

Lanczos 알고리즘과 Ritz Vector를 이용한 Component Mode Method에 의한 거대구조물의 동적해석

Dynamic Analysis of Large Structures by Component Mode Method using Lanczos Algorithm and Ritz Vector

심재수* · 황의승** · 박태현***
Shim, Jae-Soo Hwang, Eui-Seung Park, Tae-Hyun

요약

구조물의 동적해석의 주된 관점은 적은 갯수의 모우드형상과 계산과정으로 적정정도의 해를 구하는 것이다. Component mode method는 부분구조물 기법을 이용하여 자유도를 줄이는 방법을 이용하였으나 동하중의 특성이 고려되지 않는 단점이 있으며 이를 보완하기 위한 Ritz Vector법은 많은 반복연산이 필요하며 오차가 가중되는 단점이 있다.

본 연구에서는 Component mode method의 효율성을 개선시키고자 기존의 장점을 유지하면서 직접적분과정에서의 계산량을 현저히 줄일 수 있는 Lanczos 알고리즘을 도입하였다. 이 방법의 효율성을 검증하기 위하여 예제구조물을 해석하여 SAP90의 결과와 비교하였다.

Abstract

The main concern of numerical dynamic analysis of large structures is to find an acceptable solution with fewer mode shapes and less computational efforts. Component mode method utilizes substructure technique to reduce the degree of freedom but have a disadvantage to not consider the dynamic characteristics of loads. Ritz Vector method consider the load characteristics but requires many integrations and errors are accumulated.

In this study, to improve the effectiveness of component mode method, Lanczos algorithm is introduced. To prove the effectiveness of this method, example structure are analyzed and the results are compared with SAP90.

Keywords : numerical dynamic analysis, component mode method, lanczos algorithm

* 정회원 · 경희대학교 토목공학과 교수
** 정회원 · 경희대학교 토목공학과 조교수
*** 경희대학교 토목공학과 대학원 졸업

• 이 논문에 대한 토론을 1996년 12월 31일까지 본 학회에 보내주시면 1997년 6월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

1. 서 론

거대구조물의 동적해석의 주된 관점은 보다 적은 개수의 모우드형상과 계산과정으로 적정정도의 해를 구하는데 있다. 대표적인 구조물의 동적해석법인 모우드 중첩법은 작용하는 동하중이 그 구조물을 주로 진동하게 하는 모우드가 고차 모우드일 경우 많은 수의 모우드를 고려해야 하는 약점이 있다. 또 다른 해석방법인 시간이력 적분법은 시간영역에서 중분에 의한 적분을 하는 근사해법으로, 자유도가 많은 거대 구조물의 경우 그 많은 자유도를 그대로 사용하므로 연립방정식의 차수도 많아서 기억용량이 작은 중·소형 컴퓨터에서는 사용할 수 없는 약점이 있다.

자유도 수를 줄이면서도 해석결과의 신뢰도를 높이고 소형컴퓨터에서도 사용할 수 있는 컴포넌트 모우드법(component mode method)¹⁾은 구조물의 자유도를 줄이는 방법에 있어서 부분구조물(substructure)기법을 이용하였고 각각의 부분구조물의 EIGEN 해석을 수행하여 전체 구조물을 해석하였지만, 여전히 동하중의 특성이 고려되지 않는 단점이 있다. 이를 해소하기 위해 동하중의 특성을 고려할 수 있도록 Ritz Vector를 도입하였으나³⁾, 역시 해석에 사용되는 Ritz Vector 알고리즘은 운동방정식의 변환과정에서 유용한 직교성(orthogonality)을 갖기 위해서 많은 반복연산이 필요하고 오차도 가중되는 단점이 있다.⁴⁾

본 연구에서는 지금까지 개발된 Component Mode Method를 수정하여 기존의 장점을 유지하면서 직접적분과정에서 계산량을 현저히 줄일 수 있는 Lanczos 알고리즘을 도입하여, Component Mode Method의 효율성을 개선시키고자 한다.

이 방법의 효율성을 검증하기 위해 예제구조물을 해석하였으며 그 결과를 SAP90의 결과와 비교하였다.

2. Ritz-Lanczos 알고리즘을 도입한 Component Mode Method

Component Mode Method에서 구조물의 자유

도를 줄일때와 줄여진 구조물의 동적해석을 하는데 사용되는 여러 벡터 중에서 하중의 공간적 특성을 고려할 수 있는 Ritz 벡터는 각각의 벡터를 유도하는 과정에서 이전에 유도된 모든 벡터와 직교성을 만족해야 하기 때문에 많은 반복계산이 필요로 하였고, 그 때문에 오차가 누적되는 단점을 갖고 있었다. 이를 보완하기 위해서 수학적 기법인 Lanczos 알고리즘을 Ritz 벡터 알고리즘에 도입한 Ritz-Lanczos 알고리즘을 이용하여 각각의 벡터를 새롭게 유도하면 새롭게 만들어지는 벡터는 기존의 Ritz 벡터와 달리 바로 전의 두 벡터들과만 직교성을 유지하면 되기 때문에 계산의 반복횟수를 줄일 수 있고 따라서 오차의 누적을 줄일 수 있다. 이 알고리즘은 다음과 같다.

2.1 Ritz-Lanczos 알고리즘

해석에 이용하기 위하여 하중벡터 {P}는 하중분포를 나타내는 load distribution vector {R}과 시간의 함수(amplitude function) f(t)로 분리된다.

$$\{P\} = \{R\} f(t) \quad (1)$$

1) 첫번째 벡터

첫번째 벡터는 시스템의 정적 평형 방정식으로부터 만들어진다.

$$[K] \{q_1\} = \{R\} \quad (2)$$

만들어진 벡터는 질량행렬에 직교하도록 정규화된다.

$$\{\psi_1\} = \frac{1}{\beta_1} q_1 \quad (3)$$

여기서, $\beta_1 = \sqrt{\{q_1\}^T [M] \{q_1\}}$ 이다.

2) 두번째 벡터

두번째 이후의 모드 형상들은 시스템이 바로 앞에서 만들어진 모드형상으로 진동할 때 발생하는 관성력에 의해 생기는 정적 처짐으로부터 만들어진다.

$$[K] \{q_2\} = [M] \{\psi_1\} \quad (4)$$

$$\{\tilde{q}_2\} = \{q_2\} - \alpha_1 \{\psi_1\}$$

$$\alpha_1 = \{\psi_1\}^T [M] \{q_2\} \quad (5)$$

여기서 α_1 은 직교화과정에서 만들어진 계수로 두번째 벡터가 앞의 벡터와 질량행렬에 대해 직교성을 갖는 계수이다.

$$\{\psi_2\} = \frac{1}{\beta_2} \{\tilde{q}_2\} \quad (6)$$

여기서, $\beta_2 = \sqrt{\{\tilde{q}_2\}^T [M] \{\tilde{q}_2\}}$ 이다.

3) 세번째 벡터

$$[K] \{q_3\} = [M] \{\psi_2\} \quad (7)$$

$$\{\tilde{q}_3\} = \{q_3\} - \alpha_2 \{\psi_2\} - \beta_2 \{\psi_1\} \quad (8)$$

$$\alpha_2 = \{\psi_2\}^T [M] \{q_3\}$$

여기서, $\beta_2 = \{\psi_1\}^T [M] \{q_3\}$ 이다.

$$\beta_2 = \{\psi_1\}^T [M] \{q_3\}$$

여기에서 세번째 벡터가 첫번째 벡터와 직교성을 갖기 위한 계수 β_2 가, 두번째 벡터의 normalization factor와 일치한다.

$$\{\psi_3\} = \frac{1}{\beta_3} \{\tilde{q}_3\} \quad (9)$$

여기서, $\beta_3 = \sqrt{\{\tilde{q}_3\}^T [M] \{\tilde{q}_3\}}$ 이다.

4) 네번째 벡터

$$[K] \{q_4\} = [M] \{\psi_3\} \quad (10)$$

$$\{\tilde{q}_4\} = \{q_4\} - \alpha_3 \{\psi_3\} - \beta_3 \{\psi_2\} - \gamma_3 \{\psi_1\} \quad (11)$$

$$\{\psi_4\} = \frac{1}{\beta_4} \{\tilde{q}_4\} \quad (12)$$

여기서 $\beta_4 = \sqrt{\{\tilde{q}_4\}^T [M] \{\tilde{q}_4\}}$ 이다.

역시 β_3 는 세번째 벡터의 normalization factor와 동일하다. 이는 세번째 벡터가 첫번째 벡터와 자동적으로 직교조건을 만족함을 의미한다.⁵⁾

이후로 계속 만들어지는 벡터는 앞의 절차와 같이 단지 바로 전 두 벡터에 대하여만 직교하도록 만들어지며, 그렇게 만들어진 벡터는 그 이전의 모든 벡터들과는 자동적으로 직교 조건을 만족하는 매우 편리한 형태의 Ritz-Lanczos Vector가 만들어진다. 이 벡터는 강성행렬을 tridiagonal 형태로 만들기 때문에 적분과정에서 반복횟수가 Ritz Vector를 사용했을 때에 비해서 훨씬 적다.²⁾

2.2 Component Mode 알고리즘

자유도가 N개인 구조물을 P개의 부분구조물 (Substructure)로 나누고, a개의 Master D.O.F (Boundary D.O.F.)와 b개의 Slave D.O.F. (Interior D.O.F.)로 나누면 r번째 부분구조물의 운동방정식은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} [M_{ss}] & [M_{sm}] \\ [M_{ms}] & [M_{mm}] \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \{\ddot{Z}_s\} \\ \{\ddot{Z}_m\} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} [K_{ss}] & [K_{sm}] \\ [K_{ms}] & [K_{mm}] \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \{Z_s\} \\ \{Z_m\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{F_s\} \\ \{F_m\} \end{pmatrix} \quad (13)$$

r번째 부분구조물에서 Slave D.O.F.를 줄이기 위해서 2.1에서 유도된 Ritz-Lanczos Vector를 사용하여 원하는 수(mr)만큼 줄여둔 Vector를 구하면 아래와 같다.⁶⁾

$$[X]^{(r)} = [\{X_1\} \{X_2\} \{X_3\} \dots \{X_{mr}\}] \quad (14)$$

여기서, $[X]^{(r)}$; r번째 부분구조물의 Ritz-Lanczos Vector.
($b \times mr$).

Master D.O.F.가 모두 zero가 아닌 상태를 고려하면 Slave D.O.F.에 대한 변위벡터 $\{Z_s\}^{(r)}$ 는 다음과 같다.

$$\{Z_s\}^{(r)} = [X]^{(r)} \{Z_m\}^{(r)} + [T_{sm}]^{(r)} \{Z_m\}^{(r)} \quad (15)$$

여기서, $[T_{sm}]^{(r)} = -[K_{ss}]^{(r)} [K_{sm}]^{(r)}$ 이다.

따라서 원래 (a+b)개의 부분구조물의 자유도는 변환행렬 $[T]^{(r)}$ 을 이용하면 (a+mr)개의 자유도로 감소된다. 일반적으로 계산량과 기억용량을 줄이기 위해서 mr는 b보다 적은 수를 선택한다.

$$[T]^{(r)} = \begin{bmatrix} [X]^{(r)} & [T_{sm}]^{(r)} \\ [0]^{(r)} & [I_{mm}]^{(r)} \end{bmatrix} \quad (16)$$

여기서, $[X]^{(r)}, [T_{sm}]^{(r)}$: (b×mr), (b×a) matrix
 $[0], [I_{mm}]^{(r)}$: (a×mr), (a×a) matrix 이다.

$$\begin{aligned} \{Z\}^{(r)} = \begin{pmatrix} \{Z_s\} \\ \{Z_m\} \end{pmatrix}^{(r)} &= \begin{bmatrix} [X] & [T_{sm}] \\ [0] & [I_{mm}] \end{bmatrix}^{(r)} \begin{pmatrix} \{Z_N\} \\ \{Z_m\} \end{pmatrix}^{(r)} \\ &= [T]^{(r)} \{\bar{Z}\}^{(r)} \end{aligned} \quad (17)$$

r번째 부분구조물의 변형된 운동방정식은 다음의 식과 같다.

$$[\bar{M}]^{(r)} \{\ddot{\bar{Z}}\}^{(r)} + [\bar{K}]^{(r)} \{\bar{Z}\}^{(r)} = \{\bar{F}\}^{(r)} \quad (18)$$

여기서, $[\bar{M}]^{(r)} = [T]^{(r)T} [M]^{(r)} [T]^{(r)}$
 $[\bar{K}]^{(r)} = [T]^{(r)T} [K]^{(r)} [T]^{(r)}$
 $\{\bar{F}\}^{(r)} = [T]^{(r)T} \{F\}^{(r)}$ 이다.

전체 운동방정식은 (19)식을 이용해서 P개의 모든 부분구조물을 조합하여 만든다.

$$[\bar{M}] \{\ddot{\bar{Z}}\} + [\bar{K}] \{\bar{Z}\} = \{\bar{F}\} \quad (19)$$

$$[\bar{M}] = \sum_{r=1}^P [\bar{M}]^{(r)}$$

여기서, $[\bar{K}] = \sum_{r=1}^P [\bar{K}]^{(r)}$
 $\{\bar{F}\} = \sum_{r=1}^P \{\bar{F}\}^{(r)}$ 이다.

식(19)을 이용해서 직접적분법인 Newmark Integration으로 동적해석을 하여 변위를 찾는다.

3. 예제해석 및 고찰

본 알고리즘의 효율성을 입증하기 위해 다음과 같이 6개의 Case에 대해서 예제해석을 실시하였다.

그림 1은 해석에 사용된 구조물이고, 표 1에는 자유도 12개(NTOT)의 구조물에 대해서, CASE 1~6까지 각각에 사용된 Boundary D.O.F.의 수(N.B.D), Interior D.O.F.의 수(N.I.D.)와 부분구조물의 수(N.S.U.) 등을 나타내었다.

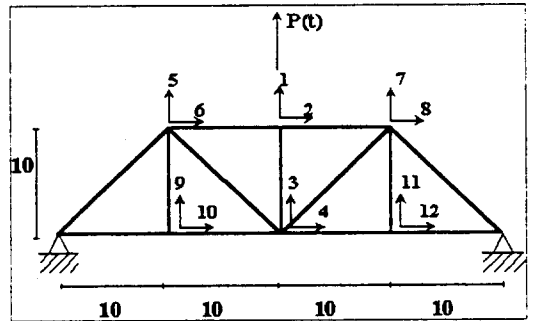


그림 1 해석에 사용된 구조물

표 1 예제해석에 사용된 CASE의 설명

CASE	N.B.D.	N.I.D.	Loaded D.O.F.	P(t)	N.S.U.	NTOT
1	12	0	1	10 sin 20t	1	12
2	8	4	1	10 sin 20t	1	12
3	8	4	1	10 sin 20t	2	12
4	10	2	1	10 sin 20t	1	12
5	6	6	1	10 sin 20t	1	12
6	6	6	1	10 sin 20t	2	12

그림 2는 CASE 1에서 1번 자유도에 하중이 작용하였을 때 1번 자유도에서의 시간에 따른 변위를 12개의 Ritz-Lanczos Vector(R.L.C)를 사용한 결과와 SAP90의 결과를 비교하여 나타내었다. SAP90의 결과는 12개의 모우드를 모두 사용한 모우드 중첩법에 의한 결과이다. 그림 3에는 1번 자유도에 하중이 작용하였을 때 대칭을 이루는 두 자유도(5번, 7번 자유도)에서의 변위를 나타내었다. 그림 2와 그림 3으로부터 본 연구에 사용된

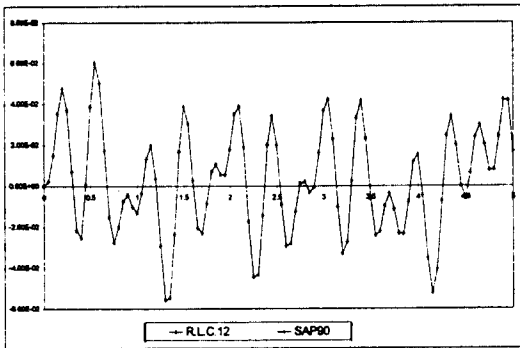


그림 2 1번 자유도에 대한 Full Modeling과 SAP90의 결과 비교

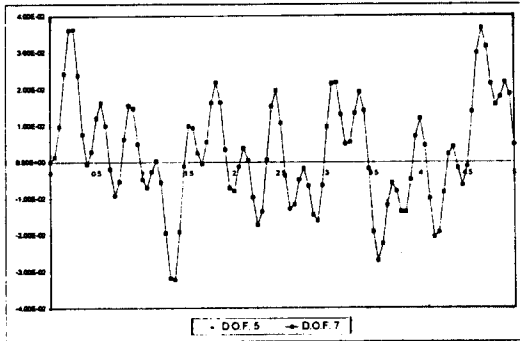


그림 3 예제구조물의 대칭성확인

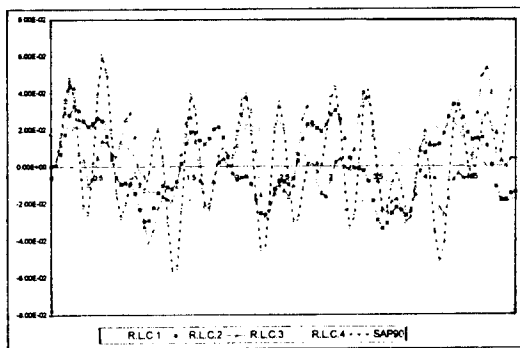


그림 4 Ritz-Lanczos Vector의 개수에 따른 1번 자유도의 변위

프로그램의 결과는 신뢰할 수 있음을 알 수 있다.

그림 4는 1번 자유도에 하중이 작용하였을 때 Ritz-Lanczos Vector의 수(N.B.D)를 점차 늘려

가면서 1번 자유도에 대한 변위 해석의 결과를 나타내었다. 그림에서 보듯이 4개의 자유도(벡터)만을 고려하여도 SAP90의 결과와 비교했을 때 그 오차가 5%이내임을 알 수 있다. 그림 5에는 기존의 Ritz Vector의 수를 늘려가면서 계산한 1번 자유도에서의 변위와 SAP90의 결과를 그림 5에 나타내었다. 이 경우에는 8개의 자유도(벡터)를 고려하였을 때 SAP90의 결과와 5%이내의 오차를 갖는 결과를 얻을 수 있었다.

그림 6에는 벡터의 수에 따른 계산시간을 비교한 그림이고, 그림 7에는 SAP90(모우드 중첩법(M.S.P.))과 Component Mode Method에 Ritz Vector를 사용했을 때(Ritz) Ritz-Lanczos Vector를 사용했을 때(R.L.C.) 각 방법에서 5%이내의 오차를 보이는 해를 얻기위한 최소계산시간을 비교하여 나타내었다. 전체 D.O.F.가 12인 구조물에 대해서 해를 구하는 전체 계산시간(그림 6, 7)은 기존의 Ritz Vector를 도입한 Component mode method에 비해서 78%나 줄어든 것을 볼 수 있다.

이상에서 보듯이 본 연구에 사용된 예제해석의 결과로부터 Lanczos 알고리즘과 Ritz Vector를 이용한 Component Mode method를 이용하여, 축소된 시스템으로도 적은 memory size와 짧은 시간에 정확한 구조물의 동적해석결과를 얻을 수 있었다.

4. 결 론

많은 자유도를 갖는 거대구조물의 해석에 있어서 시스템을 축소하여 해석할 수 있는 Component Mode Method의 단점인 하중의 공간특성성이 고려되지 않는 점을 개선하기 위해 Ritz 알고리즘을 도입하여 어느정도 효율성을 보완하였으나, 적분과정에서 보다 계산량을 줄일 수 있는 Lanczos 알고리즘을 도입하여 계산시간을 줄여보기 위한 본 연구의 결과는 상당히 만족스러운 결과를 보였다.

본 연구에서 해석에 사용한 구조물이 비록 거대 구조물은 아니지만, 자유도가 증가하더라도 전체

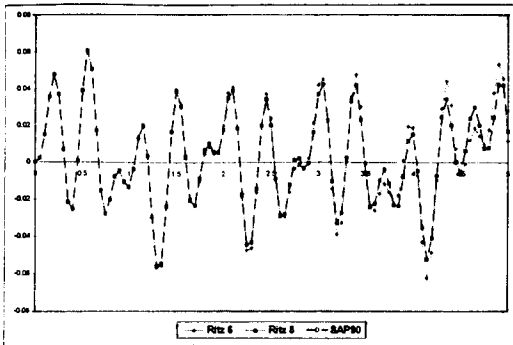


그림 5 Ritz Vector의 개수에 따른 1번 자유도의 변위

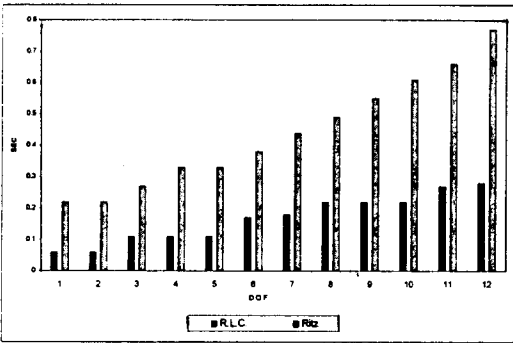


그림 6 Ritz-Lanczos Vector와 Ritz Vector의 개수에 따른 계산시간의 비교

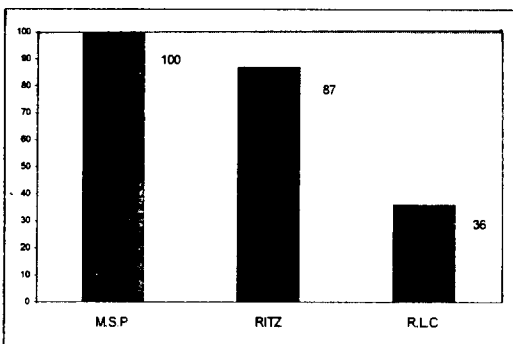


그림 7 M.S.P., Ritz, R.L.C.에서 최소의 계산시간 비교

의 50%정도의 자유도와 Ritz-Lanczos Vector만을 고려해서 해석을 하더라도, 다른 방법에 비해서 적정정도의 결과를 얻는데 있어서 효율적일 것이다.(본 연구에서는 계산시간을 80%정도 줄일 수 있었다)

본 프로그램은 truss구조물에만 적용할 수 있도록 개발되었으므로, beam element에 대해서도 사용할 수 있도록 개발하는 것은 추후의 연구과제이다.

참 고 문 헌

1. Hurty, W.C., "Dynamic Analysis of Structural System Using Component Method", AIAA Journal, Vol.3, No.4, pp.678-685, 1965.
2. Clough Ray W. & Penzien Joseph, "DYNAMICS OF STRUCTURES", McGraw-Hill, 1993.
3. Arnold R.R. and Citerley A.L. "Application of Ritz vectors for Dynamic analysis of large structures", Computer & Structures, 21, pp. 901-907, 1985.
4. 김장목, "동하중의 특성을 고려한 거대구조물의 동적해석", 석사학위논문, 경희대 한국대학원, 1994.
5. 박주경, "Modified Ritz벡터를 이용한 구조물의 동적해석", 석사학위논문, 경희대학교 대학원, 1995.
6. 심재수, 박명균, "Ritz벡터를 이용한 변단면보의 비선형 강체진동해석", 전산구조공학회, 제6권 제 1호, 1993.3

(접수일자 : 1996. 2. 14)