

열유동학적으로 단순한 점탄성체의 유한요소해석

Finite Element Analysis of Thermorheologically Simple Viscoelastic Solids

심 우 진*
 Sim, Woo-Jin
 박 인 규**
 Park, In-Kyu

.....

요 약

준-정적 선형 2차원 열점탄성 문제들의 유한요소해석을 위하여 가상일의 원리를 근거로 하여 새로운 변분 공식과 유한요소방정식을 유도한다. 이때 점탄성 재료는 열유동학적으로 단순한 물성을 갖는다. $T=T(x)$ 일 경우에 유전적 강성행렬들의 효율적이고 단순화된 계산과정을 소개한다. 몇몇 예제를 해석하고 기존의 발표된 수치결과들과 비교 검토하여 정확성 및 경제성을 입증한다.

Abstract

In this paper, the finite element formulation for the thermal analysis of quasi-static, uncoupled, homogeneous, isotropic and linear viscoelastic problems is presented based on the principle of virtual work. The viscoelastic material is assumed to be thermorheologically simple, which is well known material property in a large class of high polymers. The variational formulation and the finite element equation in matrix form are derived. Effective generation and storage of the hereditary stiffness matrices are given in detail especially for the case of the steady state temperature distribution $T=T(x)$. Some numerical examples are given and compared with published results to show the versatility of the derived finite element formulations.

.....

1. 서 론

점탄성 재료들의 대부분은 온도의 영향을 많이 받는다고 알려져 있으며, 그중에서도 특히 고중합체들(high polymers)은 온도에 매우 민감함을 보인다. 따라서 점탄성 문제해석에서 온도변화를 고

려하는 것은 필수적이다. 점탄성 응력-변형을 관계식 혹은 물성식은 등온의 경우에 선형적으로 잘 표현된다. 그리고 불균일한 온도변화에 대해서는 점탄성 물성함수들이 수평축을 로그시간 변수로 하는 그래프에서 등온의 경우와 형상이 거의 비슷하나 수평축으로 병진이동된 형태를 취한다. 이것

* 금오공과대학교 기계설계공학과 교수
 ** 금오공과대학교 기계설계공학과 석사과정

이 논문에 대한 토론을 1996년 9월 31일까지 본 학회에 보내주시면 1997년 3월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

이 Leaderman¹⁾에 의해서 처음으로 제안된 온도-시간의 등가성 가설의 기본이며, Ferry²⁾에 의해서도 약간 다른 형태로 소개되었다. 후에 Schwarzl과 Staverman³⁾은 이러한 특성을 보이는 재료를 “열유동학적으로 단순한”(thermo-rheologically simple, 이하 TRS로 약칭)이라고 명명하였으며, 실험적으로도 여러 종류의 점탄성 재료에 대해서 그 사실이 확인되어졌다.^{3,4)} 그 후 위와 같은 가설을 바탕으로 열점탄성 문제의 지배식들은 Morland와 Lee⁵⁾, Muki와 Sternberg⁶⁾에 의해서 체계화되었다. 이러한 열점탄성 문제들은 이론적^{5,6)}으로, 유한차분법⁷⁾, 유한요소법^{8,10)}, 그리고 경계요소법¹¹⁾ 등을 이용하여 해석되어져 왔다. 본 논문에서는 등방성선형 열점탄성 문제들의 유한요소법에 의한 해석을 목적으로 가상일의 원리를 근거로하여 새로운 변분공식, 유한요소방정식 등을 유도·제시한다. 그리고 특별히 정상상태의 온도분포 $T=T(x)$ 경우에 유전적 강성행렬들의 단순화되고 효율적인 계산이 가능함을 밝힌다. 또한, 제시된 공식화 과정의 타당성을 입증하기 위하여 평면 변형률 조건하의 몇몇 예제를 해석하여 기존의 발표된 수치결과들과 비교·검토한다.

2. 등온의 점탄성 문제해석을 위한 변분공식

준-정적, 등온, 등방성, 선형 점탄성 문제의 유한요소해석 및 지배방정식들은 참고문헌[12-15]를 참조하며, 변분공식화 과정을 간략하게 요약하면 다음과 같다. 즉,

$$\int_{\Omega} \{\sigma_{ij,j}(x,t) + f_i(x,t)\} \delta u_i(x,t) d\Omega = 0 \quad (1)$$

여기서, σ_{ij} 는 응력, f_i 는 체적력, u_i 는 변위, x 는 위치벡터, t 는 시간, δ 는 변분기호, 그리고 Ω 는 영역을 나타내는 기호이다. 그리고 응력은 이완함수들을 사용하여 다음처럼 표현된다.

$$\sigma_{ij}(x,t) = D_{ijkl}(t) * d\epsilon_{kl}(x,t) \quad (2a)$$

$$= \int_{-\infty}^t D_{ijkl}(t-t') \frac{\partial \epsilon_{kl}(x,t')}{\partial t'} dt' \quad (2b)$$

$$= D_{ijkl}(t) \epsilon_{kl}(x,0) + \int_{0+}^t D_{ijkl}(t-t') \frac{\partial \epsilon_{kl}(x,t')}{\partial t'} dt' \quad (2c)$$

$$= \sigma'_{ij}(x,t) + \sigma_m(x,t) \delta_{ij} \quad (2d)$$

$$= G_1(t) * d\epsilon'_{ij}(x,t) + G_2(t) * d\epsilon_m(x,t) \delta_{ij} \quad (2e)$$

$$= 2\mu(t) * d\epsilon'_{ij}(x,t) + 3k(t) * d\epsilon_m(x,t) \delta_{ij} \quad (2f)$$

여기서, $D_{ijkl}(t)$ 는 이완함수의 일반적 표현이며, ϵ_{ij} 는 변형률 $\{\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\}$, σ'_{ij} 는 편차응력, ϵ'_{ij} 는 편차변형률, $\mu(t) = \frac{1}{2}G_1(t)$ 및 $k(t) = \frac{1}{3}G_2(t)$ 는 각각 등온 등방성 선형 점탄성체의 전단 및 체적 이완함수이며, 탄성문제에서의 전단계수 및 체적계수의 의미를 갖는다. 그리고, * 기호는 Stieltjes convolution¹⁵⁾으로서 식 (2a-c) 처럼 정의되며, δ_{ij} 는 Kronecker's delta, 평균응력 $\sigma_m = \frac{1}{3}\sigma_{kk}$, 그리고 평균변형률 $\epsilon_m = \frac{1}{3}\epsilon_{kk}$ 이다.

식 (1)을 부분적분하고, divergence 이론을 사용하여 최종적으로 다음의 결과를 얻을 수가 있다.

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}(x,t) \delta \epsilon_{ij}(x,t) d\Omega = \int_{\Gamma} t_i(x,t) \delta u_i(x,t) d\Gamma + \int_{\Omega} f_i(x,t) \delta u_i(x,t) d\Omega \quad (3)$$

여기서, 표면력 $t_i = \sigma_{ij}n_j$, Γ 는 경계면이며, 모든 외력 및 종속함수들은 $t=0^+$ 이후에 거동하는 것으로 가정한다. 식 (3)은 준-정적, 선형 점탄성 문제에 대한 가상일의 원리의 표현이라고 생각할 수 있다.

3. TRS 점탄성 재료의 문제해석을 위한 변분공식

열유동학적으로 단순한(TRS) 열점탄성 문제의 지배방정식들^{5,6)}은 등온의 경우와 비교할 때 평형 미분식과 변형률-변위 관계식은 동일하나, 구성방정식에서 조금 다르다. 즉,

$$\sigma'_{ij}(x,t) = \int_{-\infty}^t G_1(\xi - \xi') \frac{\partial}{\partial t'} \varepsilon'_{ij}(x,t') dt' \quad (4a)$$

$$\sigma_{kk}(x,t) = \int_{-\infty}^t G_2(\xi - \xi') \frac{\partial}{\partial t'} \{ \varepsilon_{kk}(x,t') - 3\alpha_0 \theta(x,t') \} dt' \quad (4b)$$

식 (4a, b)를 식 (2e)와 비교하면 $G_1(\xi)$, $G_2(\xi)$ 함수는 $G_1(t)$, $G_2(t)$ 함수로부터 t 를 ξ 로 대치시켜서 얻어짐을 알 수 있다. ξ 는 등가시간(reduced time)으로서

$$\xi = \xi(x,t) = \int_0^t \phi(T(x,\lambda)) d\lambda, \quad \xi' = \xi(x,t') \quad (5)$$

로 정의되며, θ 는 등가온도(pseudo temperature)로서

$$\theta(x,t) = \frac{1}{\alpha_0} \int_{T_0}^{T(x,t)} \alpha(T') dt', \quad \alpha_0 = \alpha(T_0) \quad (6)$$

처럼 정의된다. 식 (6)에서 $\alpha(T)$ 는 온도의 지배를 받는 열팽창계수이며, α_0 는 기준온도 T_0 에서의 값이다. 만약 $\alpha(T) = \alpha_0 = \text{일정}$ 이라면

$$\theta(x,t) = T(x,t) - T_0 \quad (7)$$

가 된다. 열점탄성 응력-변형률 관계식 식(4a, b)가 등온일 경우의 식 (2)와 다른 점은 이완함수의 독립변수가 ξ 로 바뀌었다는 것과 열변형을 고려했다는 것이 다르다. 그리고 구성방정식 (4a, b)는 식 (2a)와 같은 표현으로 다음처럼 쓸 수가 있다. 즉,

$$\sigma_{ij}(x,t) = D_{ijkl}(\xi) * d\{ \varepsilon_{kl}(x,t) - \varepsilon_0(x,t) \delta_{kl} \} \quad (8)$$

여기서

$$\varepsilon_{ij}(x,t) = \varepsilon_{ij}^e(x,t) + \varepsilon_0(x,t) \delta_{ij} \quad (9)$$

이고, ε_{ij} 는 총변형률, ε_{ij}^e 는 외력에 의한 변형률, 그리고 ε_0 는 열변형률로서

$$\varepsilon_0(x,t) = \alpha_0 \theta(x,t) \quad (10)$$

이며 $\theta(x,t)$ 는 식 (6)과 같다. 식 (8)을 식 (3)에

대입하고 정리하면

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} D_{ijkl}(\xi) * d\varepsilon_{ij}(x,t) \delta\varepsilon_{ij}(x,t) d\Omega \\ &= \int_{\Gamma} t_i(x,t) \delta u_i(x,t) d\Gamma \\ &+ \int_{\Omega} f_i(x,t) \delta u_i(x,t) d\Omega \\ &+ \int_{\Omega} D_{ijkl}(\xi) * d\varepsilon_0(x,t) \delta_{kl} \varepsilon_{ij}(x,t) d\Omega \end{aligned} \quad (11)$$

가 된다. 식 (11)는 TRS 점탄성 재료의 선형 열점탄성 해석을 위한 변분공식이다.

4. TRS 점탄성 재료의 문제해석을 위한 유한요소방정식

식 (11)의 근사해를 구하기 위하여 종속함수 $u_i(x,t)$ 가 변수분리 및 Ritz의 근사식 형태로 표현된다고 가정한다. 즉,

$$u_i(x,t) = \sum_{n=1}^N \Psi_n(t) u_i^n(x) \quad (12)$$

여기서 t 는 현재의 시간절점 N 에 해당되는 시간이며, $\Psi_n(t)$ 는 전 시간구간에 관한 내삽함수(global time interpolation functions), $u_i^n(x)$ 는 $t=t_n$ 에서의 변위장으로서 미지함수, 그리고 n 은 임의의 시간절점이다.

식 (11)에서 체적력항을 무시하고, 식 (12)를 대입시키고 정리하면

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} D_{ijkl}(\xi) * du_{k,l}(x,t) \delta u_{i,j}^N(x) d\Omega \\ &= \int_{\Gamma} t_i(x,t) \delta u_i^N(x) d\Gamma \\ &+ \int_{\Omega} D_{ijkl}(\xi) * d\varepsilon_0(x,t) \delta_{kl} \delta u_{i,j}^N(x) d\Omega \end{aligned} \quad (13)$$

이 된다. 식 (13)에서 시간변수에 관한 유전적분(hereditary integral) 항을 풀기 위해서 시간축을 등간격으로 나누고 변위함수 $u_i(x,t)$ 가 각 시간구간에서 선형적으로 변화한다고 가정한다[그림 1 참조]. 즉,

$$u_i(x,t) = \sum_{n=1}^{N-1} \{ \varphi_1(t) u_i^n(x) + \varphi_2(t) u_i^{n+1}(x) \} \quad (14)$$

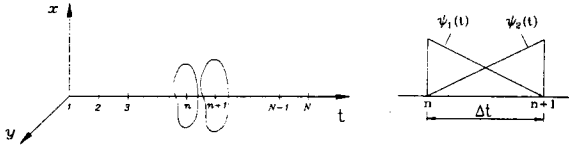


그림 1(a). 공간과 시간 좌표축 그리고 시간축의 분할 :

n =임의의 시간절점, N =현재의 시간절점

그림 1(b). 임의의 시간구간에서의 선형적 내삽함수

여기서 $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ 는 $t_n \leq t \leq t_{n+1}$ 에서 시간에 관한 선형의 내삽함수로서

$$\varphi_1(\tau) = \frac{t_{n+1}-\tau}{\Delta t}, \varphi_2(\tau) = \frac{\tau-t_n}{\Delta t} \quad (15)$$

이며, 시간절점은 다음처럼 정의한다.

$$t_n = (n-1)\Delta t, t_{n+1} = n\Delta t \quad (16)$$

식 (15)를 식 (13)에 대입하면,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} D_{ijkl}(\xi) u_{k,l}(x,0) \delta u_{i,j}^N(x) d\Omega + \\ & \frac{1}{\Delta t} \sum_{n=1}^{N-1} \int_{\Omega} \left[\int_{t_n}^{t_{n+1}} D_{ijkl}(\xi - \xi') dt' \right] \\ & \quad \{u_{k,l}^{n+1}(x) - u_{k,l}^n(x)\} \delta u_{i,j}^N(x) d\Omega \\ & = \int_{\Gamma} t_i(x,t) \delta u_i^N(x) d\Gamma \quad (17) \\ & + \int_{\Omega} \int_0^t D_{ijkl}(\xi - \xi') \frac{\partial}{\partial t} \{ \varepsilon_0(x,t') \delta_{kl} \} dt' \delta u_{i,j}^N(x) d\Omega \end{aligned}$$

이 된다. 식 (17)을 동온의 경우^{13,14)}의 결과식과 비교하면 이완함수 D_{ijkl} 이 ξ 의 함수, 즉 시간 변수 이외에 공간변수의 함수이며, 열변형이 고려된 점이 다르다. 식 (17)을 유한요소법의 개념을 도입하여 행렬식으로 표현하면 다음에서처럼 등방성 선형 열점탄성 문제해석을 위한 시스템 연립 방정식이 유도된다. 즉,

$$\begin{aligned} & [\underline{K}(\xi - \xi')]_{N-1}^N \{u^N - u^{N-1}\} \\ & = - \sum_{n=1}^{N-2} [\underline{K}(\xi - \xi')]_{n+1}^{n+1} \{u^{n+1} - u^n\} \\ & \quad - \Delta t [\underline{K}(\xi)] \{u^1\} + \Delta t \{F\} \quad (18) \end{aligned}$$

여기서,

$$[\underline{K}(\xi - \xi')]_{N-1}^N = \sum_{e=1}^E \int_{\Omega^e} [B]^T [\underline{D}(\xi - \xi')]_{in}^{in} [B] d\Omega \quad (19a)$$

$$[\underline{K}(\xi - \xi')]_n^{n+1} = \sum_{e=1}^E \int_{\Omega^e} [B]^T [\underline{D}(\xi - \xi')]_{in}^{in+1} [B] d\Omega \quad (19b)$$

$$[K(\xi)] = \sum_{e=1}^E \int_{\Omega^e} [B]^T [D(\xi)] [B] d\Omega \quad (19c)$$

$$\{F\} = \{F_s\} + \{F_0\} \quad (19d)$$

$$\{F_s\} = \sum_{e=1}^E \int_{\Gamma^e} [N]^T \{t_i(x,t)\} d\Gamma \quad (19e)$$

$$\{F_0\} = \sum_{e=1}^E \left[\int_{\Omega^e} [B]^T [D(\xi)] \{ \varepsilon_0(x,0) \} d\Omega \quad (19f)$$

$$+ \int_{\Omega^e} \int_0^t [B]^T [D(\xi - \xi')] \{ \varepsilon'_0(x,t') \} dt' d\Omega \right]$$

$$[\underline{D}(\xi - \xi')]_{in}^{in+1} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} [D(\xi - \xi')] dt' \quad (19g)$$

$$[D(\xi)] = [D_{ijkl}(\xi)] \quad (19h)$$

식 (19a-h)에서 $[N]$ 은 형상함수 행렬, $[B]$ 는 변형률-변위 행렬로서 [16]에서의 정의와 같으며, $\{F_s\}$ 는 표면력, $\{F_0\}$ 는 열변형에 의한 외력, 그리고 $\{ \varepsilon'_0(x,t) \} = \frac{\partial}{\partial t} \{ \varepsilon_0(x,t) \} \delta_{kl}$ 이다. 열점탄성행렬 $[D(\xi)]$ 는 시간과 공간의 함수로서 재료의 물성이 불균질한 것처럼 보이게 한다.

5. 점탄성 물성행렬의 적분

등온, 등방성, 선형 점탄성 문제해석을 위한 점탄성 물성행렬 $[D(t)]$ 및 그것의 시간에 관한 정적분 $[\underline{D}(t-\tau)]_{in}^{in+1}$ 에 대한 표현은 참고문헌 [12-14]에 유도되어 있으며, 그때 수식적 표현을 위하여 점탄성 재료는 정수압 변형시 탄성의 성질을 갖고, 전단변형시 표준화된 3요소 고체모델의 특성으로 거동함을 가정한다. 즉,

$$\begin{aligned} \mu(t) &= \mu_0 \{ c + (1-c) e^{-t/\tau_0} \} \\ k(t) &= k_0 \quad (20) \end{aligned}$$

여기서, μ_0, k_0 는 초기탄성계수, c 는 상수, τ_0 는 이완시간이다. 그리고, 본 논문에서는 평면변형률의 경우를 예로써 전개하기로 한다.

TRS 점탄성 재료에 대한 물성행렬은 등온의 물성행렬 $[D(t)]$ 에 t 대신 ξ 로 바꾸어 구한다. 즉,

$$[D(\xi)] = \begin{cases} d_{11} = d_{22} = p_4 + p_5 e^{-\beta_1 \xi} + p_6 e^{-\beta_2 \xi} \\ d_{12} = d_{21} = q_4 + q_5 e^{-\beta_1 \xi} + q_6 e^{-\beta_2 \xi} \\ d_{33} = w_1 + w_2 e^{-\lambda \xi} \end{cases} \quad (21)$$

여기서 d_{ij} 는 행렬 $[D(\xi)]$ 의 요소를 의미하며 상수들 $p_4, p_5, p_6, q_4, q_5, q_6, w_1, w_2, \beta_1, \beta_2, \lambda$ 는 [12-14]에 수록되어 있으며, 혼돈을 피하기 위해서 참고 문헌의 표기에서 ξ_1, ξ_2 를 본 논문에서는 β_1, β_2 로, α 로, 그리고 λ 를 τ_0^{-1} 로 바꾸었다. 참고로, 평면응력의 문제일 때는 $p_4, p_5, p_6, q_4, q_5, q_6, \beta_1, \beta_2$ 대신 $p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3, \gamma_1, \gamma_2$ 을 대입하면 된다.

한편 식 (18)을 풀기 위해서는 등식 우측에서의 유전적 강성행렬의 생성 및 저장에 있어서 많은 계산시간과 큰 전자기 기억용량이 필요하게 되므로 이에 대한 대책 내지는 개선책이 필요하다. 그리고 강성행렬 속의 $[D(\xi - \xi')]_{t_n}^{t_{n+1}}, [D(\xi)]$ 행렬들은 x 와 t 의 함수이므로 수치적분시 큰 어려움이 따른다. 이 과정을 진행하기에 앞서서 먼저 식 (19g), 즉, $[D(\xi - \xi')]_{t_n}^{t_{n+1}}$ 행렬의 계산을 식 (21)의 대표적인 항을 택하여 보이기로 한다. 즉,

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} p_5 e^{-\beta_1(\xi - \xi')} dt' \quad (22)$$

식 (22)에서 ξ 는 식 (5)에서 보듯이 일반적으로 t 와 x 의 함수로서 그것들의 관계가 복잡할 경우에 이론적으로 완전한 적분은 불가능하다. 그러므로 수치적분에 의존하거나, 혹은 다른 근사적 해법에

$$[D(\xi - \xi')]_{t_n}^{t_{n+1}} =$$

$$\begin{cases} \underline{d}_{11} = \underline{d}_{22} = p_4 \Delta t + \frac{p_5}{A_1(x)} [e^{-A_1(x)(t-t_{n+1})} - e^{-A_1(x)(t-t_n)}] + \frac{p_6}{A_2(x)} [e^{-A_2(x)(t-t_{n+1})} - e^{-A_2(x)(t-t_n)}] \\ \underline{d}_{12} = \underline{d}_{21} = q_4 \Delta t + \frac{q_5}{A_1(x)} [e^{-A_1(x)(t-t_{n+1})} - e^{-A_1(x)(t-t_n)}] + \frac{q_6}{A_2(x)} [e^{-A_2(x)(t-t_{n+1})} - e^{-A_2(x)(t-t_n)}] \\ \underline{d}_{33} = w_1 \Delta t + \frac{w_2}{A_3(x)} [e^{-A_3(x)(t-t_{n+1})} - e^{-A_3(x)(t-t_n)}] \end{cases} \quad (26)$$

의존해야 하는데, $T=T(t)$ 와 $T=T(x)$ 의 경우에는 완전적분이 가능하다. 본 논문에서는 지면상 후자의 경우만을 취급하기로 한다.

온도가 공간변수만의 함수 즉 $T=T(x)$ 의 경우에, 식 (5)의 등가시간이 다음처럼 된다. 즉,

$$\xi = \int_0^t \phi(T(x)) d\lambda = tA(x) \quad (23)$$

여기서,

$$A(x) = \phi(T(x)) \quad (24)$$

이다. 식 (23)으로부터 ξ 가 변수분리 형태로 표현되어짐을 알 수 있으며, 또한 t 에 관해서는 선형적으로 나타나는데 이것은 나중의 수치계산을 단순화시키는데 유리하게 적용된다. 식 (24)에서 $A(x)$ 를 구하기 위해서는 온도분포함수 $T(x)$ 와 이 전함수 $\phi(T)$ 를 알아야 한다. 식 (23)의 ξ 를 식 (22)에 대입하면 다음에서처럼 시간영역에서의 적분이 이론적으로 가능하다. 즉,

$$\begin{aligned} & \int_{t_n}^{t_{n+1}} p_5 e^{-\beta_1(\xi - \xi')} dt' \\ &= p_5 \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{-\beta_1 A(x)(t-t')} dt' \\ &= \frac{p_5}{\beta_1 A(x)} [e^{-\beta_1 A(x)(t-t')}]_{t_n}^{t_{n+1}} \\ &= \frac{p_5}{\beta_1 A(x)} [e^{-\beta_1 A(x)t(t-t_{n+1})} - e^{-\beta_1 A(x)t(t-t_n)}] \end{aligned} \quad (25a)$$

$$= \frac{p_5 \Delta t}{\beta_1 \Delta \xi} [e^{-\beta_1 \xi - \xi_{n+1}} - e^{-\beta_1 \xi - \xi_n}] \quad (25b)$$

식 (25b)에서 $\Delta \xi = \Delta t A(x)$ 이다. 그리고 식 (25a)의 괄호내의 첫째 항은 시간등분이 균일할 경우 이미 전 단계에서 계산된다. 식 (25a)를 사용해서 식 (19g)를 다음처럼 표현한다.

식 (26)의 유도에 있어서 시간증분 Δt 는 일정하다고 가정하였으며, d_{ij} 는 행렬의 요소를 의미하고,

$$A_1(x) = \beta_1 A(x), A_2(x) = \beta_2 A(x), A_3(x) = \lambda A(x) \quad (27)$$

이다. 그리고,

$$[D(\xi - \xi')]_{N-1}^{IN} = \begin{cases} d_{11} = d_{22} = p_4 \Delta t + \frac{p_5}{A_1(x)} [1 - e^{-A_1(x)\Delta t}] + \frac{p_6}{A_2(x)} [1 - e^{-A_2(x)\Delta t}] \\ d_{12} = d_{21} = q_4 \Delta t + \frac{q_5}{A_1(x)} [1 - e^{-A_1(x)\Delta t}] + \frac{q_6}{A_2(x)} [1 - e^{-A_2(x)\Delta t}] \\ d_{33} = w_1 \Delta t + \frac{w_2}{A_3(x)} [1 - e^{-A_3(x)\Delta t}] \end{cases} \quad (28)$$

가 되어 Δt 가 일정할 경우 공간변수만의 함수가 된다.

6. 시스템 방정식의 수치계산

본 절에서는 시스템 연립방정식 식 (18)의 계산 과정을 $T=T(x)$ 및 평면변형률의 경우에 대하여 그 진행절차를 몇 단계 살펴보기로 한다.

i) $N=1, t=(N-1)\Delta t = 0(\xi=0)$ 의 경우 식 (18)의 마지막 두 항만이 사용된다. 즉,

$$\Delta t \int_{\Omega} [B]^T [D(0)] [B] d\Omega \{u\} = \Delta t \{F_s\} + \{F_0\} \quad (29)$$

위 식에서 $\{F_s\}$ 의 계산은 보통의 탄성이나 등온의 점탄성 경우와 동일하다. $\{F_0\}$ 의 계산에서 $t=0$ 의 경우에는 식 (19f)에서 첫째 항만이 고려된다. 즉 $\{u^{-1}\}$ 은 열탄성해와 동일한 의미를 갖는다. 그리고 만약 열팽창계수가 일정하다면 식 (7), (10)으로부터 열변형률 벡터 $\{e_0(x,t)\}$ 는 다음처럼 된다. 즉,

$$\text{평면응력의 경우} \\ \{e_0(x,t)\} = \{\alpha_0(T(x) - T_0)\delta_{kl}\} \quad (30a)$$

$$\text{평면변형률의 경우} \\ \{e_0(x,t)\} = (1 + \nu_0)\{\alpha_0(T(x) - T_0)\delta_{kl}\} \quad (30b)$$

ii) $N=2, t=2\Delta t$ 의 경우

$$[\underline{K}(\Delta\xi)]\{u^2 - u^1\} = -\Delta t [K(\xi)]\{u^1\} + \Delta t \{F_s\} + \{F_0\} \\ [\underline{K}(\Delta\xi)]\{u^2\} = [[\underline{K}(\Delta\xi)] - \Delta t [K(\xi)]]\{u^1\} + \Delta t \{F_s\} + \{F_0\} \quad (31)$$

여기서,

$$[\underline{K}(\Delta\xi)] = [\underline{K}(\xi - \xi')]_{N-1}^N \\ = \sum_{e=1}^E \int_{\Omega^e} [B]^T [D(\xi - \xi')]_{N-1}^{IN} [B] d\Omega \quad (32)$$

이며, 식 (28)을 참조하여 볼 때 $[\underline{K}(\Delta\xi)]$ 는 Δt 가 일정한 경우에 공간변수에 관한 적분이 되므로 시간에 따라 불변한다. 그러나 $[K(\xi)]$ 는 식 (19c)와 같으며 매시간 계산해야 한다. 한편 $T=T(x)$ 일 경우에는 식 (19f)의 $\{F_0\}$ 계산에서 둘째 항이 영이 되므로 이후의 계산이 간단하게 된다.

참고로, 열탄성문제에서는 $[D]$ 가 일정하였으며, 등온의 점탄성문제에서는 $[D(t)]$ 가 시간의 함수, 그리고 현재의 문제에서는 $[D(\xi)]$ 가 시간 뿐 아니라 공간변수의 함수가 된다는 점이다. 그러므로, 수치계산시 특히 가우스 적분하여 요소강성계수 행렬을 만들 때 가우스 점의 위치가 바뀔 때마다 $[D(\xi)]$ 계산을 새로 해야한다.

iii) $N \geq 3, t=(N-1)\Delta t$ 의 경우

일반적인 경우로써 $1 \leq n \leq N-2$ 범위를 가지며, 식 (18)의 $\sum_{n=1}^{N-2}$ 기호가 적용된다. 즉,

$$[\underline{K}(\Delta\xi)]\{u^N\} = \sum_{n=1}^{N-2} [K(\xi, n)]\{u^{n+1}\} + [K'(\xi)]\{u^{-1}\} + \Delta t \{F\} \quad (33)$$

여기서,

$$[\underline{K}(\xi, n)] = [[\underline{K}(\xi - \xi')]_{n+1}^{n+1}] - [\underline{K}(\xi - \xi')]_n^{n+1} \quad (34a)$$

$$[K'(\xi)] = [[\underline{K}(\xi - \xi')]_1^1] - \Delta t [K(\xi)] \quad (34b)$$

식 (33)에서 $[\underline{K}(\Delta\xi)]$ 는 식 (32)와 같으며 일정하다. 한편, 식 (34a)의 $[\underline{K}(\xi, n)]$ 강성행렬은 일반적인 온도분포 $T=T(x,t)$ 의 경우 위치 및 n 값에 따

라 다르므로 복잡하고 많은 계산시간 및 기억 용량이 필요하게 된다. 그러나 $T=T(x)$ 의 경우에는 앞서서도 언급하였듯이 ξ 가 t 의 선형적 함수가 되어 다음의 설명과 같은 효율적 계산이 가능하다.

$$[K(\xi, n)] = \int_{\Omega} [B]^T [[D(\xi - \xi')]]_{t_n}^{t_n+2} - [D(\xi - \xi')]_{t_n}^{t_n+1}] [B] d\Omega \quad (35)$$

여기서,

$$[D(\xi - \xi')]_{t_n}^{t_n+2} - [D(\xi - \xi')]_{t_n}^{t_n+1} = \quad (36)$$

$$\begin{cases} \Delta_{11} = \Delta_{12} = \frac{P_5}{A_1(x)} [e^{-A_1(x)(t-t_n+2)} - 2e^{-A_1(x)(t-t_n+1)} + e^{-A_1(x)(t-t_n)}] \\ \quad + \frac{P_6}{A_2(x)} [e^{-A_2(x)(t-t_n+2)} - 2e^{-A_2(x)(t-t_n+1)} + e^{-A_2(x)(t-t_n)}] \\ \Delta_{12} = \Delta_{21} = \frac{Q_5}{A_1(x)} [e^{-A_1(x)(t-t_n+2)} - 2e^{-A_1(x)(t-t_n+1)} + e^{-A_1(x)(t-t_n)}] \\ \quad + \frac{Q_6}{A_2(x)} [e^{-A_2(x)(t-t_n+2)} - 2e^{-A_2(x)(t-t_n+1)} + e^{-A_2(x)(t-t_n)}] \\ \Delta_{33} = \frac{W_2}{A_3(x)} [e^{-A_3(x)(t-t_n+2)} - 2e^{-A_3(x)(t-t_n+1)} + e^{-A_3(x)(t-t_n)}] \end{cases}$$

식 (36)을 주목하여 보면, $[K(\xi, n)]$ 은 그 다음 단계에서 $[K(\xi, n+1)]$ 로 됨을 알 수 있다. 그래서 현 단계의 모든 $[K(\xi, n)]$ 을 계산 저장시키고, 그 다음 단계에서는 $[K(\xi, n)]$ 을 $[K(\xi, n+1)]$ 로 그 다음 다음 단계에는 $[K(\xi, n)]$ 을 $[K(\xi, n+2)]$ 로 대체시킨다. 이런 식으로 $N-2$ 회 진행하면 되므로, 유전적 강성행렬들의 계산 및 저장량이 대폭 줄어들게 된다.

또한, 식 (34b)의 $[K'(\xi)]$ 는

$$[K'(\xi)] = \int_{\Omega} [B]^T [D'(\xi)] [B] d\Omega \quad (37)$$

이다. 그리고,

$$[D'(\xi)] = [D(\xi - \xi')]_{t_n}^2 - \Delta t [D(\xi)] = \quad (38)$$

$$\begin{cases} d'_{11} = d'_{12} = \frac{P_5}{A_1(x)} [e^{-A_1(x)(t-\Delta t)} - e^{-A_1(x)t}] - \Delta t P_5 e^{-A_1(x)t} \\ \quad + \frac{P_6}{A_2(x)} [e^{-A_2(x)(t-\Delta t)} - e^{-A_2(x)t}] - \Delta t P_6 e^{-A_2(x)t} \\ d'_{12} = d'_{21} = \frac{Q_5}{A_1(x)} [e^{-A_1(x)(t-\Delta t)} - e^{-A_1(x)t}] - \Delta t Q_5 e^{-A_1(x)t} \\ \quad + \frac{Q_6}{A_2(x)} [e^{-A_2(x)(t-\Delta t)} - e^{-A_2(x)t}] - \Delta t Q_6 e^{-A_2(x)t} \\ d'_{33} = \frac{W_2}{A_3(x)} [e^{-A_3(x)(t-\Delta t)} - e^{-A_3(x)t}] - \Delta t Q_5 e^{-A_3(x)t} \end{cases}$$

이므로 $[K'(\xi)]$ 는 매시간마다 새로 공간좌표에 관한 수치적분을 수행하면 된다.

7. 응력 계산

TRS 모델에 관한 응력-변형률 관계식은 식 (8)과 같으며 다음처럼 전개한다. 즉,

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(x, \xi) &= D_{ijkl}(\xi) \epsilon_{kl}(x, 0) \\ &+ \int_0^t D_{ijkl}(\xi - \xi') \frac{\partial}{\partial t} \epsilon_{kl}(x, t') dt' \\ &- D_{ijkl}(\xi) \epsilon_0(x, 0) \delta_{kl} \\ &- \int_0^t D_{ijkl}(\xi - \xi') \frac{\partial}{\partial t} \epsilon_0(x, t') \delta_{kl} dt' \end{aligned} \quad (39)$$

앞절 ii)에서 설명한 것처럼 $T=T(x)$ 경우 식 (39)의 마지막 항은 영이 된다. 그리고, 식 (39)의 둘째 항을 계산하기 위하여 변형률 $\epsilon_{kl}(x, t)$ 는 각 시간구간에서 선형적으로 변화한다고 가정한다. 즉,

$$\epsilon_{ij}(x, t) = \sum_{n=1}^{N-1} \{ \phi_1(t) \epsilon_{ij}^n(x) + \phi_2(t) \epsilon_{ij}^{n+1}(x) \} \quad (40)$$

식 (40)을 식 (39)에 대입하여 전개하는 과정은 식 (17)의 좌측 항의 수식 유도과정과 동일하다. 즉,

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(x, t) &= D_{ijkl}(\xi) \epsilon_{kl}(x, 0) \\ &+ \sum_{n=1}^{N-1} \frac{\epsilon_{kl}^{n+1}(x) - \epsilon_{kl}^n(x)}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} D_{ijkl}(\xi - \xi') dt' \\ &- D_{ijkl}(\xi) \epsilon_0(x, 0) \delta_{kl} \end{aligned} \quad (41)$$

식 (41)을 행렬식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \{ \sigma(x, t) \} &= [D(\xi)] \{ \epsilon^1(x) \} \\ &+ \frac{1}{\Delta t} \sum_{n=1}^{N-1} [D(\xi - \xi')]_{t_n}^{t_{n+1}} \{ \epsilon^{n+1}(x) - \epsilon^n(x) \} \\ &- [D(\xi)] \{ \epsilon_0(x, 0) \} \\ &= \left[[D(\xi)] - \frac{1}{\Delta t} [D(\xi - \xi')]_{t_n}^{t_{n+1}} \right] \{ \epsilon^1(x) \} \\ &+ \frac{1}{\Delta t} \sum_{n=1}^{N-2} \left[[D(\xi - \xi')]_{t_n}^{t_{n+2}} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - [D(\xi - \xi')]]_{n+1}^{n+2} \} \{ \varepsilon^{n+1}(x) \} \\
 & + \frac{1}{\Delta t} [D(\xi - \xi')]]_{n-1}^n \{ \varepsilon^n(x) \} \\
 & - [D(\xi)] \{ \varepsilon_0(x, 0) \} \quad (42)
 \end{aligned}$$

여기서 $\{ \varepsilon^1(x) \}$ 는 $t=0$ 에서의 열탄성해와 같고, $\{ \varepsilon_0(x, 0) \}$ 는 초기 열변형률 벡터로서 식 (3)을 참조한다. 그리고 $[D(\xi) - \frac{1}{\Delta t} [D(\xi - \xi')]]_1^2$, $[[D(\xi - \xi')]]_n^{n+1} - [D(\xi - \xi')]]_{n+1}^{n+2}]$, $[D(\xi - \xi')]]_{n-1}^n$ 항들은 각각 식 (38), (36) 및 (28)을 참조한다. 그리고 응력에 관한 표현식 (42)에서 등온의 경우¹²⁻¹⁴⁾에서는 $\xi=t$ 이었으나, 현재는 $\xi=\xi(x,t)$ 이므로 공간변수에 의한 영향이 추가된다.

8. 수치해석 예

8.1 균일한 온도변화를 받는 점탄성 무한평판

그림 2에서 처럼 두께가 일정하고, 길이가 무한인 점탄성 평판이 처음온도 T_0 에서 나중온도 T_1 으로 순간적으로 균일한 온도변화를 받는다. (x,y,z) 좌표축을 그림에서처럼 평판의 중심에 위치시켰을 때, 이 문제의 변위장과 응력장은 다음처럼 요약된다. 즉,

$$\begin{aligned}
 u_x &= u_y = 0, \quad u_z = u_z(z,t) \\
 \tau_{xy} &= \tau_{yz} = \tau_{zx} = \sigma_z = 0, \\
 \sigma_x &= \sigma_x(z,t) = \sigma_y \quad (43)
 \end{aligned}$$

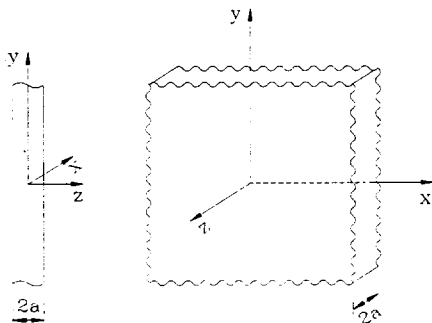


그림 2. 두께가 일정하고 길이가 무한인 점탄성 평판

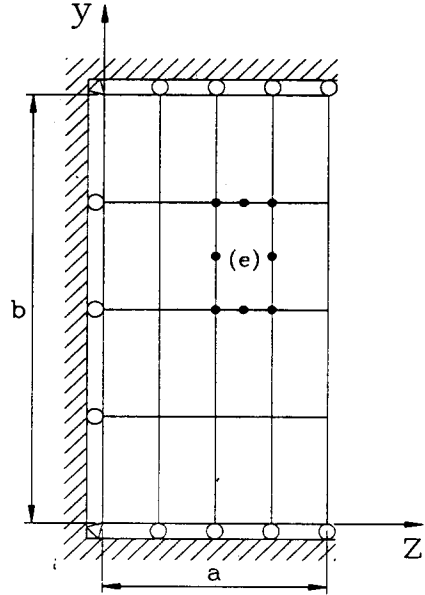


그림 3. 점탄성 무한평판의 열응력 해석을 위한 유한요소모델

그림 3은 유한요소해석을 위한 모델로서, (e)는 대표적인 한 요소를 의미하며 문제의 대칭성을 이용해서 1/4평판과 해당되는 경계조건을 표시하였다. 이때 x방향으로는 평면변형률 상태로 가정한다. 이 문제의 σ_x 에 대한 일반해는 [6]에서 참조할 수 있으며, Maxwell solid(체적변형은 탄성적이고, 전단변형은 Maxwell fluid 처럼 거동하는 점탄성 재료(다음의 식(45) 참조)에 대해서 다음처럼 무차원식으로 표현된다. 즉,

$$\begin{aligned}
 \bar{\sigma}_x(z,t) &= -\frac{1-\nu_0}{E_0\alpha_0\Delta T} \sigma_x(z,t) \\
 &= \frac{1}{\Delta T} \exp \left[-\frac{\beta}{\tau_0} \xi(z,t') \right] \\
 &\quad \int_0^t \exp \left[\frac{\beta}{\tau_0} \xi(z,t') \right] \frac{\partial}{\partial t'} \theta(z,t) dt' \\
 &= \exp \left[-\frac{\beta}{\tau_0} \xi \right] \quad (44)
 \end{aligned}$$

여기서,

$$\begin{aligned}
 G_1(t) &= 2\mu_0 \exp(-t/\tau_0) H(t) \\
 G_2(t) &= 3k_0 H(t) \quad (45)
 \end{aligned}$$

식 (44), (45)에서 α_0 는 선형 열팽창계수, E_0, ν_0, μ_0, k_0 는 초기탄성계수(이완함수들의 초기값), $\beta=(1+\nu_0)/3(1-\nu_0)$, τ_0 는 이완시간, $H(t)$ 는 단위 계단함수, $\Delta T=T_1-T_0$, $\theta(z,t)=\Delta TH(t)$, 그리고 G_1, G_2 는 이완함수로서 식(2)에서의 정의와 같다. 한편,

$$\xi = \int_0^t \phi(T) d\lambda = \phi(T)t = \phi_T t \quad (46)$$

이다. 그리고 수치계산시 물성 값들은 polymethyl methacrylate 재료에 관한 것⁶⁾으로, $\alpha_0=8 \times 10^{-5}/^{\circ}\text{C}$, $E_0=2.2835 \times 10^4 \text{kg/cm}^2$, $\nu_0=0.35$, $\phi_T=\phi(110)=10^{3.6}=3981$ 로 하였으며, 그 밖에 $\tau_0=1\text{sec}$, $\Delta T=30^{\circ}\text{C}$ ($T_0=80^{\circ}\text{C}$, $T_1=110^{\circ}\text{C}$), $a=\sqrt{8}=2.828\text{cm}$ 로 가정하였다. 이 값들을 식 (44)에 대입하면,

$$\bar{\sigma}_x(z,t) = \exp[-2756.077t] \quad (47)$$

가 되며, 무차원화 되어져 그림 4에 계산된 수치결과와 함께 그려져 있다. 참고로 그림 4의 수평축에서 $\tau(T)$ 는 온도 종속의 이완시간(a temperature dependent relaxation time)로서 $\tau(T)=\tau_0/\phi(T)$ 이다.

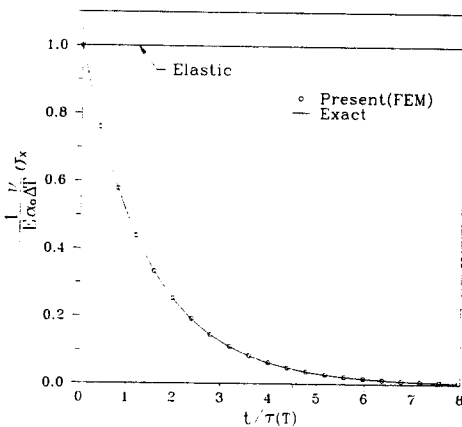


그림 4. 균일한 온도분포를 받는 점탄성 무한평판의 x방향 수직응력분포

8.2 정상적인 온도분포하에서 내압을 받으며 외 부가 고정된 점탄성 원통

본 논문에서 유도된 공식들의 타당성을 입증하기 위한 두번째 예제로서, 온도가 정상적으로 분포($T=T(x)$) 하며, 내압을 받고 외경이 고정된 점탄성 원통을 생각한다. 이 예제는 [8]에서도 취급되어졌는데 거기에서는 단순히 축대칭·평면변형률의 1차원적 공식화 과정을 제시하였다. 그러나 본 논문에서는 2차원 문제의 일반적 해석을 목적으로 하는 공식화 과정을 유도·제시하였다. 수치결과를 비교하기 위하여 [8]에서 사용된 데이터를 사용하기로 한다. 우선 점탄성 재질은 앞 예제에서처럼 Maxwell solid로 가정하여,

$$G_1(\xi) = 2\mu(\xi) = \frac{E_0}{1.3} \exp(-\xi/\tau),$$

$$G_2(\xi) = 3k(\xi) = \frac{E_0}{0.4} \quad (48)$$

그리고 이완함수는 다음과 같다.

$$\phi(T) = 10^{0.005(T-T_0)} = 10^{0.005\theta} \quad (49)$$

여기서, $0 \leq \theta \leq 40^{\circ}\text{C}$

또한 온도분포는 다음의 3가지 경우로 가정하였다.

Case I. $\theta(t) = 0$

Case II. $\theta(t) = 57.7076 \ln(r)$

Case III. $\theta(t) = 57.7076 \ln(2/r)$, ($1 \leq r \leq 2$)

그 밖에 수치해를 구하기 위한 물성치는 다음과 같다.

$$E_0=25,000 \text{kg/cm}^2, \nu_0=0.3,$$

$$k_0=20833.3333 \text{kg/cm}^2, \mu_0=9615.3846 \text{kg/cm}^2,$$

$$\tau_0=1 \text{ sec}, \nu(\xi) = \frac{1-0.307692 \exp(-\xi)}{2+0.307692 \exp(-\xi)},$$

$$\alpha_0 = 8 \times 10^{-5}/^{\circ}\text{C}, p = 1000 \text{kg/cm}^2$$

수치해를 구하기 위한 유한요소모델로서 그림 5와 같은 메쉬형상을 취하였다. 그림 6, 7, 8에서는 반경방향 변위, 반경방향 응력 그리고 접선방향 응력들이 무차원화 되어져 비교되어 있는데, 두

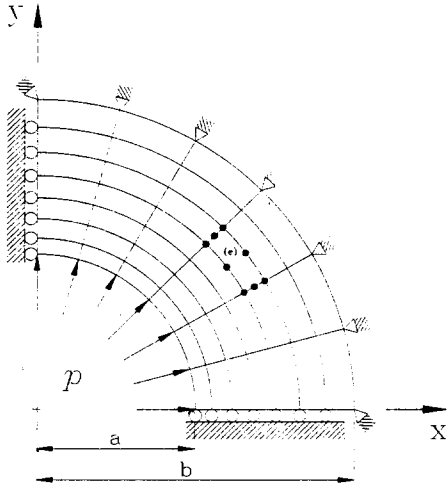


그림 5. 외부가 고정된 점탄성 원통의 열응력 해석을 위한 유한요소모델

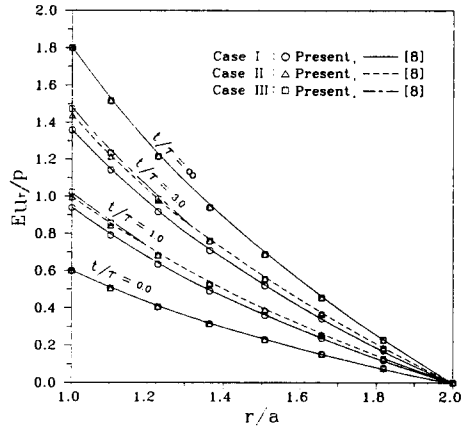


그림 6. 외부가 고정된 점탄성 원통의 반경반향의 변위분포

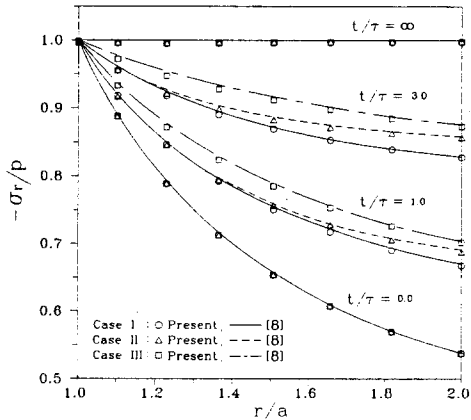


그림 7. 외부가 고정된 점탄성 원통의 반경반향의 수직응력 분포

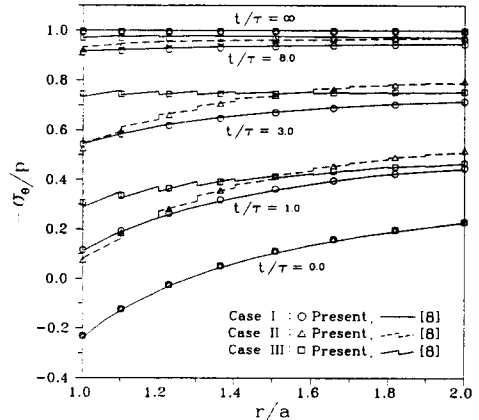


그림 8. 외부가 고정된 점탄성 원통의 접선반향의 수직응력 분포

두치결과가 매우 잘 일치함을 보여주고 있다. 그러나 [8]에서는 열변형만을 고려하였으므로, 열응력을 추가로 고려한 수정해를 그림 9, 10, 11에 새로이 제시하였다. 참고로, [8]에서는 적당한 시간 증분으로서 $\Delta t = 0.025\tau_0$, $0.05\tau_0$ 값을 제시하였는데 $\Delta t = 0.1\tau_0$ 가 넘어서는 심각한 오차가 발생되었다고 보고하고 있다. 그러나 본 논문에서는 $\Delta t = 0.5\tau_0$, τ_0 가 적당한 시간증분 값으로 확인되었으며, 그 이상으로 하면 약간의 오차가 발생하였

다. 그리고 공간함수들의 수치적분에서는 영역을 세분화시키고(그림 5 참조, $b=2a$) 3×3 가우스 법칙을 사용하였다.

8.3 정상적인 온도분포하의 점탄성 원통

응용예제로서 온도가 정상적으로 분포하며, 그림 5와 기하학적 차원은 같으나 외부구속조건이 없는 점탄성 원통을 생각한다. 이때 재질은 식 (20)에서처럼 정수압 변형시 탄성적으로 거동하

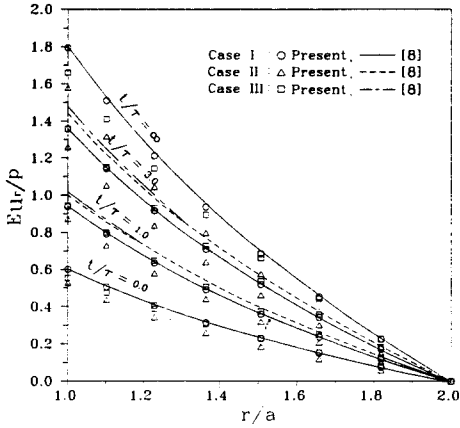


그림 9. 외부가 고정된 점탄성 원통의 수정된 반경반경의 변위분포

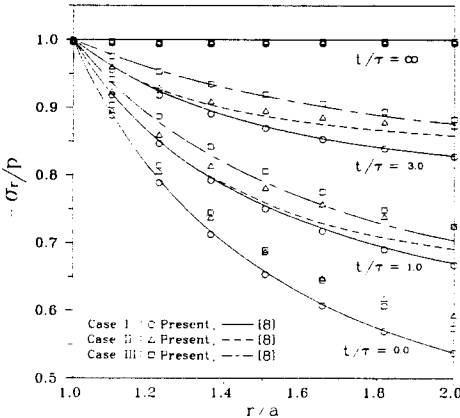


그림 10. 외부가 고정된 점탄성 원통의 수정된 반경반향의 수직응력분포

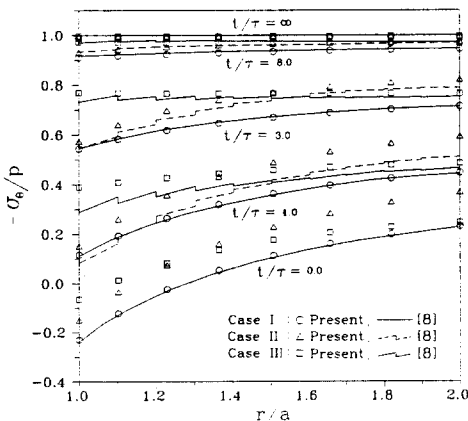


그림 11. 외부가 고정된 점탄성 원통의 수정된 반경반향의 수직응력분포

고, 전단변형시 표준화된 3요소 고체 모델 이완함수로 가정한다.

이론해의 유도가 매우 복잡하므로, $t=0, \infty$ 에서의 해가 탄성적으로 거동한다는 사실로부터 그때의 극한 탄성계수값들을 탄성해 공식에 대입하여서 양극에서의 점탄성 이론해로 사용할 수가 있다. 그리고 그 사이 구간에서는 수치해의 수렴과정을 보임으로써 타당성을 보이기로 한다. 평면변형의 경우에 탄성해¹⁷⁾는 다음과 같다. 즉,

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\alpha_0 E}{1-\nu} \left[-\frac{1}{r^2} \int_a^r T(r) r dr \right. \\ &\quad \left. + \frac{r^2 - a^2}{r^2(b^2 - a^2)} \int_a^r T(r) r dr \right] \\ \sigma_\theta &= \frac{\alpha_0 E}{1-\nu} \left[-T(r) + \frac{1}{r^2} \int_a^r T(r) r dr \right. \\ &\quad \left. + \frac{r^2 - a^2}{r^2(b^2 - a^2)} \int_a^r T(r) r dr \right] \end{aligned} \quad (50)$$

그리고 열전달 방정식으로부터 내경 $r=a$ 에서의 온도가 $T(a)$, 외경 $r=b$ 에서의 온도가 $T(b)$ 일 경우 온도분포 $T(r)$ 은 다음처럼 유도된다. 즉,

$$\frac{T(r) - T(a)}{T(b) - T(a)} = \frac{\ln(r/a)}{\ln(b/a)} \quad (51)$$

식 (51)에서 $a=1, b=2, T(a)=40^\circ\text{C}, T(b)=0^\circ\text{C}$ 을 대입하여 $T(r)$ 을 구하고 식 (50)에 대입하면,

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\alpha E}{1-\nu} \left[28.8539 \ln(r) + \frac{26.6667}{r^2} - 26.6667 \right] \\ \sigma_\theta &= \frac{\alpha E}{1-\nu} \left[28.8539 \ln(r) - \frac{26.6667}{r^2} + 2.1873 \right] \end{aligned} \quad (52)$$

이 된다. 그리고 수치해를 구하기 위한 자료로서 다음 값들을 사용하였다.

$$\begin{aligned} E_0 &= 2.2877 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2, \\ E_\infty &= 2.513 \times 10^3 \text{ kg/cm}^2, \\ \nu_0 &= 0.3505, \quad \nu_\infty = 0.4836, \\ \mu_0 &= 8.4694 \times 10^3 \text{ kg/cm}^2, \\ \mu_\infty &= 8.4694 \times 10^2 \text{ kg/cm}^2, \\ k_0 &= 2.5510 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2, \end{aligned}$$

$$\tau_0 = 2 \text{ sec}, \quad c = 0.1,$$

$$\varphi(T) = 10^{0.005(T-T_0)} = 10^{0.005\theta}, \quad \alpha_0 = 8.0 \times 10^{-5} / ^\circ\text{C}$$

그림 12, 13에는 무차원화된 수치결과가 그려져 있는데, σ_r 보다 σ_θ 의 경우에 더 좋은 수치정확도를 보여준다. 평면응력의 문제(원반)의 경우도 해석해 보았는데 σ_r 에 있어서 더 좋은 결과를 나타내 보였다. σ_r 에서 오차가 나타나는 것은 σ_r 이 σ_θ 에 비하여 상대적으로 작은 값들이기 때문이다.

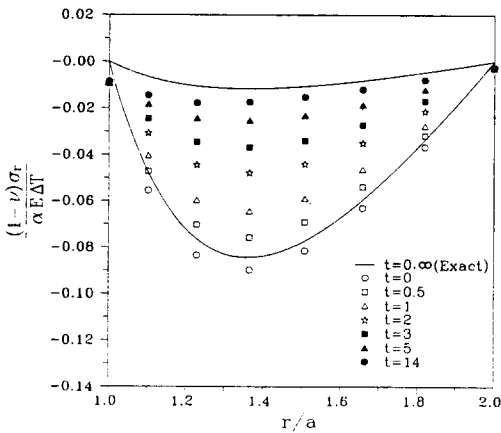


그림 12. 외부가 고정되지 않은 점탄성 원통의 반경방향 수직응력분포

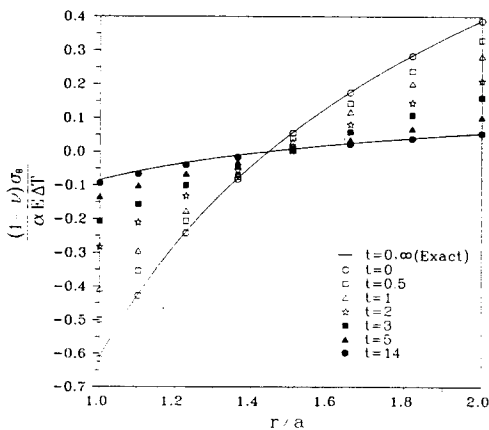


그림 13. 외부가 고정되지 않은 점탄성 원통의 접선방향 수직응력분포

9. 결 론

열유동학적으로 단순하고, 등방성, 선형인 점탄성 재료의 시간영역에서의 2차원 유한요소해석을 위하여 가상일의 원리를 바탕으로한 새로운 변분 공식 및 유한요소방정식을 유도하였다. 이것을 위해서 시간축을 등분할 하였으며, 종속함수는 시간과 공간함수들의 곱으로 변수분리시킨 후 Ritz의 근사식 형태로 표현하였다. 특별히 $T=T(x)$ 의 경우에는 많은 계산량의 유전적 강성행렬들이 매우 효율적이고 단순화된 방법으로 계산이 가능함을 밝혔다. 또한, 강성행렬들의 생성시 물성행렬들의 분문에 이전함수가 포함되어지므로 수치적분시 큰 어려움이 있으리라고 예측되었으나, 메쉬분할을 작게 함으로써 보통의 3×3 가우스 적분으로도 충분히 좋은 결과가 얻어짐을 확인할 수 있었다. 또한 시간증분이 수치결과의 정확성에 끼치는 영향을 조사하여 제시된 공식화 과정이 매우 안정적이고 효율적임을 밝혔다. 두번째 예제를 예로 들면, 그 크기는 타 논문에서의 적합한 시간증분보다도 10배 이상이나 되었다. 본문에서 해석된 처음 두 예제는 기존에 해석된 결과들이 존재하나, 마지막 예제는 앞으로의 열점탄성 문제 연구에 도움이 되도록 본 논문에서 처음으로 해석 제시하였다.

참 고 문 헌

- [1] Leaderman, H., *Elastic and Creep Properties of Filamentous Materials*, Textile Foundation, Washington, D.C., 1943, p.175.
- [2] Ferry, J.D., "Mechanical Properties of Substances of High Molecular Weight", *J. Amer. Chem. Soc.*, Vol.72, 1950, p.3746.
- [3] Schwarzl F. and Staverman, A.J., "Time-Temperature Dependence of Linear Viscoelastic Behaviour", *J. Appl. Phys.*, Vol. 23, 1952, p.838.
- [4] Payne, A.R., "Temperature-Frequency Relationships of Dielectric and Mechanical Properties of Polymers", *Rheol. Elast.*, Edited by Mason P. and Wookey, N. Pergamon Press, New York, N.Y. 1958, p.86.

- [5] Morland L.W., and Lee, E.H., "Stress Analysis for Linear Viscoelastic Materials with Temperature Variation", *Trans. Soc. Rheol.*, Vol.4, 1960, pp.233-263.
- [6] Muki, R., and Sternberg, E., "On Transient Thermal Stresses in Viscoelastic Materials with Temperature-Dependent Properties", *J. Appl. Mech.*, 1961, pp.193-207.
- [7] Lockett, F.J., and Morland, L.W., "Thermal Stresses in Viscoelastic Thin-Walled Tube with Temperature-Dependent Properties", *Int. J. Eng. Sci.*, Vol.5, 1967, pp.879-898.
- [8] Taylor, R.L., and Chang, T.Y., "An Approximate Method for Thermoviscoelastic Stress Analysis", *Nuc. Eng. Design*, Vol.4, 1966, pp.21-28.
- [9] Taylor, R.L., Pister, K.S., and Goudreau, L. "Thermomechanical Analysis of Viscoelastic Stress Analysis", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol.2, 1970, pp.45-59.
- [10] Srinatha H.R., and Lewis, R.W., "A Finite Element Method for Thermoviscoelastic Analysis of Plane Problems", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol.25, 1981, pp.21-33.
- [11] Lee, S.S., and Westmann, R.A., "Application of High-Order Quadrature Rules to Time-Domain Boundary Element Analysis of Viscoelasticity", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 38, 1995, pp.607-629.
- [12] 심우진, 이호섭, "유전 적분형 물성방정식에 근거한 선형 점탄성 문제의 시간영역 유한요소해석", *대한기계학회 논문집*, 제16권, 제8호, 1992, pp.1429-1437.
- [13] 심우진, 이성희, "유전적분형 선형점탄성문제의 유한요소법에 의한 효율적 해석", *한국전산구조공학회 논문집*, 제6권 제2호, 1993, pp.103-114.
- [14] Sim, Woo-Jin and Lee, Sung-Hee "Efficient Finite Element Formulation for Linear Viscoelastic Analysis Based on Hereditary-Type Constitutive Equations", Edited by Kwak, B.M. and Tanaka, M., *Computational Engineering*, PCCE '93 Seoul, Korea, 1993.
- [15] Christensen, R.M., *Theory of Viscoelasticity*, 2nd Edn., Academic Press, New York, 1982.
- [16] Zienkiewicz, O.C., *The Finite Element Method*, 3rd Edn., McGraw-Hill, 1977.
- [17] Ugural, A.C., and Fenster, S.K., *Advanced Strength and Applied Elasticity*, 3rd Edn., Prentice-Hall, 1995. (접수일자 : 1995. 12. 28)