)^T (\Delta d_{i-1} + \delta d_r) - \Delta l^2$$

2)  $b=1$  로 한 경우

(2)식은 다음과 같이 표현할 수 있고  $a_1, a_2, a_3$ 는 다음과 같이 된다.

$$\Delta d_{i-1}^T \Delta d_{i-1} + \lambda_{i-1}^2 q^T q = \Delta d_i^T \Delta d_i + \lambda_i^2 q^T q = \dots = \Delta l^2$$

$$\lambda_i = \lambda_{i-1} + \delta \lambda_i$$

$$a_1 = \delta d_e^T \delta d_e + q^T q$$

$$a_2 = 2(\Delta d_{i-1} + \delta d_r)^T \delta d_e + 2\lambda_{i-1} q^T q$$

$$a_3 = 2\Delta d_{i-1}^T \delta d_r + \delta d_r^T \delta d_r$$

Crisfield<sup>7,8)</sup>는  $b=0$ 의 경우가 수렴이 빠르고 계산이 간편하다고 제시하여 일반적으로 Arc length method에서는 이 경우를 채택하고 있다. (8)식을 풀어  $\delta \lambda_i$  ( $i=1, 2, 3, \dots$ )를 구하면 (4), (5)식에서  $\delta d_i, \Delta d_i$ 를 구하고

$$D_i = D_{i-1} + \delta d_i \quad (9)$$

$$\lambda_i = \lambda_{i-1} + \delta \lambda_i \quad (10)$$

에서 전체 변위와 하중 증분 계수를 얻을 수 있다. 본 알고리즘에서 사용하는 종료 기준(termination criterion)은

$$\frac{||\lambda_i q - P_i||}{||\lambda_i q||} \leq \epsilon \quad (11)$$

이고 일반적으로  $\epsilon$ 이  $10^{-2} - 10^{-3}$ 에서  $(m+1)^{\text{th}}$  하중 단계로 넘어 간다.

각 하중 증분 단계의 시점에서  $\delta \lambda_i$ 과  $\Delta l$ 의 결정과 그 단계에서 반복에 따른  $\delta \lambda_i$ 의 결정은 아래와 같은 방법으로 한다.

2.1 각 하중 증분 단계에서  $\delta \lambda_i$ 과 호길이  $\Delta l$ 의 결정

1)  $m=1$ 의 최초 하중 증분 단계

$\delta \lambda_1$ 은 입력 data

$$\delta d_e = K_0^{-1} q$$

$$\Delta d_1 = \delta d_1 = \delta \lambda_1 \delta d_e$$

$$\Delta d_1^T \Delta d_1 = \Delta l^2$$

$$\Delta l = \sqrt{\Delta d_1^T \Delta d_1} \quad (12)$$

2)  $m=2, 3, \dots$ 의 나머지 하중 증분 단계

아래의 (13), (14)식과 같이  $\Delta l$ 과  $\delta d_1$ 을 계산한다.

$$\Delta l_m = \Delta l_{m-1} I_d / I_{m-1} \quad (13)$$

(13)식은 호길이를 자동적으로 비선형성이 심한 곳에서는 작게하고 약한 곳에서는 크게하는 효과를 갖게 되며  $\delta \lambda_1$ 은 (14)식과 같이 구하고 그 부호는 a의 부호에 따른다.

$$\begin{aligned} \delta \lambda_1 &= \pm (\Delta l_m / ||\delta d_e||) \\ &= a (\Delta l_m / \sqrt{(\delta d_e)^T (\delta d_e)}) \end{aligned} \quad (14)$$

$$a = \text{sign}(q^T (\delta d_e)) = \text{sign}((\delta d_e)^T [K_0] (\delta d_e))$$

2.2 각 iteration( $i=2, 3, \dots$ )에서  $\delta\lambda_i$ 의 결정

(8)식을 풀면 구속 조건 제적(constraining sphere)이 비선형 제적(equilibrium path)과 두 곳에서 교차하므로 두개의 근이 나타난다. 되돌임 효과(doubling back)를 방지하기 위하여 본 알고리즘에서는 다음과 같은 방법을 사용한다.<sup>8)</sup>

1) 두개의 근 중에서 변위 벡터  $\Delta d_{i-1}, \Delta d_i$  사이의 각이 예각이 되어야 하므로

$$\cos \alpha = 1 + (b_1 + \delta\lambda_i b_2) / \Delta l^2 \quad (15)$$

(15)식이 양이 되는  $\delta\lambda_i$ 를 선택한다. 여기서,

$$b_1 = \Delta d_{i-1}^T \Delta d_i$$

$$b_2 = \Delta d_{i-1}^T \Delta d_e$$

2) (15)식의  $\cos \alpha$ 가 두근 모두가 양이면 (8)식의 선형해에 가장 근사한 다음식으로 결정한다.

$$\delta\lambda_i = -(a_3/a_2)$$

3) 두근 모두 복소수로 나오면 호길이를  $\Delta l/2, \Delta l/8$  등으로 점차로 줄여 바로 전의 하중 증분 단계에서 다시 시작한다.

### 3. 변형률 요소 기법에 의한 곡선보 요소

변형률 요소 기법에 의하여 그림 2와 같은 곡선보 요소의 변위 함수는 전단 효과를 고려하여 아래와 같이 표현될 수 있다.<sup>11)</sup>

$$\{q\} = [\Phi]\{C\} \quad (17)$$

여기서,

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 0 & -R^2\phi & R & 1 & -\sin\phi & \cos\phi \\ R & R^2 & 0 & 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & R\phi & 0 & -1/R & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\Phi = x/R$$

이고  $\{C\}^T = [C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6]$ 로 써 미지 상수 벡터가 되며 이들의 값은 그림 2의 곡선보 요소에서 2점점 6개의 자유도(변위성분)로 써 결정할 수 있다.

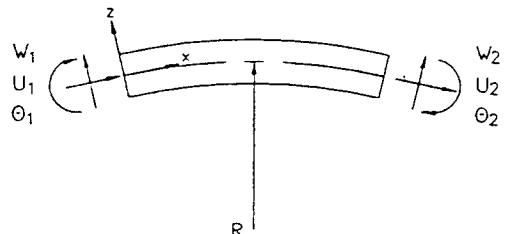


그림 2 Curved Beam Element

### 3.1 선형 및 기하학적인 비선형 요소 강성 행렬

식 (17)을 곡선보 내의 변위 분포 함수로 가정하고 이를 이용하여 변형률 벡터를 구한 후에 곡선보의 변형률을 에너지 식 (22)에 대입하여 요소의 강성 행렬을 유도할 수 있다. 곡선보 요소의 변형률-변위 관계식은

$$\{\epsilon\} = \{\epsilon_L\} + \{\epsilon_N\} \quad (19)$$

$$\{\epsilon_L\}^T = [\epsilon_0 \ k \ r] \quad (20)$$

$$\{\epsilon_N\}^T = [\epsilon_n \ 0 \ 0] = [(1/2)(dw/dx)^2 \ 0 \ 0] \quad (21)$$

와 같이 변형률의 비선형항을 추가하여 표현할 때 곡선보의 변형률 에너지는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$U_e = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} \{\epsilon\}^T [D] \{\epsilon\} dx \quad (22)$$

$$[D] = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 \\ 0 & EI & 0 \\ 0 & 0 & \beta^2 GA \end{bmatrix} \quad (23)$$

여기서 EA, EI, GA는 인장, 굽힘, 전단 강성을 각각 표시한다. 또한  $\beta^2$ 는 전단 수정 계수이다. 식 (22)의 제 1차 변분은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\delta U_e = \{C\}^T [K'] \delta \{C\}$$

$$[K'] = [K_L] + [K_N]$$

$$[K'_L] = \int_{x_1}^{x_2} [B_L]^T [D_L] [B_L] dx \quad (27)$$

$$[K'_N] = \int_{x_1}^{x_2} [B_N]^T [D_N] [B_N] dx \quad (28)$$

$$[D_L] = [D] \quad (28)$$

여기서  $[D_N]$ 는 변형률 에너지의 1차 변분에서 나오는 비대칭의 구성 행렬

$$[D_N] = EA \begin{bmatrix} 0 & \epsilon_n' \\ (1/2)\epsilon_n' & \epsilon_n \end{bmatrix}, \quad \epsilon_n' = dw/dx \quad (29)$$

을 대칭으로 재구성<sup>1)</sup>하여 (30)과 같이 표현한 것이다.

$$[D_N'] = EA \begin{bmatrix} 0 & (1/2)\epsilon_n' \\ (1/2)\epsilon_n' & \epsilon_n + (1/2)\epsilon_0 \end{bmatrix} \quad (30)$$

$[B_L], [B_N]$ 은 식(19)의 변형률 벡터를

$$\{\epsilon_L\} = [B_L]\{C\} \quad (31)$$

$$\{\epsilon_0 \quad \epsilon_n'\}^T = [B_N]\{C\} \quad (32)$$

로 정리할 때 얻어지는 변위 함수 행렬  $[\Phi]$ 의 미분 행렬이 되며 다음과 같다.

$$[B_L] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$[B_N] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (-1/R)\sin\phi & (1/R)\cos\phi \end{bmatrix} \quad (34)$$

식 (17)의 미정 계수 벡터  $\{C\}$ 는 요소 절점 좌표

를 이들 식에 대입함으로써 절점 변위의 함수로써  $\{C\}$ 를 구할 수 있다.

$$\{C\} = [A]^{-1}\{\Delta\}^e, \quad [A] \equiv [\Phi]_{1,2} \quad (35)$$

$\{\Delta\}^e = [u_1, w_1, \theta_1, u_2, w_2, \theta_2]^T$ 인 절점 변위 벡터이다.

(35)식을 (24)식에 대입하면 요소 강성 행렬은 다음과 같이 얻어진다.

$$[K]^e = [K_L] + [K_N] \quad (36)$$

$$[K_L] = [A^{-1}]^T [K'_L] [A^{-1}] \quad (37)$$

$$[K_N] = [A^{-1}]^T [K'_N] [A^{-1}] \quad (38)$$

### 3.2 접선 강성 행렬

기하학적인 비선형 방정식은 Arc length method<sup>7)</sup>을 사용하여 해를 구하였다. 이 해법에 사용되는 접선 강성 행렬은 식(24)에 제 2차 변분을 취하면 얻을 수 있고 그 결과는 식(29)에 표현된  $[D_N]$ 이 다음과 같이 대칭으로 변환되어 얻어 진다.

$$[D_N'] = EA \begin{bmatrix} 0 & \epsilon_n' \\ \epsilon_n' & 3\epsilon_n + \epsilon_0 \end{bmatrix} \quad (39)$$

식 (24)-(27) 및 (37), (38)식에 (28), (39)식을 대입하면 접선 강성 행렬,  $[K_T]^e$ 를 얻을 수 있고 이로써 구성되는 접선 행렬 방정식은

$$[K_T]\{\delta\Delta\} = \{\delta F\} \quad (40)$$

와 같이 표현되어 미소 증분 외력에 관한 변위 성분의 증분만을 구할 수 있어 반복 수렴 과정에만 사용된다.

## 4. 수치 해석 및 검토

### 4.1 해석 모델

아치보의 스냅 좌굴 특성과 접선 강성 행렬의

선택에 따른 Arc length method의 수렴 특성을 검토하기 위한 해석 모델은 그림 3과 같은 깊이가 얕은 아치(shallow arch)를 선택하였다. 물성치는 그림 3에 나타낸 것을 사용하였고 전단 수정 계수는  $\beta^2=0.85$ , 프와송 비  $v=0.3$ 으로 하고 반경을  $R=250, 400, 800\text{cm}$ 로 변환 시켜 깊이가 얕은 아치에서의 깊이에 따른 좌굴 거동을 검토하여 염밀해<sup>5)</sup>와 비교하였다.

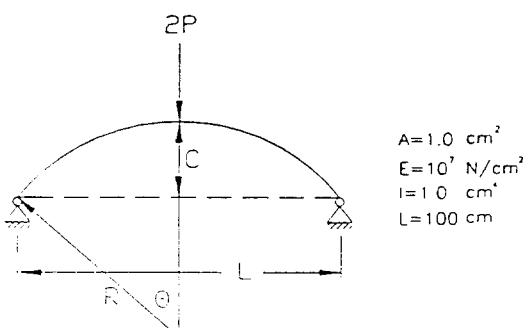
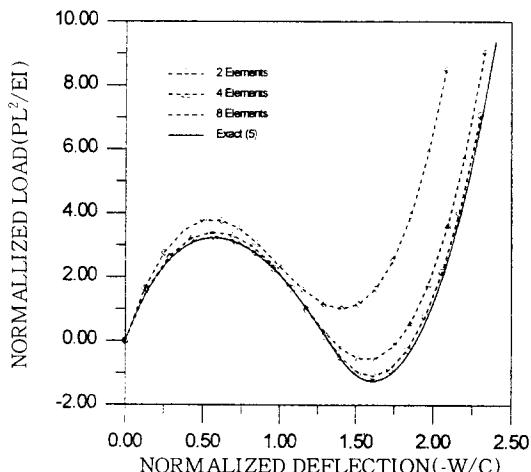
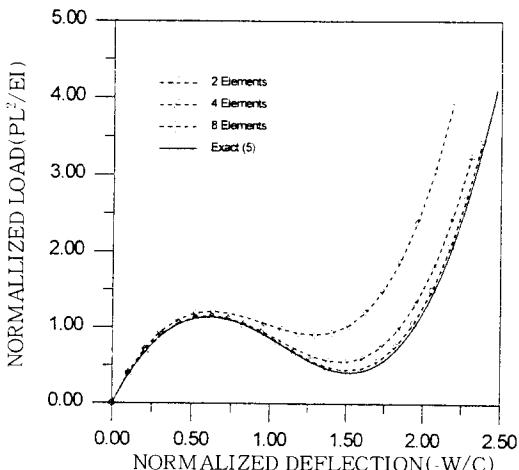
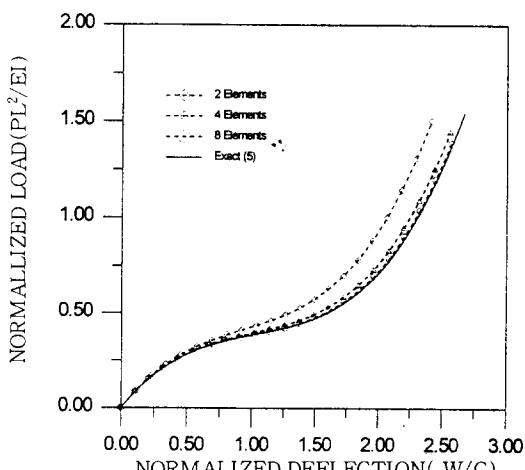


그림 3 Shallow arch

#### 4.2 아치보의 스냅 좌굴 특성

그림 4, 5, 6은  $R=250, 400, 800$ 인 경우를 해석하여 요소 증가에 따른 염밀해에의 수렴 특성을

검토하였다. 요소 분할은 총 자유도 수가 9, 15, 27개가 되도록 요소수를 2, 4, 8개로 분할하였다. 그림 4, 5, 6에서와 같이 선형 영역에서는 요소 분할 수가 작아도 염밀해와 잘 일치하지만 스냅 좌굴이 일어 나는 영역에서는 요소 수의 증가에 따른 염밀해에의 수렴 특성이 선명하게 나타나고 있음을 알 수 있다.  $R=250$ 은  $\theta=11.53^\circ$ 로 깊이(C)가 가장 큰 것으로 그림 4에서와 같이 스냅 좌굴 진전이 가장 크게 일어 나고,  $R=800$ 은  $\theta=3.58^\circ$ 로써 깊이(C)가 가장 얕은 것으로 그림 6에서와 같이

그림 5 Load-Deflection curves for  $R/L=4$ 그림 4 Load-Deflection curves for  $R/L=2.5$ 그림 6 Load-Deflection curves for  $R/L=8$

스냅 좌굴이 일어 나지 않음을 알 수 있다. 그럼 7은 두께 변화에 따른 좌굴 거동을 보인 것으로  $R=250\text{cm}$ 의 모델을 8개 요소로 분할하여  $L_a/H = 5, 20, 60, 100$ 으로 변화시켜 얻은 결과를 도시한 것으로 스냅 좌굴 거동은 일정 깊이에서는 아치보의 길이와 두께의 비에 의존함을 보이고 있다. 여기서  $L_a$ 는 아치보의 길이를 나타낸다.

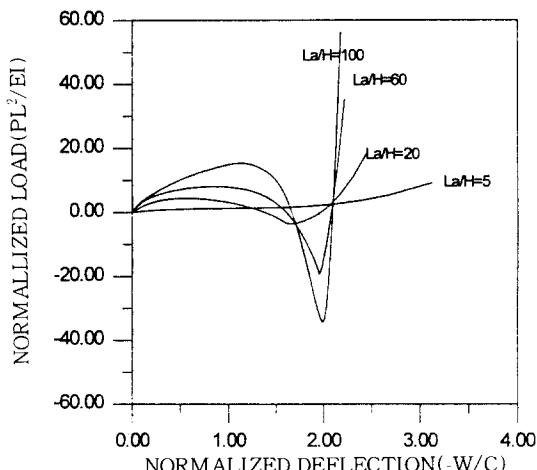


그림 7 Load-Deflection curves for variations of  $La/H$  of  $R/L=2.5$

#### 4.3 접선 강성 행렬에 따른 수렴 특성

*Arc length method*의 접선 강성 행렬의 선택에 따른 해의 수렴 특성을 고찰하기 위하여 두 가지 경우를 고찰하였다. 첫째는 각 하중 증분 단계에서 최초의 접선 강성 행렬을 그 하중 증분 단계 내에서 계속 반복하여 사용하는 것으로 본 연구에서 이를 초기 접선 강성 행렬법(initial stiffness method)이라 한다. 두번째로 매 반복 단계마다 접선 강성 행렬을 계산하여 해를 구하는 방법으로 이를 접선 강성 행렬법(tangential stiffness method)이라 한다. 이 두 가지 방법으로 그림 3의 아치보에서  $R=250, 400, 800$ 의 모델을 8개의 요소로 분할하여 좌굴후의 일정 하중까지 비선형 궤적을 찾는데 따르는 하중 증분 단계의 수와 총 반복 회수를 비교하여 표 1에 비교하여 나타내었다.

표 1에서 알 수 있듯이 각 하중 증분 단계의 초

표 1 Comparison of iteration numbers

R	Numbers	Initial Stiffness	Tangential stiffness
		method	method
250	step	85	32
	iteration	237	73
400	step	177	38
	iteration	518	96
800	step	119	24
	iteration	347	57

기 접선 강성 행렬을 그 하중 증분 단계에서 반복하여 사용하는 것은 접선 강성 행렬의 계산량이 더 많을 뿐만 아니라 수렴 속도도 매 반복 과정에서 접선 행렬을 다시 계산하는 것보다 매우 더 많은 반복 회수를 필요로 함을 알 수 있다. 즉, 초기 접선 강성 행렬법의 총 하중 증분 단계가 접선 강성 행렬법의 총 반복 회수 보다 많으므로 적어도 이 비율 이상 만큼 시간차가 나게 됨을 알 수 있다.

#### 5. 결 론

변형률 요소 기법에 의해 구성된 전단 효과를 고려한 극선보 요소를 이용하여 아치보의 스냅 좌굴 현상을 해석하였다. 비선형 해석 알고리즘으로 *Arc length method*를 사용하였으며 접선 강성 행렬의 선택에 따른 알고리즘의 수렴 특성을 검토하였다. 본 연구의 결론은 다음과 같이 요약할 수 있다.

1) *Arc length method*에서 접선 강성 행렬법이 초기 접선 강성 행렬법보다 수렴 특성이 적어도 초기 접선 강성 행렬법에서의 하중 증분 단계와 접선 강성 행렬법에서의 반복 회수의 감소 비율 이상 만큼 빠르다.

2) 아치보의 스냅좌굴 거동은 일정 깊이에서 길이와 높이의 비에 의존함을 알 수 있고,  $R/L=2.5$ 의 모델에서는 길이와 높이의 비가 20 보다 클 때 스냅 좌굴이 발생하였다.

## 기호 설명

- b : 보정 계수(scaling parameter)
- d : 각 하중 증분 단계에서의 변위(displacements in each step)
- D : 하중 단계에서의 전체 변위(displacements in global step)
- $I_d$  : 바람직한 반복 회수(desired number of iteration(3-5))
- $I_{m-1}$  : m-1번째 증분 단계에서 평형에 도달한 때 까지의 반복 회수
- K : 강성 행렬(stiffness matrix)
- $\Delta\ell$  : 호길이(arc length)
- q : 참고 하중(Reference load)
- $P_i$  : i 번째 하중 증분 단계에서의 부재 저항력 (Resisting member Force)
- $\delta$  : 매 반복시 무한소 증분 연산자(infinitesimal increment operator in each iteration)
- $\Delta$  : 각 하중 증분 단계에서 최종 값을 위한 연산자(final value operator in each iteration)
- $\lambda$  : 하중 증분 계수(load multiplier)

## 참 고 문 헌

1. Dhatt, G., Touzot, G., and Cantin, G., The Finite Element Method Displayed, John Wiley & Sons, 1984, pp. 179-180, 291-305
2. O. C. Zienkiewicz, "Incremental Displacement in Non-linear Analysis", Int. J. Numer. Meth. Engng. 3, 1971, pp. 587-588
3. A. C. and A. B. Saber, Algorithm for Large Deflection Geometrically Non-linear Plane and

Curved Structures, In Mathematics of Finite Elements and Applications, Academic Press, New York, 1973, pp. 483-494

4. J. L. Batoz and G. S. Dhatt, "Incremental Displacement Algorithms for Non-linear Problems", Int. J. Numer. Meth. Engng., 14, 1979, pp. 1262-1267
5. Saberm A. B. and Lock, A. C., "Large Deflection, Geometrically Non-linear Finite Element Analysis of Circular Arches", Int. J. Mech. Sci., Vol. 15, 1973, pp. 37-47
6. E. Riks, "An Incremental Approach to the Solution of Snapping and Buckling Problems", Int. J. Solids Structures, 15, 1979, pp. 524-551
7. M. A. Crisfield, "A Fast Incremental /Iterative Solution Procedure that Handles 'Snap-Through'", Comput. Struct., 13, 1981, pp. 55-62
8. M. A. Crisfield, "An-Arc-Length Method Including Line Searcheres and Acclerations", Int. J. Numer. Meth. Engng., 19, 1983, pp. 1269-1289
9. K. Scheizerhof and E.Ramm, "Combining Quasi-Newton and Arc-Length Methods for the Analysis of Nonlinear Problems in the Post Limit Range", Proc. First Word Congress on Computational Mechanics, Austin, Tx, 1986
10. C. C. Chang, "Periodically Restarted Quasi-Newton Updates in Constant Arc-length Method", Comput. St., 1991, pp. 963-975
11. 최종근, 임장근, " 전단 효과를 고려한 새로운 곡 선보 요소 ", 대한기계학회 논문집 제 15권 3호, 1991, pp. 751-756

(접수일자 : 1996. 3. 19)