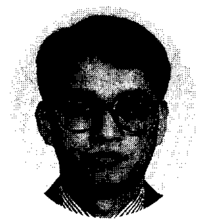
학술기사

돔형 쉘의 구조불안정 문제를 통하여 본 제3의 과학에의 교훈



김 승 덕

1. 서 언

르네상스시대 이후, 특히 합리주의적 계몽운동으로 인하여 자연과학자가 과학적 현상을 이해하게 되었고, 이를 토대로 인류에게 보다 유익한 물질적 풍요를 가져다 주게 되었다. 이와 같은 과정은 근세에 들어 과학.공학 분야가 보다 세분화 되어 발전하게 되었고, 최근에는 '실험 · 관찰'과 '이론 · 모형화'와 함께 수치시뮬레이션 또는 수치실험이라는 제3의 과학(doing science in the third mode)시대가 열리게 되었다. 즉, 실험의 반복과 관찰에 의존하는 실험과학인 제1의 과학, 수학적 취급이 간편하도록 모형화한 이론과학인 제2의 과학과 함께, 비선형계의 복잡한 문제를 수치적으로 해를 얻고, 이를 모아서 일반화 · 추상화하는 수치실험인 제3의 과학으로 발전되어 왔다.

자연계의 물질은 결정, 분자, 원자, 소립자 등의 입자군으로 부터 형성된다. 이러한 입자군 집합의 평균적 거동을 이용하여 연속체 역학이 탄생되었고, 이에 근거를 두고 계산역학이 발전되어 왔다. 그러나 일반적인 자연계의 현상은 연속성을 가정하여 설명할 수 있는 것과 불연속성 또는 입자성을 도입하지 않으면 설명할 수 없는 것이 존재하고, 본질적으로는 빛의 파동설, 입자설과 같이 비선형문제에 귀착된다.

오늘날 기술혁신 전쟁의 최전방에 대응하는 것은 불연속 및 불안정문제를 포함하는 비선형문제이고, 비선형문제에 도전하고 이를 극복하기 위한 최첨예 무기는 바로 컴퓨터라 할 수 있다. 그러나 인간의 본질인 시행착오를 생각해 보면, 오늘날 범람하고 있는 컴퓨터로 부터의 출력 데이터는 매우 위험한 존재가 될 수도 있다.

본 고에서는 제3의 과학 시대가 열린 오늘날, 범람하는 많은 컴퓨터 출력 데이터의 위험성을 자각하기 위해 돔형 쉘의 구조불안정 문제에 얽힌 재미있는 한 예를 설명하고, 이러한 오류에 대응하기 위한 검정 방안을 제시한다.

2. 돔형 쉘의 구조불안정 문제

곡률을 가진 곡면구조 형태인 쉘구조는, 외부하중에 대하여 효과 높게 저항할 수 있는 형태저항형 구조물이며, 기본적인 구조저항 메커니즘으로 구조물의 곡률을 이용하여 주로 면내력으로 힘을 전달할 수 있게 한 구조시스템이다. 따라서 안전하고 경제적인 구조물을 만들 수 있는 장점을 갖고 있으며, 외부 곡면은 미적으로 아름다울뿐 아니라 유체의 저항을 최소화 할 수 있다. 강성을 강

* 정회원 · 세명대학교 건축공학과 전임강사, 공학박사

하게 하면서 무게는 줄이는 방법은 형태저항형 구조물뿐만 아니라 근래의 신소재개발 분야에서도 공통된 관심분야이다. 그러나 이러한 구조적 합리성을 강조한 구조시스템의 필수불가결한 중심 과제는 역시 구조불안정 문제의 해결이라 할 수 있다.

쉘의 구조불안정 문제는 크게 다음과 같이 대별할 수 있다.

- 극한좌굴(snap-through)
- 분기좌굴(bifurcation)
- 굴복좌굴(flattening)

극한좌굴은 구조물의 평형궤도상에서 극한점이 존재하고, 이 극한점에 도달하면 새로운 평형점으로 점프하는 현상이며, 주로 대칭변형모드에 의해 일어난다. 분기좌굴은 구조물의 평형궤도상의 어느 한 점에서 그때까지의 주 변형모드인 대칭변형모드가 아닌 완전히 새로운 비대칭변형모드가 나타나며 2개이상의 평형궤도로 나누어지는 불안정 현상이다. 이때 평형궤도가 나누어지는 점을 분기점이라 하고, 좌굴후 평형궤도의 접선방향을 대표하는 변형모드 즉 분기점에서의 좌굴모드에 따라, 하중모드와 좌굴모드가 직교하는 대칭분기점, 직교하지 않는 비대칭분기점으로 나누어 진다. 또 분기후 평형궤도의 상태 즉 좌굴후 거동에 따라, 안정분기점, 불안정분기점으로 분류된다. 안정분기점은 초기부정에 대하여 덜 민감하나, 불안정분기점인 경우에는 초기부정량의 증가에 따라 좌굴내력이 저하되며, 변위의 점프 또는 급격한 내하능력의 감소 등 매우 민감한 반응을 보인다. 굴복좌굴은 p-δ 관계가 비선형이고, 변위에 대한 하중의 증가율 $dp/d\delta$가 점차 감소하여 $dp/d\delta=0$에 도달한 후에는 하중은 감소하여도 변위가 증가해 결국 파괴하게 되는 불안정 현상이다. 이는 주로 단면의 기하학적 특성으로 인하여 야기된다.

구조연구의 여러분야중에서도, 오랜 역사와 함께 전형적인 연구과제의 하나인 불안정문제에 관한 연구는 1744년 Euler에 의해 기둥의 좌굴하중이 발표된 것을 시점으로 250여년이 지난 지금에도 계속되고 있다. 돔형 쉘의 좌굴문제는 1915년 Zoelly에 의해 정수압상태의 완전구형쉘(complete sphere)의 고전좌굴하중을 필두로, 1960년대 이후에 많은 연구자들에 의해 발표되고 있다. Zoelly는 구심하중을 받는 완전구형쉘의 축대칭변형모드에 의한 좌굴하중을 선형 편미분방정식을 이용하여 다음과 같이 구하였다.

$$q_0=\frac{2}{\sqrt{3(1-\nu^2)}}E\left(\frac{t}{R}\right)^2=\frac{1.16}{\sqrt{(1-\nu^2)}}E\left(\frac{t}{R}\right)^2 \quad (1)$$

여기서 E : Young계수,
ν : Poisson비,
t : 두께,
R : 반지름

Zoelly에 의해 얻어진 고전좌굴하중은, 부분구형쉘(spherical cap)의 좌굴하중을 평가할 때 자주 이용된다. 완전구형쉘에 좌굴이 일어났을 때, 좌굴한 부분구형쉘 부분과 약간의 변형만 일으킨 나머지 부분으로 나눌 수 있고, 두 부분의 경계부 조건은 고정지지(clamped)와 회전지지(hinged)의 중간적인 성질을 갖는다. 따라서 Zoelly의 고전좌굴하중은 고정지지된 부분구형쉘의 좌굴하중보다는 조금 낮고, 회전지지된 부분구형쉘의 좌굴하중보다는 조금 높은 값이 되리라 예상되며, 이는 왜 Zoelly의 고전좌굴하중이 돔형 쉘의 설계에 자주 이용되는지를 설명한다.

그림 1은 등분포 외압을 받는 부분구형쉘의 좌굴하중을 나타낸 것으로, 가로축은 형상파라메터 λ를, 세로축은 Zoelly의 고전좌굴하중으로 규준화한 좌굴하중을 나타낸다. 형상파라메터 λ는 다음과 같이 정의한다.

$$\lambda=2\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}\sqrt{\frac{H}{t}}=2.63\sqrt[4]{1-\nu^2}\sqrt{\frac{H}{t}} \quad (2)$$

여기서 H : 쉘의 높이

그림 1의 좌굴하중분포는 1960년대 초까지의 연구결과이며, 실선은 해석에 의한 결과로 대칭변형모드만을 고려한 것이다. 실험에 의한 고전좌굴하중은 해석에 의한 것보다 꽤 낮은 값을 나타냄을 알 수 있다. 이러한 차이를 규명하기 위해 많은 연

구가 진행되었으나, 그중 Koiter에 의한 初期不整敏感度說과 von Karman에 의한 形狀非線形效果說이 유명하다. 그림중의 대칭모드에 의한 좌굴하중은 von Karman의 형상비선형효과를 고려한 것이다. 형상파라메터 λ가 5이하인 경우에는 실험치와 잘 일치함을 알 수 있다. 그러나 λ가 5이상의 영역에서는 비대칭모드의 발생과 함께 분기좌굴현상이 나타나는 것을 실험결과로 알 수 있다. 이러한 분기좌굴을 파악하기 위해서는 다차원의 비선형방정식을 이용하여 해석을 수행해야 하며, 1960년대에 들어와서 대형 컴퓨터의 이용이 가능하게 되어 비선형해석 분야의 연구가 활발히 진행될 수 있었다.

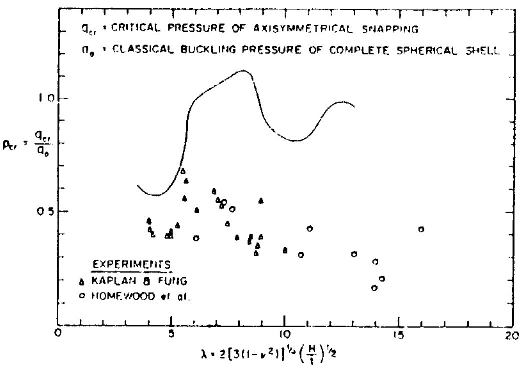


그림 1 1960년

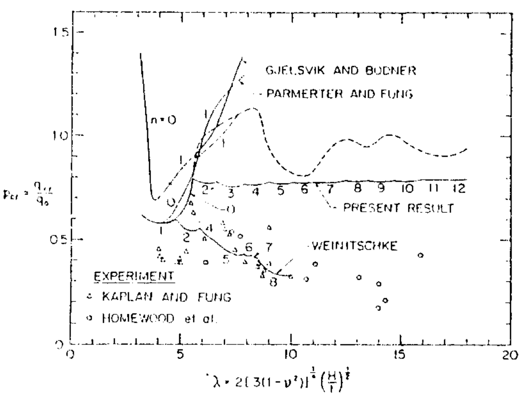


그림 2 1961~1964년

1962년, Weinitschke에 의해 충격적인 연구결과가 발표되었다. 내용은 그림 2에서와 같이 실험치와 완벽하게 일치하는 해석결과(그림중 'weinitschke'로 표기)를 얻었으며, 이는 돔형 쉘의 정적 불안정문제를 완전히 해결하는 쾌거였다. 그러나 1964년, Weinitschke의 연구 내용과 같은 내용이면서 결과는 서로 다른 새로운 연구결과가 Huang에 의해 발표되었다. 그림 2에서와 같이 Huang의 결과(그림중 'present result'로 표기)는 Weinitschke의 결과와는 매우 다르고, 또 실험결과치와도 큰 차이를 나타내고 있었다. Huang의 논문이 발표된 뒤 Weinitschke는 자신의 연구결과를 재검토하였다. 그 결과, 자신의 해석프로그램에 오류가 있음을 발견하게 되었고, 수정된 결과는 Huang의 결과와 일치함을 알게 되었다. Weinitschke는 계산의 실수를 인정하고 1965년에 사과의 논문을 발표하였고, 논문중 다음 글을 실었다. (참고로, Hurbertus Weinitschke는 MIT의 Eric Reissner의 지도로 1958년에 Ph.D.를 수료한 상태이었고, Nai-Chen Huang은 당시 Stanford University의 Research Associate이었다.)

Note. Publication of this paper has been delayed for several reasons. The work was essentially carried out in 1961/62 at the Massachusetts Institute of Technology. The author is indebted to Professor E. Reissner for numerous veneficial discussions. Calculations ware carried out at M.I.T. Computation Center and results for the clamped edge shell were presented at the NASA Symposium on Instability of Shell Structures, October 1962 (see NASA Techn. Note D-1510. pp.481-490, 1962). At this symposium, Prof. Budiansky communicated to the author work on the same problem, which had been performed independently by Huang. In view of some disagreements of the numerical results, publication was delayed in order to re-examine the numerical procedure and results. Unfortunately, a hidden error was found in one of the subroutines used by the machine program, whose discovery is a story of its own! Therefore, the corrected numerical results for the buckling loads contained in Fig.3 below are different from those announced in the NASA Technical Note; they do indeed agree closely with those of Huang as shown in Table 6.

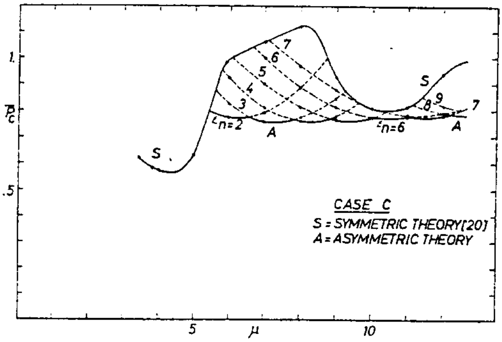


그림 3　1965년

Weinitschke는 수정된 결과를 발표한 논문에서 그림 3과 같은 결과를 실었고, 그후 Weinitschke의 잘못된 곡선은 모든 연구보고서에서 사라지게 되었다.

그후 많은 연구자들에 의해 돔형 쉘의 분기좌굴 문제가 연구되어 왔으나, 30여년이 지난 지금도 이론해석에 의한 값과 실험에 의한 값의 차이는 여전히 좁혀지지 않고 있으며, 계속 숙제로 남아 있다. 그러나 Weinitschke와 Huang의 부분구형 쉘의 좌굴하중에 관한 이야기는, 컴퓨터에 의한 수치해석이 보편화되어 있는 현재, 제3의 과학인 수치해석 또는 수치실험 분야에 종사하는 많은 사람들에게 중요한 공헌을 하고 있다. 수치해석의 결과를 이용하는 많은 연구자 및 기술자들은 Weinitschke와 Huang의 경험을 잊어서는 안될 것이다.

3. 수치실험의 검정

제3의 과학으로서의 수치실험은, 진행과정을 세분화하면 다음과 같이 4단계의 과정으로 구분할 수 있다.

- 정식화
- 변환
- 계산
- 이해 · 해석

또 이들 과정에서 일어날 수 있는 오류를 제거하기 위해서는 다음과 같은 3단계의 검정이 필요하게 된다.

- 모델의 검정
- 계산법의 검정
- 프로그램의 검정

4단계의 과정중 먼저 정식화란, 자연현상을 관찰 · 측정하고, 적절한 가정과 물리학 법칙을 적용하여 수학모델을 만드는 것이다. 자연현상을 나타내는 수학모델은 미시적 고찰로 부터 물질을 모형화하고, 그 성질을 미분방정식과 보조방정식으로 표현된다. 또 대상을 이상화 · 단순화함으로서 수학적 표현이 단순화되고, 해석적 처리가 가능해지며, 일반적인 결론을 도출할 수 있게 된다. 그러나 대개의 경우, 수학모델은 비선형계의 편미분방정식으로 표현되고, 해석적으로 처리가 불가능한 것이 대부분이다.

변환이란, 자연현상을 나타내는 시간 · 공간에 연속인 편미분방정식을 연속의 이산계방정식으로 표현하고, 수치해를 얻기 위한 계산모델을 작성하는 것이다. 이산계방정식을 작성할 때는 해석법의 적합성, 수렴성, 안정성 등에 관한 고려를 하여야 하며, 이산화에 의해 수학모델의 정성적 성질의 변화에 주의하여야 한다.

계산이란, 변환으로 얻어진 계산모델이 컴퓨터로 부터 수치해의 결과를 생성하는 것이다. 이 과정은 계산조건, 파라메터의 조건에 따라 대규모 계산을 실행한다.

이해 · 해석이란, 시뮬레이션의 결과를 통하여, 해석 대상에 대한 이론의 타당성, 신뢰성 등을 검정하는 것이다. 또 복잡한 현상을 시각적 이메지로 변환시켜 현상의 본질을 고찰한다.

위의 4단계의 과정에 의한 수치 시뮬레이션을 이용하여 자연현상을 파악하고저 할 때, 수반되는

오차는 모형화 오차, 측정오차, 절단오차, 반올림 오차 등 4종류로 구분할 수 있다. 이러한 오차를 평가하고 최소화하기 위해서는 3단계의 검정이 필요하다.

3단계의 검정중 먼저 모델의 검정이란, 수학모델이 현상을 대표할 수 있는지를 검정하는 것이다. 계산법의 검정은 수치모델에 대하여 빠르고 정확한 해를 구할 수 있는 알고리즘인가를 검정하는 것이며, 프로그램의 검정은 알고리즘이 정확히 작동하는가를 조사하는 것이다.

최종적인 해석 오차는 위의 3단계의 검정에서 누적된 오차의 총계이고, 이를 최소화하기 위해서는 각 검정 단계에서 정확한 판단과 분석이 필요하다. Weinitschke의 잘못된 곡선은 프로그램의 검정 단계에서의 오류이며, 부분구형쉘의 좌굴하중에 관해 이론해석에 의한 값과 실험에 의한 값과의 큰 차이는 모델의 검정과 계산법의 검정 단계에서의 오류가 누적된 것이라 생각된다.

이상의 각 과정에서의 각 검정을 거침으로서 수치실험 결과는 보다 정성적으로 평가할 수 있게 되며, 신뢰성이 높은 결과들을 모으면 자연계의 현상에 대해 보다 일반적이고 보편적인 해설이 가능하게 된다.

4. 결 언

컴퓨터를 이용하는 것이 보편화된 오늘날, 수치 시뮬레이션 또는 수치실험은 제3의 과학(doing science in the third mode)으로 발전하고 있다. 제1의 과학인 실험과학, 제2의 과학인 이론과학과 함께, 비선형계에의 도전으로 제3의 과학 시대가 열렸다.

본 고에서는 제3의 과학 시대가 열린 오늘날, 범람하는 많은 컴퓨터 출력 데이터의 위험성을 자각하기 위해 돔형 쉘의 구조불안정 문제에 관한 한 예를 설명하고, 이에 대응하는 검정방안을 제시하였다.

구조불안정 문제는 응용역학에서의 전형적인 비선형문제로, 많은 연구자들에 의해 연구되어 왔으며, 컴퓨터를 이용한 계산역학의 발전과 함께 비선형이란 벽은 점차 깨지고 있다. 그러나 앞에서 언급한 Weinitschke와 Huang의 경험과 같이, 인간의 본질이라 할 수 있는 시행착오의 교훈을 잊어서는 안될 것이다.

이론해석가인 Kaplan의 뜻 깊은 다음 말을, 따뜻한 커피 한잔과 함께 다시 한번 생각하며 본 고를 맺는다.

"Never believe a new numerical result until it has been obtained by two independent methods"

참 고 문 헌

1. H. J. Weinitschke, "Asymmetric Buckling of Clamped Shallow Spherical Shell," NASA TND-1510, 1962, 481-490.
2. N. C. Huang, "Unsymmetrical Buckling of Thin Shallow Spherical Shells," J. Appl. Mech., 31, 1964, 447-457.
3. H. J. Weinitschke, "On Asymmetric Buckling of Shallow Spherical Shells," J. Math. Phys., 44, 1965, 141-163.
4. 高橋亮一, "第三の科學としての數値シミュレ-ション," 日本機械學會誌, 96, 1993, 112-115.
5. 金勝德, 偏平構造物の動的安定に關する研究, 東京大學 博士學位論文, 1990.