

평면 뼈대 구조물의 설계에 적용된 최적기준

An Optimality Criteria applied to the Design of Plane Frames

정 영 식*
Chung, Young-Shik

김 봉 익**
Kim, Bong-Ik

김 창 규***
Kim, Chang-Kyu

요 약

본 연구는 부재의 응력, 절점의 횡변위 등 거동적 제약과 설계변수에 가해지는 부차적 제약을 받는 평면 뼈대 구조물의 설계에 적용할 수 있는 최적기준을 제안하고자 하는 것이다. 변위 및 응력제약 모두에 1차 근사법을 적용하며 이는 전용력 설계방법과 다른 점이다. 비선형인 제약조건식을 푸는 데 Newton-Raphson 방법을 이용하고 최소치수 제약과 관련하여 설계공간을 축소하는 등 수학적으로 엄밀한 방법으로 재설계 알고리즘을 유도하였다. 적용 예를 통하여 이 방법이 정확한 방법임이 입증되었으며 전용력 설계가 최적설계가 되지 못하는 경우도 종종 발견되었다. 이 방법은 복잡한 계산과정 만큼 그 이용가치가 있으며 단순한 응력비 알고리즘을 이용하는 대부분의 최적기준 방법에 대치되어야 할 것이다. 특히, Computer의 지속적인 발전은 이 방법의 보편적인 이용을 가능하게 할 것이다.

Abstract

This work proposes an optimality criteria applicable to the optimum design of plane frames subject to multiple behavioral constraints on member stresses and lateral displacements of nodes and also to side constraints on design variables. The method makes use of a first order approximation for both deflection and stress constraints instead of the zero order approximation based on the concept of FSD (fully stressed design). A redesign algorithm is derived from a mathematically rigorous method which uses the Newton-Raphson method to solve the system of nonlinear constraint equations and reduces the design space whenever minimum size restrictions become active.

When applied to worked examples it proved more accurate and efficient, and it is often found that optimum designs are not fully stressed designs. This fact suggests that this rigorous method is worth what it claims for complicated computing and thus had better replace the crude stress ratio algorithm adopted by the majority of optimality criteria approaches. This is particularly true as long as we enjoy ever-increasing computing power at negligible costs.

Keywords : optimum design, structure, design, optimality criteria structured optimization

* 정희원, 울산대학교 토목공학과 정교수
** 울산대학교 토목공학과 박사과정
*** 울산대학교 토목공학과 석사과정

• 이 논문에 대한 토론을 1996년 12월 31일까지 본 학회에 보내주시면 1997년 6월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

1. 서 론

구조 최적화(structural optimization)의 시도는 인류의 역사와 함께 한다해도 과언이 아닐 것이다. Arch, Dome, Slab 등의 구조형태가 오랜 세월을 거쳐 가장 적절한 형태로 발전하여 왔음은 주지의 사실이다. 그러나, 수학적 의미의 구조 최적화는 1960년 L.A. Schmit에 의해 시작되었다⁽¹⁾. Schmit는 3-Bar Truss를 예로 하여 전응력계(Fully Stressed Design)가 반드시 최적설계(Optimum Design)가 되는 것이 아님을 밝혔으며, 여기서 수리계획법을 이용하였다. 이후, SLP, SUMT 등 여러 가지 수리계획법(mathematical programming)에 근거한 기법들을 구조 최적화에 활용하려는 시도가 있어왔으며, 1970년대에 와서는 주로 항공기의 설계에 활용되는 Optimality Criteria 방법이 발전되었다.

이러한 Optimality Criteria 방법은 수리계획법이 상당히 많은 computing time을 소요하므로 수리계획법의 대안으로 출현하게 되었고 따라서, computing time에 관한 한 상당히 효율적인 방법인 반면에 적용 대상 구조물의 종류가 한정되는 결함을 갖고 있다. 그럼에도 불구하고 이러한 Optimality Criteria 방법은 우리의 짐작과는 달리 토목구조물 보다는 항공기 구조물 특히, 날개의 설계에 쉽게 적용되었던 것이다.

평면 뼈대 구조물의 최적설계에는 응력비에 의한 방법, 직접탐색에 의한 방법, 변수분리의 원리를 이용한 방법 등 많은 최적화 기법들이 존재한다. 하지만, 이러한 여러 가지 방법들에 의해 수행된 최적화의 결과가 반드시 수학적으로 엄밀한 최적설계라고 볼 수는 없다.

수학적으로 엄밀한 최적설계를 얻기 위해서는 대상 구조물인 평면 뼈대 구조물에 적용할 최적기준(Optimality Criteria)의 유도과 이러한 최적기준을 만족하는 재설계 algorithm의 고안이 필요하다. 본 연구는 구형단면을 가지는 각 부재의 높이(depth)를 설계변수로 하고 각 절점의 변위와 각 부재의 최대응력을 제약조건으로 하는 평면 뼈대 구조물의 설계를 위한 최적기준을 정립하고, 이

최적기준을 만족하는 설계 즉 수학적 의미의 최적설계를 유도할 수 있는 재설계 Algorithm을 마련하고자 하는 것이다.

2. 뼈대 구조물의 최적설계 방법 고찰

2.1 응력비에 의한 방법

송전용 대형 철탑과 같은 철탑 구조물의 최적설계에서는 응력비에 의한 방법을 많이 사용한다. 이 방법은 실제응력의 허용응력에 대한 비(stress ratio)를 계산한 후 이 응력비를 이용하여 설계를 개선해 가는 방법이다. 이러한 응력비에 의한 방법(stress ratio method)은 처짐제약에 대해서는 적용할 수 없고 단지 응력제약만을 받는 구조물의 설계에 적용하여 전응력설계(fully stressed design)를 구하는데 이용되는 것이다. 본 연구에서 대상으로 하는 평면 뼈대 구조물에 이 방법을 적용하면 식(1)과 같은 조건을 만족하면서 각 부재별로 설계변수의 값이 최소가 되도록 할 수 있다.

$$\frac{P}{A} + \frac{M}{S} \leq \sigma_{allow}, \text{ for all members} \quad (1)$$

각 부재는 폭(breadth)이 B, 높이(depth)가 D인 구형단면을 가지며, B는 미리 정해져 있고 D를 변화시켜 위의 제약조건을 만족하면서 비용이 최소가 되는 설계를 구하는 것이다. 식(1)로부터 해당부재의 응력이 허용응력에 도달되게 하는 설계변수(D)는 식(2)와 같은 2차식의 근임을 알 수 있다.

$$\sigma_{allow} D^2 - \frac{P}{B} D - \frac{6M}{B} = 0 \quad (2)$$

이 방법은 컴퓨터가 출현하기 훨씬 이전부터 오랫동안 사용되어 왔으며, 지금까지도 많이 사용되고 있는 설계 방법중의 하나지만, 언제나 수학적으로 엄밀한 진정한 의미의 최적설계를 얻을 수 있는 것은 아니다.

2.2 직접탐색에 의한 방법

직접탐색(direct search)에 의한 방법은 제약조건의 gradient를 이용해서 최적설계에 이르게 하

는 간접적인 방법이 아니라, n 개의 설계변수(x_1, x_2, \dots, x_n)중 일부를 변화시키면서 목적함수 $Y(x)$ 를 평가한 후 그 값들을 서로 비교하여 최적설계(x^*)에 도달하게 하는 방법이다. 따라서, 직접탐색에 의한 최적설계에 있어서의 기본적인 문제는 $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(r)}$ 의 설계가 주어졌을 경우, 이들 각각의 설계에 대한 목적함수 $Y(x^{(1)}), Y(x^{(2)}), \dots, Y(x^{(r)})$ 을 평가하고, 이 결과를 이용하여 다음 단계의 설계 $x^{(r+1)}$ 을 규정하는 일이라고 할 수 있다. 이를 위해서 때때로 gradient 방법을 이용하기도 한다. 설계변수를 이산변수(discrete variable)로 취급한 최적화 문제에 적합한 직접탐색 방법으로는 Coordinate Descent, Rotating Coordinates, Pattern Search, Flexible Polyhedron Search 등의 방법이 있다.

2.3 변수분리의 원리에 의한 방법

RC 구조물은 한 단면이 철근과 콘크리트의 2가지 재료로 구성되어 있기 때문에 단면설계에 필요한 설계변수의 수가 증가하게 되고, 설계변수를 이산변수로 취급함에 따라 어려움이 따른다. 이러한 문제를 해결하기 위해 설계변수와 제약조건 분리의 원리를 사용하여 모든 설계변수 x_1, x_2, \dots, x_m 을 외부설계변수 x_1, x_2, \dots, x_n ($n < m$)와 내부설계변수 $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_m$ 의 두 group으로 나눈다. 일반적으로 최적화 문제는 다음과 같이 표현된다.

$$\text{Minimize } Y(x_1, x_2, \dots, x_m) \tag{3}$$

subject to

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_m) \leq 0, i=1, 2, \dots, L \tag{4}$$

제약조건인 식(4)를 N 개의 외부제약조건과 $L-N$ 개의 내부제약조건으로 나누어 표현하면 다음과 같다.

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0, i=1, 2, \dots, N \tag{5}$$

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_m) \leq 0, i=N+1, \dots, L \tag{6}$$

변수분리의 원리를 RC 구조물의 설계에 적용하여 설계변수와 제약조건을 분류하면 표 1과 같다.

즉 외부제약(변위)은 외부변수(강도, 단면치수)만의 함수인 것으로 본다.

표 1 설계변수 및 제약조건의 분류

구분	설계변수	제약조건
외부	콘크리트 강도 단면치수	최소치수 제한 변위제한
내부	철근 단면적	용량제한

이 방법은 외부제약조건을 만족하는 범위에서 외부변수를 고정시킨 다음 내부최적화를 통하여 내부변수의 값을 정하고, 다시 외부변수를 변화시키면서 외부최적화를 도모하는 것이다^{2,3}. 어떤 탐색방법에 의하든 주어진 설계가 전공간 최적설계라는 확신은 불가능하고 다만 어느 한 국부 최적설계에 도달하는 것이다. 실제로, 총 120,000개의 설계가 존재하는 4층 3경간 평면 뼈대 구조물의 전 설계공간을 탐색한 결과 27개의 국부 최적설계가 발견되었다.²⁾

3. 평면 뼈대 구조물의 최적규준

3.1 목적함수와 제약조건

목적함수와 제약조건을 수학적으로 정식화한 형태는 truss 및 beam^{4,5,6)}의 문제에서와 유사하고, 최적규준의 정립과 재설계 algorithm의 유도도 이전의 연구와 같은 수준의 수학적 정밀도를 부여하였다. 본 연구에서 대상으로 하는 평면 뼈대 구조물은 한층 더 복잡한 문제로서 이의 수학적 표현은 아래와 같이 된다.

$$\text{Minimize } W = \sum_{i=1}^l h_i D_i^\beta \tag{7}$$

subject to

$$u_k - \bar{u}_k \leq 0, k=1, 2, \dots, n \tag{8}$$

$$\sigma_j - \bar{\sigma}_j \leq 0, j=1, 2, \dots, m \tag{9}$$

$$\underline{D}_i - D_i \leq 0, i=1, 2, \dots, l \tag{10}$$

$$h_i = \sum_{s \in I_i} \rho_s L_s B_s$$

$$I_i = \{s \mid d_s = D_i\}$$

n : 자유도 수

- m : 부재 수
- l : 설계변수의 수
- d_s : s 번째 부재의 높이
- D_i : i 번째 설계변수

여기서, 모든 부재는 구형단면을 가지며 폭 B_s , 길이 L_s , 비중량 ρ_s 는 미리 정해진 값을 가지나 높이 d_s 는 설계변수 D_i 에 따라 변하도록 되어있다. 목적함수를 나타내는 식(7)에서 설계변수(D_i)에 β 승을 한 이유는 비용을 고려한 경우로서 그 값이 1이 될 때에는 구조물의 총중량을 나타낸다. 또한, 수학적으로 엄밀한 최적설계를 얻기 위해 사용될 최적규준(optimality criteria)은 Kuhn-Tucker의 필요조건으로 부터 유도되었으며 다음과 같은 형태를 가진다.

$$\frac{\partial W}{\partial D_i} + \sum_{k \in U} \lambda_k \frac{\partial u_k}{\partial D_i} + \sum_{j \in S} \lambda_{n+j} \frac{\partial \sigma_j}{\partial D_i} - \gamma_i = 0 \quad (11)$$

U : Set of active displacement constraints

S : Set of active stress constraints

$$\lambda_k (u_k - \bar{u}_k) = 0 \quad (12)$$

$$\lambda_{n+j} (\sigma_j - \bar{\sigma}_j) = 0 \quad (13)$$

$$\gamma_i (D_i - \bar{D}_i) = 0 \quad (14)$$

$\lambda_k, \lambda_{n+j}, \gamma_i \geq 0$: Lagrange 승수

3.2 제약조건의 도함수(Gradients)

제약조건과 그의 도함수를 설계변수의 함수로 명백히 표현한다는 것은 사실상 불가능하므로 수치적인 접근(numerical approach)에 의해서 규정할 수 밖에 없다. 따라서, 가상하중의 방법(virtual load method)을 사용함으로써 제약조건과 그의 도함수를 설계변수의 명시적인 함수(implicit function)로 나타낼 수 있도록 하였다.

3.2.1 처짐제약

처짐제약은 각 층의 최좌단 절점의 횡변위에만 제한을 가하였다. 따라서, 처짐요소는 관련된 절점에 단위 가상하중(unit virtual load)을 가하여 행해진 내부 가상일의 합으로 표현된다. 즉, 처짐은 식(15)와 같은 형태가 된다.

$$u_k = \sum_{s=1}^m \int_0^{L_s} \frac{12M_s(x)M_s^{(k)}(x)}{E_s B_s d_s^3} dx + \sum_{s=1}^m \frac{F_s F_s^{(k)} L_s}{E_s B_s d_s} \quad (15)$$

where, $d_s = D_i$ for $s \in I_i$

m : 부재의 수

여기서,

$$c_{ik} = \sum_{s \in I_i} \int_0^{L_s} \frac{12 M_s(x) M_s^{(k)}(x)}{E_s B_s} dx$$

$$c_{ik}' = \sum_{s \in I_i} \frac{F_s F_s^{(k)} L_s}{E_s B_s}$$

라 하고, c_{ik}, c_{ik}' 는 설계변수에 대해서 독립인 상수로 가정한다. 즉, 식(15)는 식(16)과 같이 표현할 수 있으며

$$u_k = \sum_{i=1}^l \frac{c_{ik}}{D_i^3} + \sum_{i=1}^l \frac{c_{ik}'}{D_i} \quad (16)$$

설계변수에 대한 처짐제약의 도함수는

$$\frac{\partial u_k}{\partial D_i} = -\frac{3c_{ik}}{D_i^4} - \frac{c_{ik}'}{D_i^2} \quad (17)$$

가 된다. 여기서, c_{ik}, c_{ik}' 는 1회 재설계를 하는 동안에는 변하지 않는 것으로 간주하며, 새로운 설계변수를 산출하여 구조물을 재해석한 후, 새로운 c_{ik}, c_{ik}' 가 계산된다.

3.2.2 응력제약

응력제약은 허용응력설계법을 따랐으며 좌굴 및

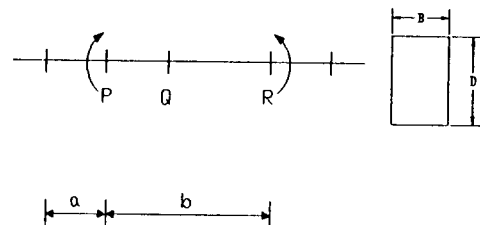


그림 1 최대응력(Q점) 산출을 위한 가상하중

인장응력은 고려하지 않은 대신 압축응력과 휨응력을 합성하여 최대응력이 허용응력을 초과하지 않도록 제약을 가하였다.

부재의 응력과 응력제약의 도함수를 명시적으로 표현하기 위하여, 그림 1과 같이 P와 R에 한 쌍의 가상의 하중을 가한다. 만일, P와 R에 가한 가상하중의 크기가 1이고 P-R간에 작용하는 실제 하중의 모멘트가 M으로 일정하면 P점과 R점에서의 회전변위의 차이($\theta = Mb/EI$)는 내부 가상일의 합으로 나타내어지며 가상하중의 크기를 1대신 ED/2b로 하면 내부 가상일의 합은

$$\frac{Mb}{EI} \times \frac{ED}{2b} = \frac{M}{I} \cdot \frac{D}{2} = \sigma_{max} \quad (18)$$

로서 P-R간 어느 단면에서나 그 단면의 최대 휨응력이 된다. R점을 P점으로 무한히 접근시킨다면 b의 값은 영(Zero)에 무한히 접근할 것이다. θ 의 값은 비록 P점에서의 곡률은 무한대일지라도 거리 b가 무한소이므로 유한한 값을 가지며 그림 2와 같은 처짐모양을 보이게 된다.

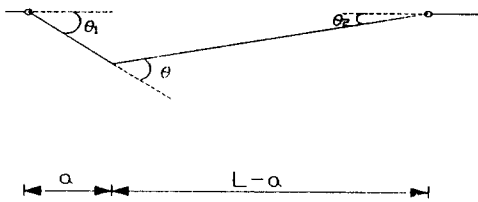


그림 2 P점에 무한히 접근 후의 처짐모양

지금까지의 일련의 과정을 통해서, ED/2b라는 가상의 모멘트 하중을 적용함으로써 임의의 부재에 있어서의 최대응력을 설계변수의 명시적 함수로 나타낼 수 있게 되었다. 즉, 최대 휨응력은 식(19)와 같다.

$$\sigma_j = \sum_{s=1}^m \int_0^{L_s} \frac{12 M_s(x) M_s^{(j)}(x)}{E_s B_s d_s^3} dx + \sum_{s=1}^m \frac{F_s F_s^{(j)} L_s}{E_s B_s d_s} \quad (19)$$

where, $d_s = D_i$ for $s \in I_i$

m : 부재의 수

또한,

$$d_{ij} = \sum_{s=1}^m \int_0^{L_s} \frac{12 M_s(x) M_s^{(j)}(x)}{E_s B_s} dx$$

$$d_{ij}' = \sum_{s \in I_i} \frac{F_s F_s^{(j)} L_s}{E_s B_s}$$

라 하고 d_{ij} 와 d_{ij}' 를 이용하여 응력을 설계변수의 함수로 식(20)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sigma_j = \sum_{i=1}^l \frac{d_{ij}}{D_i^3} + \sum_{i=1}^l \frac{d_{ij}'}{D_i} \quad (20)$$

최대응력을 얻기 위해서, ED/2b라는 가상의 모멘트 하중을 적용하였다. 그런데, 이 가상하중이 설계변수(부재의 depth, D_i)의 함수로 되어있기 때문에 설계변수에 대한 응력제약의 도함수를 다음과 같이 표현해야 한다.

$$\frac{\partial \sigma_j}{\partial D_i} = -\frac{3d_{ij}}{D_i^4} - \frac{d_{ij}'}{D_i^2} + \delta_{ij} \frac{e_j}{D_i^3} \quad (21)$$

where, $\delta_{ij} = 1$ if $j \in I_i$, 0 otherwise.

$$e_j = \frac{6M_j}{B_j}$$

부재의 최대응력은 최대 휨응력과 축방향 압축응력의 조합이므로 P점에 가하는 한 쌍의 가상 모멘트하중에 더하여 해당부재의 양단에 E/L 크기의 가상하중을 가하여야 한다. 그러면 겹침의 원리에 의해 식(19)가 해당부재의 최대응력을 나타낼 수 있다.

3.3 최적규준(Optimality Criteria)의 유도

최적규준을 유도하기에 앞서서, 설계변수와 제약은 재설계 과정이 진행되는 동안에 각각 그들의 역할에 따라 분류된다. 설계변수들은 두 부류(Group 1, Group2)로 나뉘어 지는데, Group 1에

포함되는 설계변수들은 규정된 최소값 보다 큰 값을 가지는 경우로 "Active" 설계변수라 하고, 관련된 Lagrange 승수는 영(Zero)이다. Group 2에 포함되는 변수들은 "Passive" 설계변수라 하며 설계변수의 값이 규정된 최소값에 도달한 변수들의 집합으로서, 관련된 Lagrange 승수는 영(Zero) 보다 크거나 같다. 제약 역시 각각 "Active" 제약과 "Inactive" 제약의 두 Group으로 분류되는데 "Active" 제약과 관련된 Lagrange 승수는 영(Zero) 보다 크거나 같고 "Inactive" 제약과 관련된 Lagrange 승수는 영(Zero)이다.

최적규준은 Kuhn-Tucker의 필요조건인 식(11)에 목적함수의 도함수와 처짐제약과 응력제약의 도함수인 식(17)과 식(21)을 대입함으로써 식(22)와 같이 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \frac{3}{D_i^{(3+\beta)}} \frac{1}{\beta h_i} \left[\sum_{k \in U} \lambda_k C_{ik} + \sum_{j \in S} \lambda_{n+j} d_{ij} \right] \\ & + \frac{1}{D_i^{(1+\beta)}} \frac{1}{\beta h_i} \left[\sum_{k \in U} \lambda_k C_{ik}' + \sum_{j \in S} \lambda_{n+j} d_{ij}' \right] \\ & - \frac{1}{D_i^{(2+\beta)}} \frac{1}{\beta h_i} \sum_{j \in S} \lambda_{n+j} \delta_{ij} C_j + \frac{\gamma_i}{\beta h_i D_i^{(\beta-1)}} = 1 \end{aligned} \quad (22)$$

식(22)에서 좌변 마지막 항의 Lagrange 승수 γ_i 는 Group 1의 설계변수일 경우에는 영(Zero)이고, Group 2의 설계변수일 경우에는 영(Zero) 보다 크거나 같으므로 좌변 마지막 항을 우변으로 이항하여, 식(23)과 같은 최적규준을 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \frac{3}{D_i^{(3+\beta)}} \frac{1}{\beta h_i} \left[\sum_{k \in U} \lambda_k C_{ik} + \sum_{j \in S} \lambda_{n+j} d_{ij} \right] \\ & + \frac{1}{D_i^{(1+\beta)}} \frac{1}{\beta h_i} \left[\sum_{k \in U} \lambda_k C_{ik}' + \sum_{j \in S} \lambda_{n+j} d_{ij}' \right] \\ & - \frac{1}{D_i^{(2+\beta)}} \frac{1}{\beta h_i} \sum_{j \in S} \lambda_{n+j} \delta_{ij} e_j = 1 \quad \text{if } i \in G1 \\ & \leq 1 \quad \text{if } i \in G2 \end{aligned} \quad (23)$$

식(12) (14)는 식(24) (26)과 같이 재형성된다.

$$\lambda_k \left(\sum_{i=1}^l \left[\frac{C_{ik}}{D_i^3} + \frac{C_{ik}'}{D_i} \right] - \overline{u_k} \right) = 0 \quad (24)$$

$$\lambda_{n+j} \left(\sum_{i=1}^l \left[\frac{d_{ij}}{D_i^3} + \frac{d_{ij}'}{D_i} \right] - \overline{\sigma_j} \right) = 0 \quad (25)$$

$$\gamma_i (D_i - \underline{D}_i) = 0 \quad (26)$$

최적설계는 모든 변수에 대해 식(23)을 만족하고 동시에 식(24) (26)을 만족해야 한다. 식(24) (26)은 Lagrange 승수 또는 () 안의 값 들 중 하나가 영(Zero)이 되어야 함을 뜻한다.

4. 재설계 Algorithm

4.1 개요

최적규준을 만족하는 구조물을 설계하기 위해서는 재설계 Algorithm을 확립해야 한다. 재설계 과정에서의 첫 번째 작업은 "Active" 제약을 선정하는 일이며, 선정된 "Active" 제약과 모든 설계변수에 대해 C_{ik} , d_{ij} 등을 산정하게 되며, 이들은 최적규준을 만족하는 새로운 설계변수값을 찾기 위해서 사용된다. 새로운 설계변수값은 c_{ik} , d_{ij} 등의 값이 1회 재설계를 하는 동안에는 변하지 않는 것으로 가정한 식(23) (26)을 만족하게 함으로써 얻을 수 있으며, 새로운 설계변수값을 가지고 구조물을 재해석하며, 그에 따른 새로운 C_{ik} , d_{ij} 등을 산정하고 다시 새로운 재설계 과정이 시작된다. 1회의 재설계 과정이 완료된 후, 새로운 설계변수들의 값을 이전의 값들과 비교하여, 차이가 모든 변수에 대해 허용치 이내에 들어올 경우 설계과정을 모두 끝낸다.

매회의 재설계 과정의 첫 단계는 Lagrange 승수를 예측하는 일이다. 이 Lagrange 승수로 부터 식(23)에 의하여 설계변수의 값을 산정하고, 이들을 식(24), (25)에 대입하여 제약조건의 만족여부를 판단한다. 제약조건이 만족되지 않으면 Newton-Raphson 방법에 의하여 Lagrange 승수 및 설계변수의 값을 개선하게 된다. 이 설계과정은 "Active"한 제약조건식을 이 식의 수 만큼의 Lag-

range 승수에 대하여 푸는 것이며 이 과정에서 λ_k , λ_{n+1} 와 설계변수 사이에 식(23)이 성립되어 Optimality Criteria가 만족되도록 하는 것이다. 제약조건식은 비선형이므로 Newton-Raphson 방법을 이용하며, 이 방법의 진행중 음의 값을 가지는 Lagrange 승수가 출현하는 경우도 있는데, 이는 "Active"였던 제약이 "Inactive"임을 나타내므로 "Active" 제약의 집합으로부터 관련된 제약을 제거해야만 한다.

지금까지는 모든 설계변수를 "Active"라고 간주했지만 재설계 과정의 완료 후, 그들 가운데 일부는 규정된 최소값 보다 작은 값을 가지는 경우도 있다. 그런 경우에는, 최소값으로 대체하여 "Passive" 변수로 만들고 다음 단계의 Newton-Raphson 과정에서는 남아있는 "Active" 설계변수만을 가지고서 원설계공간(Original Design Space)이 아닌 부분설계공간(Subspace)에서 재설계 과정을 진행한다. 여기서 비선형 연립방정식

의 해를 수차례 구해야 하므로 많은 계산 시간이 소요될 것이다. 그러나 원 설계공간에서 이미 산정된 Lagrange 승수의 최종치를 축소된 부분 설계공간에서의 초기치로 그대로 사용하면 매우 빨리 수렴한다.

이상의 과정을 Flow Chart로 나타낸 것이 그림 3이다.

4.2 "Active" 제약의 선정

재설계 과정에서 가장 먼저 해야 할 작업은 "Active" 제약을 선정하는 일이다. 제 1회의 재설계 과정에서는 처짐과 응력제약 중에서 실제값 대 허용값의 비가 가장 큰 제약만을 유일한 "Active" 제약으로 하고 재설계 과정을 되풀이하면서 전 단계에서 "Active"로 고려됐던 제약보다 더 엄격한 (Restrictive) 제약이 발견되면 이들 또한 "Active"로 취함으로써, "Active" 제약의 수는 점차적으로 늘어나게 된다.

이러한 접근방법은 재설계 과정의 초기 단계에서는 실제의 "Active" 제약들이 "Active" 제약으로 취급되지 못하는 단점이 있다. 이로 인해 Biased Design을 야기할 수도 있다. 이러한 부재들에 대해서는 응력비에 의한 방법을 임시로 사용하며, Group 3 설계변수로 분류한다.

4.3 Lagrange 승수의 초기치 설정

Newton-Raphson 방법의 수행을 위해서는 해의 초기치를 먼저 설정해야 하는데 이를 위하여 식(23)에서 c_{ik} , d_{ij} 가 포함되어 있지 않은 항들은 배제하고, 각 항의 값이 동일하면서 합이 1(unit-y)이 된다고 가정한다. 여기서, n_a 를 "Active" 제약의 수라 하고, λ_p 를 p 번째 처짐요소와 관련된 Lagrange 승수라 하면 식(23)과 식(24)로부터 처짐제약과 관련된 Lagrange 승수 λ_p 의 초기치를 다음과 같이 구할 수 있다. 여기서 $c_{ip}'=0$, $\beta=1$ 로 가정하였다.

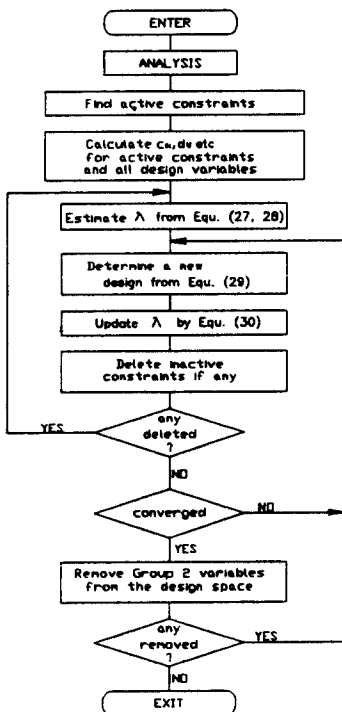


그림 3 재설계 과정의 Flow Chart

$$\lambda_p = \frac{1}{3n_a} \left[\frac{\sum_{+i} c_{ip} \frac{1}{4} h_i^{\frac{3}{4}}}{\bar{u}_p - \sum_{-i} \frac{c_{ip}}{D_i^3}} \right]^{\frac{4}{3}} \quad (27)$$

또한, λ_q 를 q번째 응력제약과 관련된 Lagrange 승수라 하면 식(23)과 식(25)로 부터 응력제약과 관련된 Lagrange 승수 λ_q 를 다음과 같이 구한다.

$$\lambda_p = \frac{1}{3n_a} \left[\frac{\sum_{+i} d_{iq} \frac{1}{4} h_i^{\frac{3}{4}}}{\bar{\sigma}_q - \sum_{-i} \frac{d_{iq}}{D_i^3}} \right]^{\frac{4}{3}} \quad (28)$$

윗 식에서 \sum_{+i} 는 양의 c_{ip} 및 d_{iq} 에 대한 합을, \sum_{-i} 는 음의 c_{ip} 및 d_{iq} 에 대한 합을 뜻한다.

4.4 새로운 설계변수의 결정

Lagrange 승수를 식(24), (25)에 대입하여 만족여부를 검사해야 하나, 이들 제약조건식들이 설계변수의 함수로 되어 있어서 직접 대입할 수 없다. 따라서, 주어진 Lagrange 승수와 최적기준인 식(23)으로 부터 새로운 설계변수의 값을 산정한 후 새로운 설계변수의 값을 제약조건에 대입하여 만족여부를 검사하게 된다. 이를 위해서 식(23)의 최적기준은 다음과 같은 형태로 재형성된다.

$$D_i^{(3+\beta)} - a_i D_i^2 + b_i D_i - c_i = 0 \quad (29)$$

where,

$$a_i = \frac{1}{\beta h_i} \left[\sum_{k \in U} \lambda_k c_{ik}' + \sum_{j \in S} \lambda_{n+j} d_{ij}' \right]$$

$$b_i = \frac{1}{\beta h_i} \sum_{j \in S} \lambda_{n+j} \delta_{ij} e_j$$

$$c_i = \frac{3}{\beta h_i} \left[\sum_{k \in U} \lambda_k c_{ik} + \sum_{j \in S} \lambda_{n+j} d_{ij} \right]$$

식(29)의 $a_i(+, -, 0)$, $b_i(+, 0)$, $c_i(+, -, 0)$ 가 가질 수 있는 부호를 모두 고려하여 조합하면 총 18가지의 경우를 생각할 수 있다. 이 중에서 Descartes의 부호법칙에 따라 양의 실근이 전혀 존재하지 않을 수도 있는 데, 이때는 설계변수의 값으로 최소값을 취했으며, 하나 이상의 양의 실근이 존재할 경우에는 이들 값 중에서 가장 작은 값을 취하도록 하였다. 식(29)에 의해 계산된 설계변수가 규정된 최소값 보다 작더라도 당분간은 그대로 두며, 양의 실근이 발견되지 않는 변수만 최소값으로 고정하고 Newton-Raphson 과정에서 배제한다.

4.5 Lagrange 승수의 개선

식(29)을 통해서 계산된 설계변수들이 제약조건을 만족하지 않을 경우에는 Lagrange 승수는 새로운 Lagrange 승수로 부터 계산된, 보다 개선된 설계변수들에 의해 식(24), (25)가 만족되도록 개선되어야 한다. 이러한 작업들은 Newton-Raphson 방법에 의해 이루어 지며, 다음의 관계가 사용된다.

$$\underline{\lambda}^{(1)} = \underline{\lambda}^{(0)} - \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u_k(\underline{\lambda}^{(0)}) - u_k \\ \sigma_j(\underline{\lambda}^{(0)}) - \bar{\sigma}_j \end{bmatrix}$$

여기서, 식(30)의 Jacobian 행렬은 식(31)~식(34)과 같은 형태를 가진다.

$$X_{11} = \left\{ \sum_{i \in G_1} \left(-\frac{3c_{ik}}{D_i^4} - \frac{c_{ik}'}{D_i^2} \right) \frac{(3c_{ip} + c_{ip}' D_i^2) / \beta h_i}{(3+\beta) D_i^{(2+\beta)} - 2a_i D_i + b_i} \right\} \quad (31)$$

$$X_{22} = \left\{ \sum_{i \in G_1} \left(-\frac{3d_{ij}}{D_i^4} - \frac{d_{ij}'}{D_i^2} + \delta_{ij} \frac{e_j}{D_i^3} \right) \frac{(3d_{iq} + d_{iq}' D_i^2 - \delta_{iq} e_q D_i) / \beta h_i}{(3+\beta) D_i^{(2+\beta)} - 2a_i D_i + b_i} \right\} \quad (32)$$

$$X_{12} = \left\{ \sum_{i \in G_1} \left(-\frac{3c_{ik}}{D_i^4} - \frac{c_{ik}'}{D_i^2} \right) \right\}$$

$$\frac{(3d_{iq} + d_{iq}' D_i^2 - \delta_{iq} e_{iq} D_i) / \beta h_i}{(3 + \beta) D_i^{(2+\beta)} - 2a_i D_i + b_i} \} \quad (33)$$

$$X_{2i} = \left\{ \sum_{i \in G_1} \left(-\frac{3d_{ij}}{D_i^4} - \frac{d_{ij}'}{D_i^2} + \delta_{ij} \frac{e_j}{D_i^3} \right) \frac{(3c_{ip} + c_{ip}' D_i^2) / \beta h_i}{(3 + \beta) D_i^{(2+\beta)} - 2a_i D_i + b_i} \right\} \quad (34)$$

where,

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{1}{\beta h_i} \left[\sum_{k \in U} \lambda_k C_{ik}' + \sum_{j \in S} \lambda_{n+j} d_{ij}' \right] \\ b_i &= \frac{1}{\beta h_i} \sum_{j \in S} \lambda_{n+j} \delta_{ij} e_j \\ c_i &= \frac{3}{\beta h_i} \left[\sum_{k \in U} \lambda_k C_{ik} + \sum_{j \in S} \lambda_{n+j} d_{ij} \right] \\ \underline{\lambda} &= \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+m}\}^T \end{aligned} \quad (35)$$

Jacobian 행렬의 각 요소는 Group 2 설계변수들이 최소값에 고정되어 있으므로 Lagrange 승수에 민감하지 못하기 때문에 Group 1 설계변수에 해당되는 항들의 합으로 표현된다.

만일, 개선된 Lagrange 승수가 제약조건인 식(24), (25)를 만족하는 설계변수를 산출한다면 Newton-Raphson 과정은 종료하게 된다.

4.6 Lagrange 승수의 제거

Newton-Raphson 과정이 진행될 때, 각각의 Lagrange 승수의 값은 많은 진동을 겪으면서 수렴하게 된다. 이는 “Inactive” 제약으로 판명되어 제거되어야 하는, 명확하게 음의 값으로 수렴되는 Lagrange 승수와 아주 작은 양의 값으로 수렴되는 Lagrange 승수를 구별하기 어렵게 한다.

Lagrange 승수가 일시적으로 음수로 변하는 경우, “Active” 제약의 조속한 제거는 Newton-Raphson 방법의 불안정을 야기하고, 관련된 제약이 “Inactive”와 “Active” 사이를 계속해서 넘나드는 반복현상(Looping)을 야기한다. 이런 문제를 해결하기 위해, 음의 값을 가지는 Lagrange 승수를 영(Zero)으로 대체하고, 식(29)에 의해 새로운 설계변수를 산정한 후 재차 Newton-Raphson 과정을 진행시킨다. 2회 연속 음의 값을 가지는 Lag-

range 승수는 관련된 제약을 “Inactive”로 판명하고 “Active” 제약의 집합에서 제외시킨다. 음의 값을 가지는 Lagrange 승수가 다수이면 모두 영(Zero)으로 대체하고, Newton-Raphson 과정을 재차 진행하여 양수로 돌아오는 Lagrange 승수가 하나라도 있다면, 그것을 제외한 나머지 모두를 다시 영(Zero)으로 대체하고 Newton-Raphson 과정을 반복한다.

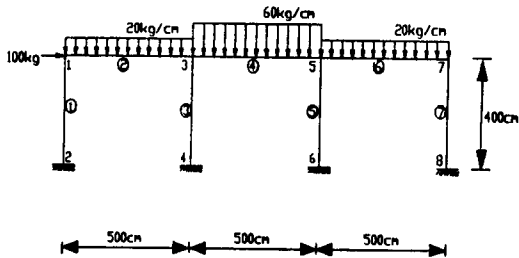
4.7 설계공간의 축소

Newton-Raphson 과정의 수렴 후, “Active”로 고려됐던 설계변수들이 반드시 규정된 최소값 혹은 응력비에 의해 산출된 값 보다 큰 것은 아니다. 모든 “Active” 설계변수가 Group 1에 포함될 만큼 크다면 재설계 과정이 종료되지만 그렇지 않으면, 또다른 Newton-Raphson 과정을 필요로 한다. 새로운 Newton-Raphson 과정을 진행하기 전에, 규정된 최소값이나 응력비에 의해 산출된 값 보다 작은 “Active” 설계변수들은 Group 2나 Group 3으로 전환된다. 그리고, 새로운 Newton-Raphson 과정은 원설계공간이 아닌 부분설계공간(subspace)에서 실행된다.

5. 적용 예

5.1 1층 3경간 구조물

그림 4와 같은 구조물을 대상으로 최적설계를 실시하였다. 1, 7번 부재는 부재단면의 최소높이 제약으로 인해 Group 2 설계변수로 분류되었으며 이로 인해 허용응력에는 도달하지 못하였다. 반면에, 2, 3, 4, 5, 6번 부재는 모두 허용응력에 도달하였으며 설계변수 또한 최소값 보다 커 Group 1 설계변수로 분류되었다. Group 1 설계변수로 분류된 2, 3, 4, 5, 6번의 모든 부재들의 Optimality Criteria는 1.0을, Group 2 설계변수들인 1, 7번 부재는 각각 0.3757, 0.6023으로서 1.0 보다 작은 값을 가짐으로써, 식(23)을 만족하는 것으로 나타



Material Data
 탄성계수 : 240000kg/cm²
 단위체적중량 : 0.02 kg/cm³
 폭 : 40 cm
 허용응력 : 150 kg/cm²
 최소높이 : 1 cm

그림 4 적용 예제-1

났다. 또한, 관련된 Lagrange 승수 λ 와 γ 가 모두 양수이므로, 현재의 설계가 수학적으로 엄밀한 최적설계임을 알 수 있다.

5.2 2층 2경간 구조물

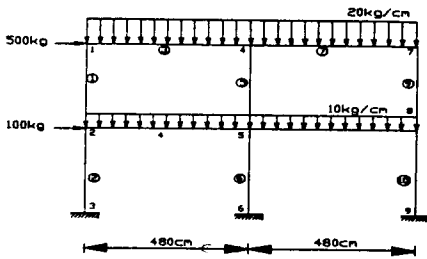


그림 5 적용 예제-2

Material Data는 전철과 동일하며, 구조물 형태와 하중은 그림 5와 같다. Optimality Criteria는 Group 1 설계변수들의 경우에는 1.0, Group 2 설계변수는 1.0 보다 작은 값을 가지고 있다. 응력제약과 관련된 Lagrange 승수 λ 와 부재의 최소치수 제약과 관련된 Lagrange 승수 γ 가 양의 값을 가지고 있으므로 현재의 설계가 최적설계임을 알 수 있다. 2번과 10번 부재는 Group 1 설계변수에 해

당되면서 허용응력에 도달되지 않고 있다. 이는 최적설계와 전응력설계가 서로 다름을 보이고 있다.

5.3 1층 2경간 구조물

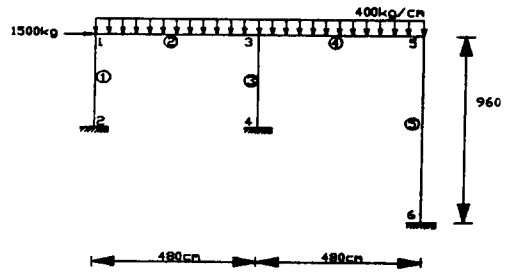


그림 6 적용 예제-3

그림 6과 같은 구조물을 대상으로 삼았으며, 구조물의 Material Data는 1층 3경간 구조물의 경우와 동일하다. 본 논문에서 제시한 최적설계의 결과와 응력비에 의한 설계의 결과가 표 2에 나타나 있다.

표 2에서 응력비에 의한 결과는 전 부재가 허용응력에 도달하여 최적설계를 얻었다고 생각하기 쉽다. 그러나, 1, 5번 부재에서 응력제약과 관련된 Lagrange 승수가 음의 값이다. 이 문제의 전응력설계에서는 Gradient Projection은 나타나지 않으나 Cost Gradient가 Constraint Gradient들에 의해 형성되는 Convex Cone에서 벗어나 있다. 이는 1, 5번 부재의 응력제약이 "Active"가 아닌 상태에서 최적설계가 존재함을 암시하는 것이다.

표 2 최적화 결과의 비교

No.	최적설계			전응력설계(F.S.D)		
	Depth	Stress	λ	Depth	Stress	λ
1	14.76	120.93	0	11.03	150.00	-58.00
2	113.66	150.00	166.19	128.48	150.00	242.12
3	48.95	150.00	194.06	51.04	150.00	270.09
4	112.16	150.00	164.86	123.21	150.00	249.95
5	16.30	112.60	0	10.80	150.00	-141.44
총량	123696.85			127240.81		
증감	2.79%					

본 논문의 최적화 algorithm을 이용한 결과는 2, 3, 4번 부재는 허용응력에 도달해 응력제약에 대해 "Active" 제약으로서 양의 Lagrange 승수를 갖지만, 1, 5번 부재는 허용응력에 이르지 못해 "Inactive" 제약 상태이므로 관련된 Lagrange 승수는 영(Zero)이다. 이로 인해, 이들 부재들의 Depth가 응력비에 의한 설계의 결과 보다 다소 증가하였으나, 이런 효과가 오히려 2, 3, 4번 부재의 Depth에 영향을 미쳐 이들의 Depth를 감소시켰다. 최적화의 대상인 구조물의 중량을 비교하였을 때, 응력비에 의한 결과에 비해 본 논문의 최적화 Algorithm을 통한 결과가 약 2.79%의 감소를 보였다. 이를 통해서, 응력비에 의한 설계가 때에 따라서는 Non-Optimum Design을 유발할 수도 있다는 사실을 확인할 수 있다.

6. 결 론

평면 뼈대 구조물에 대하여 수학적으로 정확한 최적설계를 얻을 수 있는 최적규준 방법을 제시하였다. 이 방법에서 각 부재의 응력제약을 거동적 제약으로 취급하고 1차 근사법을 적용한 것이 1970년대 이후 발표된 대부분의 최적규준 방법과 다른 점이다. 즉, 처짐제약이 더 엄격한 항공기 구조물에서 응력제약은 단순한 응력비 방법을 사용하여 최소치수 제약과 같이 부차적 제약으로 취급되었으며 이로인해 설계과정이 수렴하지 않거나 최적설계가 아닌 설계로 수렴하는 경우도 있었다.

처짐제약이 부과되지 않거나 덜 엄격한 경우 전 응력설계가 거의 최적설계인 것으로 믿어지고 있으나 본 논문의 적용예를 통하여 그렇지 않음이 판명되었다. 따라서, 항상 수학적으로 정확한 최

적설계를 얻을 수 있는 본 연구의 방법은 복잡한 계산과정을 요구함에도 불구하고 그 활용가치가 충분하다고 본다. 금후 보다 현실적인 구조물에의 적용을 위하여(예로서 I형 단면) 계속적인 연구가 필요할 것이다.

참 고 문 헌

1. L. A. Schmit, 'Structural design by systematic synthesis', Proceedings, 2nd Conference on Electronic Computation, ASCE, pp.105-122, 1960.
2. 정석준, "철근콘크리트(RC) 뼈대 구조물의 최적 설계", 울산대학교 토목공학과 석사학위 논문, 1993. 12
3. 정영식, 정석준, 김봉익, "변수분리의 원리를 이용한 RC 구조물의 최적설계", 한국콘크리트학회 1994년도 가을 학술발표회 논문집, 제 6권 2호, pp.267~272, 1994. 11
4. Y. S. Chung, 'Optimal design of civil engineering structures using optimality criteria methods', Ph. D. Thesis, Department of Civil Engineering, Loughborough University of Technology, England, 1982.
5. R. J. Allwood and Y. S. Chung, 'Minimum weight design of trusses by an optimality criteria method', International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 20, pp. 697~713, 1984.
6. R. J. Allwood and Y. S. Chung, 'An optimality criteria method applied to the design of continuous beams of varying depth with stress, deflection and size constraints', Computer & Structures, Vol. 20, No. 6, pp.947~954, 1985.

(접수일자 : 1996. 2. 17)