

혼합모우드를 받는 균열판의 응력확대계수 산정을 위한 p-Version 유한요소 모델

p-Version Finite Element Model for Computation of the Stress Intensity Factors of Cracked Panels under Mixed Mode

윤 영 필* · 이 채 규** · 우 광 성***
Yun, Young-Pil · Lee, Chae-Gyu · Woo, Kwang-Sung

요 약

본 논문에서는 혼합모우드형의 공학적 파괴역학을 위한 두 가지 방법의 p-version 유한요소모델을 사용한 응력확대계수 산정을 목적으로 연구되었다. 두 가지 방법은 COD와 CSD방법에 의한 변위의삽법과 분해법에 기초한 J-적분법이다. 즉, p-version 유한요소해석을 통해 얻어지는 변위장을 균열선에 대해 대칭 및 역대칭 변위로 분리함으로써, 앞에서 언급된 두 가지 방법에 의해 모우드-I과 모우드-II 응력확대계수를 결정할 수 있다. 제안된 방법들의 검증을 위한 예제는 인장력을 받는 중앙균열판과 중앙 경사균열판 문제이다. 균열판의 경사각의 변화와 균열길이와 평판 폭의 비에 따른 수치해석결과는 기존 문헌에 있는 이론값과 경험식에 의한 결과와 비교되어 높은 정도를 보여주고 있다.

Abstract

In this paper, two different techniques for mixed-mode type engineering fracture mechanics are investigated to estimate the stress intensity factors by using p-version finite element model. These two techniques are displacement extrapolation with COD and CSD method and J-integral with decomposition method. By decomposing the displacement field obtained from p-version of finite element analysis into symmetric and antisymmetric displacement fields with respect to the crack line, Mode-I and Mode-II stress intensity factors can be determined using aforementioned techniques. The example problems for validating the proposed techniques are centrally and centrally oblique cracked panels under tension. The numerical results associated with the variation of oblique angle and the ratio of crack length and panel width (a/W ratio) are compared with those by theoretical values and empirical solutions in literatures. Very good agreements with the existing solutions are shown.

Keywords : mixed mode, displacement extrapolation method, integral of Legendre polynomial, direct method, decomposition method, J-integral method, stress intensity factor, correction factor

* 정희원 · 목포전문대학 토목과 교수
** 한국 품질관리연구원 이사
*** 정희원 · 영남대학교 공과대학 토목공학과 교수

• 이 논문에 대한 토론을 1996년 12월 31일까지 본 학회에 보내주시면 1997년 6월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

1. 서 론

교량에 있어서 연결부 및 접합부 부품들에 재하되는 반복하중에 의한 피로균열(fatigue crack)문제는 교량설계 또는 노후교량의 내하력판정에 매우 중요한 부분을 차지하고 있다. 또한, 기계 및 제조업과 품질제어공정 등에서도 중요한 해석과제로 남아있다. 위의 문제점을 해결하기 위한 가장 큰 선결과제는 균열선단에서의 응력장의 강도를 나타낼 수 있는 응력확대계수 K 를 여하한 방법으로 구해서 이에 따른 균열제어(crack control) 계획을 어떻게 효율적으로 수행할 수 있느냐에 있다. 특히, 균열은 균열선과 수직(순수 인장모우드; pure opening mode or K_I Mode) 혹은 평행한 상태(순수 전단모우드; pure sliding mode or K_{II} Mode)를 기본으로 하중재하 방향과 임의의 경사를 갖고 발생하는 상태(혼합모우드; mixed mode)가 발생될 수 있다. 이러한 혼합모우드는 균열선단에서 K_I 모우드와 K_{II} 모우드가 동시에 연계되어 발생하게 되므로 일반적인 순수 모우드 상태의 해석방법으로는 충분하지 못하다.

순수 모우드 상태의 균열해석은 균열선(crack line)과 균열선에 대한 법선방향이 기준좌표계와 일치하므로 인장모우드와 전단모우드를 가상균열 확장법(VCE; virtual crack extension method)¹⁾이나 적분형태의 균열선단 매개변수 산정법인 J-적분법²⁾ 또는 등가영역적분법(EDI; equivalent integral method)³⁾을 사용하여 계산할 수 있었다. 그러나, 경사균열의 경우는 균열진전 방향의 균열선단 좌표계와 기준좌표계가 경사각에 따라 다르므로 균열선단에서는 인장모우드와 전단모우드가 연계(coupling)되어 발생하므로 이 문제를 어떻게 비연계(decoupling)하느냐가 관건이 된다. 그러므로, 혼합모우드 문제는 Ishikawa⁴⁾, Sha⁵⁾와 Cheng⁶⁾과 같이 균열선에 대해 유한요소해석에 의해 얻어진 변위를 적절한 좌표변환 매트릭스를 사용하여 대칭부분과 역대칭부분으로 나누어 이에 대한 에너지방출률 G 를 산정함으로써 해결할 수 있었다.

본 연구에서는 혼합모우드상의 인장모우드와 전단모우드를 분리시키기 위해서 균열선을 중심으로한 균열선단좌표로 부터 대칭 및 비대칭거동을 유발하는 변위를 구하는 방법인 분해법(decomposition method)^{4,5,6)}에 근거를 둔 J-적분법과 변위외삽법인 COD(crack opening displacement)와 CSD(crack sliding displacement) 방법이 사용되었다. 한편, 구조해석을 위해서는 파괴역학해석에서 높은 정도와 신뢰성을 보이는 p-version 유한요소법이 사용되었다. p-version 유한요소모델에 의한 파괴역학해석은 지금까지는 VCE 방법을 주로 사용하여 인장을 받는 균열판^{7,8)}과 균열셀⁹⁾, 균열을 갖는 축대칭구조¹⁰⁾, 휨을 받는 균열판¹¹⁾해석이 수행되어 왔다. 이 방법은 균열선단에서 특이요소(singular element)와 같은 특별요소나 혼합변분이론에 의한 혼합요소(hybrid element) 등을 사용하지 않고도 적분형 르장드르 형상함수에 의해 정식화된 계층요소를 불과 4개(8차 형상함수)만을 사용하여 종래의 h-version 유한요소결과와 비교하여 정확도와 신뢰성 및 수렴성 측면에서 우월한 것으로 나타났다. 그러므로, 새로운 유한요소모델인 p-version 모델을 혼합모우드에 적용하면서 향후 탄소성파괴역학(EPFM) 해석에 필요한 적분형태의 균열선단 매개변수 산정법인 J-적분법의 검증을 시도하고자 한다.

2. 응력확대계수의 산정

2.1 COD & CSD Method (Displacement Extrapolation Method)

순수 인장모우드(pure tensile opening mode) 하에서 균열선단에서 균열면과 각도 $\theta + 180^\circ$ 를 갖고, 거리 r 만큼 떨어진 임의의 점에서의 변위 u, v 는 아래와 같이 표현된다.

$$u(r, \theta) = \frac{K_I}{G} \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left(\frac{1-\nu}{1+\nu} + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + r^{3/2} f_u(\theta) + O(r)^{5/2} \quad (1)$$

$$v(r, \theta) = \frac{K_I}{G} \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left(\frac{2}{1+\nu} - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

$$+r^{3/2}f_v(\theta)+O(r)^{5/2}$$

또한, 순수 전단모우드(pure shear sliding mode)하에서 변위 u, v 는 아래와 같이 표현된다.

$$u(r, \theta) = \frac{K_{II}}{G} \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left(\frac{2}{1+\nu} + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) + r^{3/2} g_u(\theta) + O(r)^{5/2} \quad (2)$$

$$v(r, \theta) = \frac{K_{II}}{G} \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left(\sin^2 \frac{\theta}{2} - \frac{1-\nu}{1+\nu} \right) + r^{3/2} g_v(\theta) + O(r)^{5/2}$$

한편, 위의 식은 K_I 과 K_{II} 를 동시에 포함하고 있으므로 이를 K_I 과 K_{II} 에 대해서 분리하여 나타내기 위해서 균열의 상면에서의 점 $A(r, \pi)$ 와 균열 하면에서의 점 $B(r, -\pi)$ 에 해당하는 변위 u_A, u_B 와 v_A, v_B 는 식(3)과 같이 K_I 와 K_{II} 에 대해 정리할 수 있다.

$$K_I = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{v_A - v_B}{\sqrt{r}} \right) \frac{E\sqrt{2\pi}}{8} \quad (3)$$

$$K_{II} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{u_A - u_B}{\sqrt{r}} \right) \frac{E\sqrt{2\pi}}{8}$$

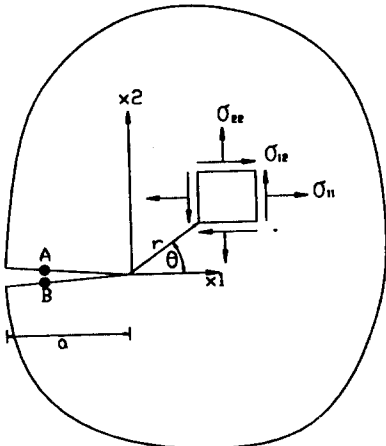


그림 1 균열 주위의 극좌표계

식(3)에 의하여 균열선단에서 몇개의 임의의 점에서 응력확대계수를 계산하고 외삽법(extrapolation)을 사용하여 균열선단, 즉 $r=0$ 인 점의 응력확대계수 K_I, K_{II} 를 구할 수 있다. 그러나, 몇개의 점으로부터 외삽법을 사용하여 $r=0$ 인 점의 응력확대계수를 구하는 관계는 다소 번거로운 방법이라 할 수 있다.

2.2 J-적분법 (J-integral Method)

Rice에 의하여 제안된 J-integral 개념은 Griffith의 에너지 평형원리(principle of energy balance)에 기초하여 균열선단에서 어느 정도 떨어진 적분경로를 정하여 균열선단에서의 응력변형을 분포를 결정할 수 있는 방법이다. 그림 2와 같이 임의의 적분경로에서의 에너지방출을 즉 J-적분값은 선적분 형태로 나타낼 수 있다. 균열선단을 포함하여 두 균열면에 위치한 초기점과 끝점을 가지고 있는 선적분경로를 고려하면 선형탄성범위에서 J-적분값은 다음식으로 나타낼 수 있다.

$$J_{xk} = \int_{\Gamma} Q \, d\Gamma, \quad Q = [W n_k - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} n_j], \quad k=1,2 \quad (4)$$

W 는 변형에너지 밀도로서 다음과 같다.

$$W = \int_0^{\epsilon_{ij}} \sigma_{ij} \, d\epsilon_{ij} \quad (5)$$

Γ 는 균열선단을 포함한 임의의 적분경로이고 σ_{ij} 는 응력장(stress tensor), ϵ_{ij} 은 전체변형율(total strain), n_k 는 등고선 Γ 에 대해 법선벡터 n 의 k 번째 방향을 나타내는 성분이다. i, j 및 k 는 2차원 문제에 있어서는 1과 2의 값을 갖는다. x_1, x_2 는 각각 균열선과 법선방향을 의미하고 있다.

적분값 J_{x1} 과 J_{x2} 는 2개의 독립 적분값으로서 x_1, x_2 각각 2방향에 대해 적분경로 Γ 에 남는 총변형 에너지값으로 나타낼 수 있다. J_{x1} 은 일반적으로 J-적분(J-integral)이라고 정의하고 J_{x2} 는 승적분(product integral)로 정의한다.

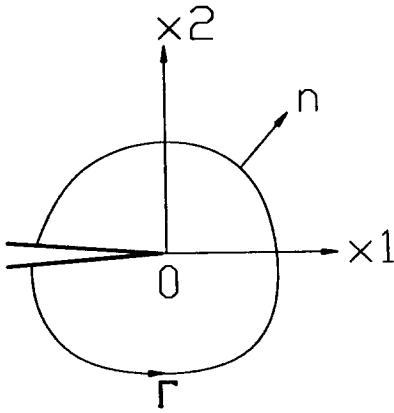


그림 2 균열 선단에서의 좌표계

이와 같이 계산된 J-적분값에서 인장모우드와 전단모우드로 분해하는데는 두 가지 방법이 제안될 수 있다.

(1) 직접법 (Direct Method)

식(4)에 의하여 계산되는 J_{xk} -적분값은 혼합모우드상의 K_I, K_{II} 모우드를 포함하는 전체 J-적분값을 갖게 되므로 이를 K_I, K_{II} 모우드로 분리하는 과정을 거쳐야 한다. 만약 J_I, J_{II} 모우드가 순수 모우드에서의 J-적분값이라고 한다면 J_{xk} 와는 다음과 같은 관계를 가지고 있다.

$$J_{x1} = J_I + J_{II} \quad J_{x2} = -2\sqrt{J_I J_{II}} \quad (6)$$

따라서 J_I, J_{II} 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$J_I = \frac{1}{4} [\sqrt{J_{x1} - J_{x2}} + \sqrt{J_{x1} + J_{x2}}]^2$$

$$J_{II} = \frac{1}{4} [\sqrt{J_{x1} - J_{x2}} - \sqrt{J_{x1} + J_{x2}}]^2 \quad (7)$$

$$J_{total} = J_I + J_{II}$$

식(7)과 같이 J_{xk} 에서 J_I, J_{II} 를 분리하는 방법을 직접법(Direct Method)이라 정의하며 J_{xk} 에서 직접 J_I, J_{II} 를 구할 수 있는 장점을 가지고 있으나, $J_{x2} \neq 0$ 와 J_{x1} 는 전체 적분값을 갖는 조건에서만 적

용이 가능하기 때문에 $J_{x2} \neq 0$ 인 조건을 만족하지 못하면 J_I, J_{II} 를 분리하는 데는 완전하지 못한 단점을 가지고 있어 주로 J_I 조건하에서만 사용하고 있다.

(2) 분해법 (Decomposition Method)

따라서, $J_{x2} \neq 0$ 인 조건을 만족하기 위하여 혼합모우드상에서 계산되는 변위와 응력을 균열면을 기준으로 하는 좌표계로 전환하여 K_I, K_{II} 모우드로 분리하여야 한다. 이러한 방법을 분해법(Decomposition Method)이라 정의하며 K_I, K_{II} 모우드로 분리하는 방법은 다음과 같다.

그림 3에서 보는 바와 같이 균열을 기준으로 한 x_1, x_2 좌표계에서 임의점 $P(x_1, x_2)$ 과 $P'(x_1, -x_2)$ 점의 혼합모우드에 해당하는 변위는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

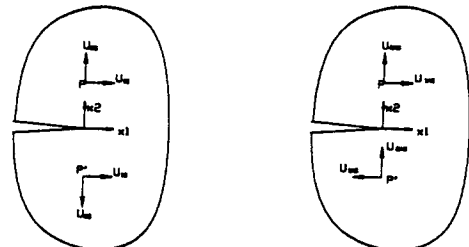
$$\begin{Bmatrix} u_{1P} \\ u_{2P} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{1S} \\ u_{2S} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u_{1AS} \\ u_{2AS} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{Bmatrix} u_{1P'} \\ u_{2P'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{1S} \\ -u_{2S} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -u_{1AS} \\ u_{2AS} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

여기에서 S, AS는 각각 대칭 및 역대칭일때의 요소를 나타내고 있다. 식(8)과 식(9)를 이용하여 점 P와 점 P'에서의 대칭요소와 역대칭요소의 변위를 결정하면 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}_S = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} u_{1P} + u_{1P'} \\ u_{2P} - u_{2P'} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}_{AS} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} u_{1P} - u_{1P'} \\ u_{2P} + u_{2P'} \end{Bmatrix}$$



(a) 대칭 변위 요소

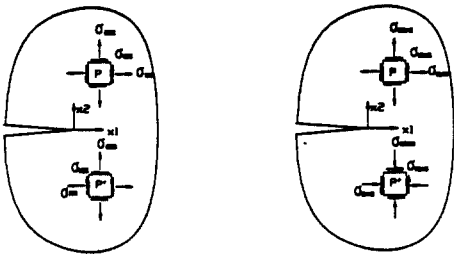
(b) 역대칭 변위 요소

그림 3 균열 주위에서의 대칭 및 역대칭 변위 요소

동일한 방법을 이용하여 점 P와 점 P'에서의 대칭 및 역대칭의 응력요소를 결정하면 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}_S = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \sigma_{11P} + \sigma_{11P'} \\ \sigma_{22P} + \sigma_{22P'} \\ \sigma_{12P} - \sigma_{12P'} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}_{AS} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \sigma_{11P} - \sigma_{11P'} \\ \sigma_{22P} - \sigma_{22P'} \\ \sigma_{12P} + \sigma_{12P'} \end{Bmatrix}$$



(a) 대칭 응력요소 (b) 역대칭 응력요소

그림 4 균열주위에서의 대칭 및 역대칭 응력요소

식 (10)과 식 (11)의 대칭 및 역대칭의 변위와 응력을 이용하여 식(4)에 의해 J_{SX1} , J_{SX2} 및 J_{ASX1} , J_{ASX2} 를 구할 수 있게 되는데 J_{SX2} 및 J_{ASX2} 는 변위 및 응력의 대칭 및 역대칭적인 특성으로 인하여 거의 0에 가까운 값을 얻게 된다. 따라서 K_I , K_{II} 각각의 모드에 대한 J_I , J_{II} 는 다음식과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} J_I &= J_{SX1} \\ J_{II} &= J_{ASX1} \\ J_{total} &= J_{SX1} + J_{ASX1} \end{aligned} \quad (12)$$

3. p-version 유한요소 모델

3.1 적분형 르장드르 다항식(Integral of Legendre Polynomial)

형상함수로 사용되는 적분형 르장드르 다항식은 다음과 같이 정의되며 자세한 내용은 참고문헌 [8,9,10,11]에 나타나 있다.

$$F_{j+1}(\xi) = \sqrt{\frac{2j+1}{2}} \int P_j(t) dt \quad (13)$$

여기에서 $P_j(t)$ 는 Rodrigues에 의하여 다음과 같이 정의되었다.

$$P_j(t) = \frac{1}{2^j j!} \frac{d^j}{dt^j} (t^2 - 1)^j \quad i=0,1,2,3,\dots \quad (14)$$

적분형 르장드르함수를 이용한 계층적 형상함수에서 기본모드(basic mode)는 i 와 j 가 1, 2일 때 $F_i(\xi) \cdot F_j(\eta)$ 로서 나타낼 수 있다. 주변모드(side mode)는 $\eta = \pm 1$ 의 범위에서 $F_i(\xi)$ 에 $(\eta + 1)$ 이나 $(\eta - 1)$ 을 곱함으로써 나타낼 수 있고, $\xi = \pm 1$ 의 범위에서는 $F_j(\eta)$ 에 $(\xi + 1)$ 이나 $(\xi - 1)$ 을 곱함으로써 나타낼 수 있다. 거품모드(bubble mode), 또는 내부모드(internal mode)라고 정의할 수 있는 내부모드는 $F_i(\xi) \cdot F_j(\eta)$ 로서 나타낼 수 있다. 이러한 직교 형상함수의 결과로 생기는 강성도 매트릭스는 1차원 문제에 대해서는 조건수 1을 갖는다. 즉, 대각선이 아닌 항은 모두 0이고 대각선항만이 1이 된다.

3.2 Gauss-Legendre Quadrature Rule

유한요소 방정식에서 하중, 강성도 매트릭스계산 및 J-적분값을 계산하기 위하여 Gauss-Legendre Quadrature 적분법을 이용하였다. Gauss적분법은 불균등하게 배치된 적분점에 대하여 피적분 함수에 가중치를 곱하여 적분값을 산정하는 방법으로서 피적분함수의 차수를 p 라고 할 때 적분점의 갯수는 $(p+1)/2$ 개 이상을 필요로 한다. 수치적분의 차수는 매우 중요하여 충분히 많은 적분점을 사용하면 정확한 적분값을 계산할 수 있다. 본 연구에서는 피적분함수로서 Legendre함수를 사용하였으며 피적분 차수와 관계없이 1개의 요소에 대하여 10×10 의 적분점을 사용하였다.

3.3 J-적분값의 산정

요소에서의 J-적분값은 혼합모드의 경우 식 (12)에 정의된 것과 같이 J_{SX1} 와 J_{SX2} 를 산정하여야 하는데 가우스 적분점 $\xi = \xi_p$ 를 따라서 선적분을

취하도록 하였는데 자세한 내용은 참고문헌[12]에 기술되어 있다. 그러므로, p-version 유한요소 모델을 사용할 때 체눈설계는 그림 8과 같이 균열면을 둘러싸는 방사형요소망을 사용하여 $\xi = \xi_p$ 를 유지하였다. 만약에 모서리를 갖는 격자형체눈으로 요소망을 설계하면 모서리에서 $\xi = \xi_p$ 가 $\eta = \eta_p$ 로 변하게 되어 복잡하게 된다. 한편, J_{SX1} 와 J_{SX2} 는 다음과 같이 정의된다.

$$J_{SX1}^{(e)} = \int_{-1}^{+1} \left\{ \frac{1}{2} [\sigma_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \sigma_{12} [\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{22} \frac{\partial u_2}{\partial x_2}]_S n_1 - [(\sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + (\sigma_{12} n_1 + \sigma_{22} n_2) \frac{\partial u_2}{\partial x_1}]_S \sqrt{(\frac{\partial x_1}{\partial \eta})^2 + (\frac{\partial x_2}{\partial \eta})^2} \right\} d\eta \quad (15)$$

$$J_{ASX1}^{(e)} = \int_{-1}^{+1} \left\{ \frac{1}{2} [\sigma_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \sigma_{12} [\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{22} \frac{\partial u_2}{\partial x_2}]_{AS} n_1 - [(\sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + (\sigma_{12} n_1 + \sigma_{22} n_2) \frac{\partial u_2}{\partial x_1}]_{AS} \sqrt{(\frac{\partial x_1}{\partial \xi})^2 + (\frac{\partial x_2}{\partial \xi})^2} \right\} d\xi \quad (16)$$

여기서, S와 AS는 균열선단 좌표계를 중심으로 대칭 및 역대칭 변위와 응력을 나타내며 식(10)과 식(11)로부터 구할 수 있다. 한편, 식(10)과 식(11)에 표현된 P와 P'에서의 변위와 응력을 구하기 위해서는 기준좌표계와 균열선과 균열선에 법선방향을 국부좌표계로 정의하는 균열선단 좌표계간의 좌표변환매트릭스(coordinate transformation matrix)가 사용되었다.

4. 수치해석 예제

4.1 인장모우드가 발생하는 중앙 균열판

제안된 p-version 유한요소 모델의 수렴성 및 정확성을 검토하기 위하여 첫번째 수치해석 예로

서 인장을 받는 중앙균열판을 취하였다. 그림 1에서 보는 바와 같이 중앙균열판의 해석모델은 구조물의 대칭성을 이용하여 구조물의 1/4영역에 대하여 J-적분법과 COD법에 대하여 각각 그림 5의 (a)와 (b)와 같이 4개의 요소만을 이용하였다. 여기에 이용한 균열판의 제원은 $a/W=0.5$, $h/W=2$ 를 취하였다.

변위의삼법을 이용하여 응력확대계수를 구하기 위해 인장을 받는 중앙균열판에서 균열선단으로부터 임의 거리에 떨어진 몇개의 지점에서 계산된 응력확대계수를 이용하여 외삼법에 의한 균열선단의 응력확대계수를 구하는 방법에 대하여 그림

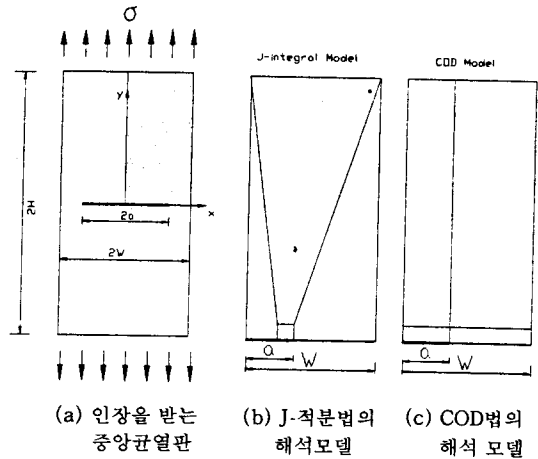


그림 5 중앙균열판 해석모델.

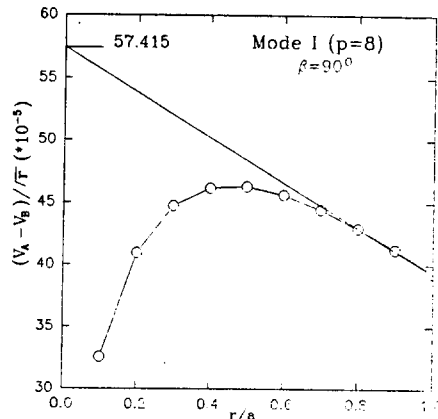


그림 6 중앙균열판의 COD법에 의한 균열선단의 K_I 의 추정

6에 나타내었다.

응력확대계수 계산에 있어서 J-적분법은 프로그램 내에서 계산된 J값을 이용하여 응력확대계수를 계산할 수 있으나, 변위의삽법은 계산된 변위를 이용하여 $r/a=0$ 인 지점의 응력확대계수를 외삽법에 의하여 추정하여야 한다. 따라서 유한요소법을 통하여 계산된 변위를 이용하여 계산된 $(v_A - v_B) / r$ 값을 균열면을 따라 r/a 를 변화시켜 가며 나타내어 보면 그림 6과 같이 균열선단에서 임의의 떨어진 지점에서는 거의 선형에 가까운 분포를 나타내게 된다. 이의 선형성을 이용하여 $r/a=0$ 일 때의 $(v_A - v_B) / \sqrt{r}$ 값을 외삽법에 의하여 추정함으로써 균열선단의 응력확대계수를 추정하게 된다. 이와 같이 J-적분법과 변위의삽법에 의하여 계산된 무차원 응력확대계수의 p-level의 변화에 따른 수렴성조사가 그림 7에 나타나 있다.

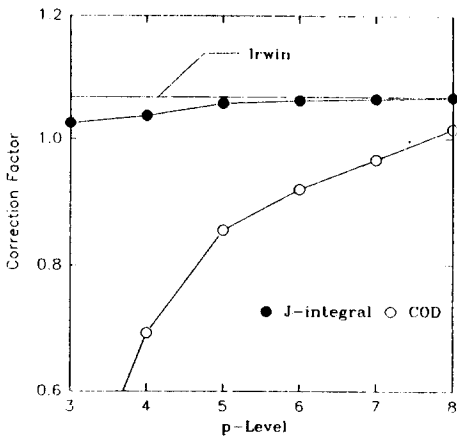


그림 7 p-level 증가에 따른 p-version 유한요소모델의 수렴성 조사

그림 7에서 알 수 있는 바와 같이 J-적분법을 이용하는 경우 p-level=3 에서 Irwin의 해석결과와 2.7%의 상대오차가 발생하였고 p-level이 4 이상에서 부터는 상대오차가 1%의 이하인 해석값을 구할 수 있었다. 반면에 COD 법을 이용한 해석결과와는 p-level이 8차인 경우 Irwin의 해석값과 비교하여 4.8%의 상대오차가 발생하였다. 따라서 p-version 유한요소법을 이용하여 K_I 모우드의 상대

에 있는 균열판의 응력확대계수를 해석하는 경우 COD법에서는 p-level이 8차 이상에서 J-적분법을 이용하는 경우 p-level이 4차 이상에서는 매우 신뢰성있는 해석값을 구할 수 있다는 것을 알 수 있다.

4.2 혼합모우드가 발생하는 중앙 경사균열판

중앙에 경사균열을 가지고 있는 그림 8(a)의 구형판의 해석을 위하여 변위의삽법은 그림 8(b)와 같이 6개의 요소만을 이용하여 p-version 유한요소모델을 구축하였으며, J-적분법의 유한요소 모델은 적분경로를 고려해야 하므로 그림 8(c)와 같이 40개의 요소를 이용하여 모델을 취하였다. 변위의삽법을 이용하는 경우 $a/W=1/3$ 인 구형판에서 응력방향과의 균열경사각도 $\beta=30^\circ$ 일 때 균열선단에서 발생하는 K_I 모우드에 대해 형상함수 차수(p-level)의 증가에 따른 $(v_A - v_B) / \sqrt{r}$ 과 r/a 의 관계와 응력방향과의 균열경사각도 $\beta=60^\circ$ 일 때 K_{II} 모우드에 대하여 형상함수 차수의 증가에 따른 $(u_A - u_B) / \sqrt{r}$ 과 r/a 의 관계를 각각 그림 9와 그림 10에 나타내었다. 그림 9와 그림 10에서 보는 바와 같이 형상함수 차수가 증가함에 따라 점차 수렴하여 나아가고 있음을 알 수 있다. 의 각도를 $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$ 로 변화 하면서 $p=8$ 일때의 K_I 모우드에 해당하는 $(v_A - v_B) / \sqrt{r}$ 과 r/a 의 관계를 그림 11에 나타내었으며, K_{II} 모우드에 해당하는

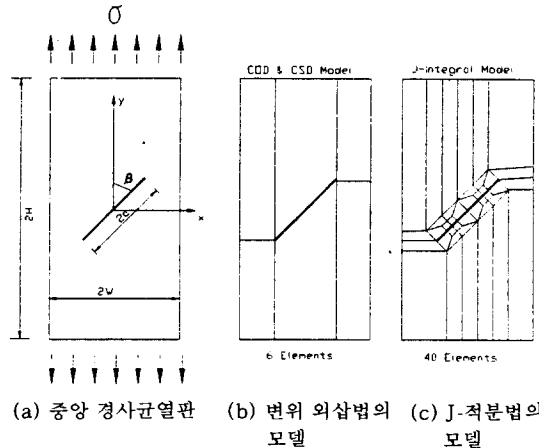


그림 8 변위의삽법 및 J-적분법의 p-version 유한요소 모델

$(u_A - u_B) / \sqrt{r}$ 과 r/a 의 관계를 그림 12에 나타내었다. 변위의삼법을 이용하여 균열선단에서의 응력확대계수를 구하기 위한 $(v_A - v_B) / \sqrt{r}$ 과 r/a 의 관계와 $(u_A - u_B) / \sqrt{r}$ 과 r/a 의 관계를 그림 9부터 그림 12까지에서 보는 바와 같이 r/a 가 0.7이상인 지점에서 선형적인 관계가 발생하였다. $\beta=30^\circ$ 이고 $a/W=1/3$ 인 경우에 대하여 J-적분법을 이용하는 경우 형상함수 차수의 증가에 따라 계산된 K_I 모우드 및 K_{II} 모우드에 대한 무차원 응력확대계수를 이론값과 함께 그림 13에 나타내었다.

그림 13과 같이 $p=2$ 에서 부터 $p=8$ 까지는 K_I 모우드와 K_{II} 모우드에 대하여 약 5%이내의 상대 오차가 발생하였다. 또한 $p=6$ 일때 각각의 적분경로에서 계산되는 무차원 응력확대계수(correction factor or shape factor)는 그림 14에서 보는 바와 같이 K_I 모우드인 경우에는 최대 5%정도의 변화가 보인 반면 K_{II} 모우드에 대해서는 최대 2%정도의 변화가 나타났다.

의 각도를 $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$ 로 변화시켜 가며 K_I 모우드와 K_{II} 모우드에 대해 p-version 유한요소법을 이용한 변위의삼법 및 J-적분법의 결과를 이론값과 함께 그림 15에 나타내었다. 이때 변위의삼법은 4개요소로서 $p=8$ 인 경우이고 J-적분법은 40개의 요소에 $p=6$ 인 경우이다. 그림 14에서 보는

바와 같이 각도의 변화에 따른 p-version 유한요소법에 의한 변위의삼법 및 J-적분법으로 계산된 무차원 응력확대계수는 대체로 5%이내의 상대오차 범위내에서 무차원 응력확대계수를 계산할 수 있음을 알 수 있었다.

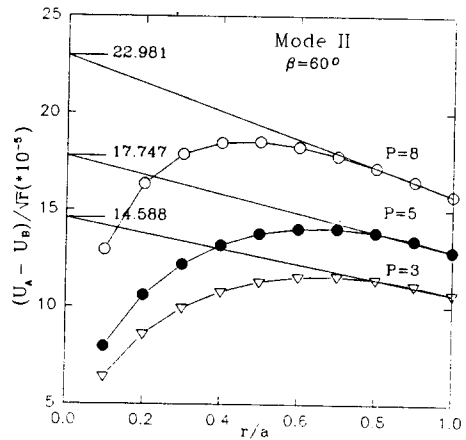


그림 10 변위의삼법을 이용하는 경우 $\beta=60^\circ$ 일 때 p-level 증가에 따른 $(u_A - u_B) / \sqrt{r}$ 과 r/a 의 관계

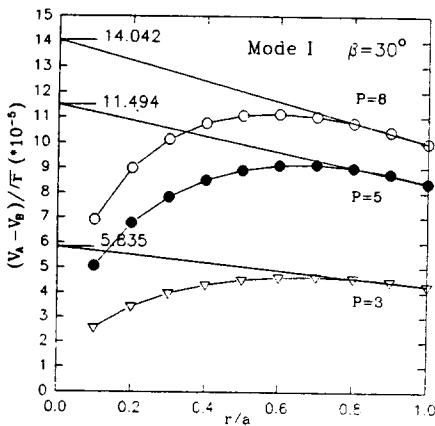


그림 9 변위의삼법을 이용하는 경우 $\beta=30^\circ$ 일 때 p-level 증가에 따른 $(v_A - v_B) / \sqrt{r}$ 과 r/a 의 관계

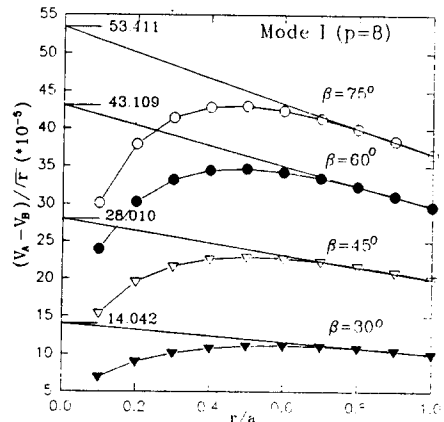


그림 11 변위의삼법을 이용하는 경우 p-Level=8일 때 β 의 변화에 따른 $(v_A - v_B) / \sqrt{r}$ 과 r/a 의 관계

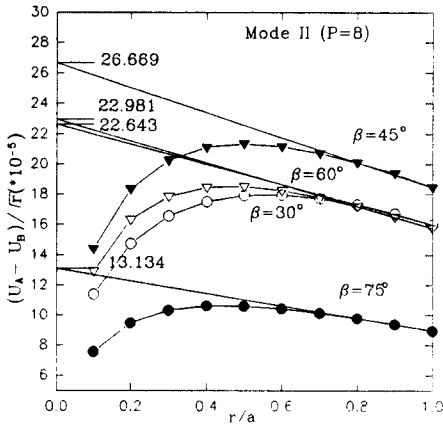


그림 12 변위의삽법을 이용하는 경우 p-level=8일 때 β 의 변화에 따른 $(u_A - u_B) / \sqrt{r}$ 과 r/a 의 관계

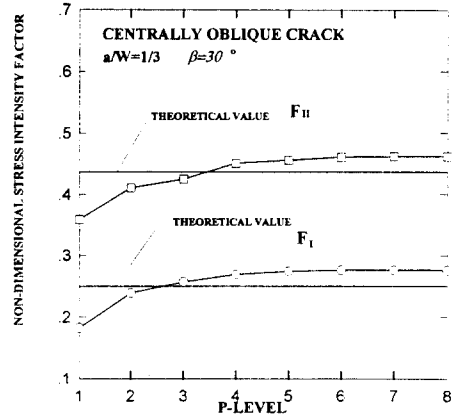


그림 13 $\beta=30^\circ$ 일 때 J-적분법을 이용하는 경우 p-level의 증가에 따른 무차원 응력확대계수의 수렴성

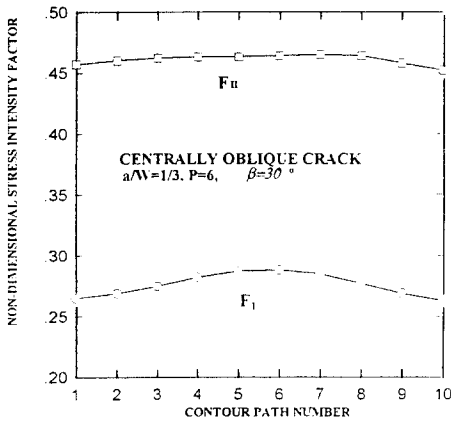


그림 14 $\beta=30^\circ$ 일 때 J-적분법을 이용하는 경우 임의의 적분경로에서 산정된 무차원 응력확대계수 ($p=6$)

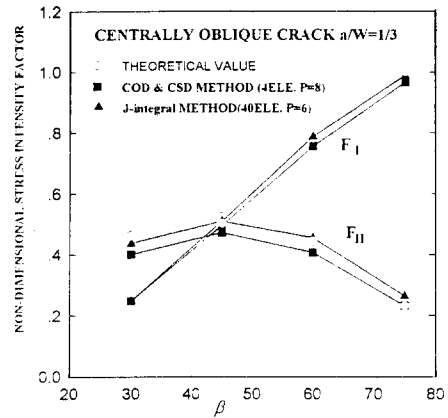


그림 15 균열의 경사각 β 의 변화에 따른 무차원 응력확대계수의 변화($a/W=1/3$)

Table 1 중앙에 경사균열을 가지고 있는 평판의 경사각 β 의 변화에 따른 무차원 응력확대계수 F_I 과 F_{II} 의 비교($a/W=1/3$)

β	F_I			F_{II}		
	Theoretical Value	p-version		Theoretical Value	p-version	
		COD	J-integral		COD	J-integral
30°	0.250	0.248	0.274	0.437	0.400	0.455
45°	0.510	0.495	0.550	0.510	0.471	0.515
60°	0.788	0.755	0.815	0.455	0.406	0.443
75°	0.989	0.965	1.001	0.265	0.232	0.251

5. 결 론

제안된 p-version 유한요소 모델을 인장모우드 상태에 있는 중앙균열판과 혼합모우드 상태에 있는 중앙 경사균열판에 적용하여 본 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 인장모우드 상태에 있는 중앙균열판의 해석 결과 J-적분법을 이용하는 경우 p-level=3 에서 Irwin의 해석결과와 2.7%의 상대오차가 발생하였고 p-level이 4 이상에서 부터는 상대오차가 1%의

이하인 해석값을 구할 수 있었다. 반면에 COD 법을 이용한 해석결과는 p-level이 8차인 경우 Irwin의 해석값과 비교하여 4.8%의 상대오차가 발생하였다.

(2) 혼합모우드상태에 있는 중앙균열판의 결과 변위의삽법은 r/a 가 0.7이상인 지점에서 선형성을 보여주며 40개 요소를 사용한 J-적분법의 경우 $p=6$ 에서 K_I 모우드와 K_{II} 모우드에 대하여 대체로 2% 이내의 상대오차가 발생하는 높은 정확도를 보여 주었다. 또한, $p=6$ 일 때 J-적분을 위한 균열선단에서 임의의 거리가 떨어진 적분경로에서 계산되는 무차원 응력확대계수는 K_I 모우드인 경우에는 최대 5%정도의 변화를 보인 반면, K_{II} 모우드에 대해서는 최대 2%정도의 변화가 나타났다. 그러므로, 서로 다른 적분경로에 따른 J-적분값은 일정함을 보여 주므로 해의 신뢰성을 가질 수 있다. 한편, 경사각을 $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$ 로 변화시킬 때 경사각의 변화에 따른 p-version 유한요소법에 의한 변위의삽법 및 J-적분법으로 계산된 무차원 응력확대계수는 이론값과 비교하여 대체로 약 5%이내의 상대오차 범위내에서 무차원 응력확대계수를 계산할 수 있음을 알 수 있었다.

감사의 글

본 연구는 1994년 교육부 학술진흥재단 지방대 육성과제 연구비 지원을 받아 수행되었습니다. 이에 대해 귀 재단에 깊은 감사를 보냅니다.

참 고 문 헌

1. T.K. Hellen, "On the method of virtual crack extensions," *Int. J. Numer. Meth. in Engrg.*, 9 (1), 187-207 (1975)
2. J.R. Rice, "A path-independent integral and the approximate analyses of strain concentration by notches and cracks," *J. Appl. Mech.*, 35, 376-386 (1968)
3. G.P. Nikishkov and S.N. Atluri, "Calculation of fracture mechanics parameters for an arbitrary three-dimensional crack, by the 'equivalent domain integral' method," *Int. J. Numer. Meth. in Engrg.*, 24, 851-867 (1987)
4. H. Ishikawa, "A finite element analysis of stress intensity factors for combined tensile and shear loading by only a virtual crack extension," *Int. J. Fracture*, 16(5), R243-246 (1980)
5. G.T. Sha, "On the virtual crack extension technique for stress intensity factors and energy release rate calculations for mixed fracture mode," *Int. J. Fracture*, 25(2), R33-42 (1984)
6. S. Cheng and X. Zhang, "Generalized stiffness derivative method for mixed mode crack problems," *Mech. Res. Communications*, 17(6), 437-444 (1990)
7. A.K. Mehta, "P-convergent Finite Element Approximations in Linear Elastic Fracture Mechanics," *Doctoral Dissertation*, Washington University, St. Louis, Missouri (1978)
8. 윤 영필, 우 광성, 박 병기, 신 영식, "인장력을 받는 균열판의 응력확대계수 산정을 위한 p-Version 균열모델," 전산구조공학논문집, 제6권, 제4호, 57-66 (1993)
9. K.S. Woo and P.K. Basu, "Analysis of Singular Cylindrical Shells by P-version of F.E.M.," *Int. J. Solids Structures*, 25(2), 151-165 (1989)
10. K.S. Woo and W.S. Jung, "Stress Intensity Factors for 3-D Axisymmetric Bodies Containing Cracks by P-version of F.E.M.," *Int. J. Struct. Engrg. Mech.*, 2(3), 245-256 (1994)
11. K.S. Woo and C.G. Lee, "p-Version Finite Element Approximations of Stress Intensity Factors for Cracked Plates Including Shear Deformation," *Int. J. Engrg. Fract. Mech.*, 52 (3), 493-502 (1995)
12. 이 채규, 우 광성, 김 영인, "선형탄성 파괴역학 해석에서 J-적분법에 의한 p-Version 균열모델의 적용," 전산구조공학논문집, 제8권, 제4호, 137-148 (1996)

(접수일자 : 1996. 3. 20)