

계층적 C^0 - 요소에 의한 보강판의 p-Version 유한요소 모델

p-Version Finite Element Model of Stiffened Plates by Hierarchic C^0 -Element

홍 중 현*
Hong, Chong-Hyun
우 광 성**
Woo, Kwang-Sung
신 영 식***
Shin, Young-Shik

요 약

전단변형을 고려한 보강재요소를 p-version 유한요소법을 사용하여 정식화 하였다. 적분형 르장드르 다항식으로부터 유도된 계층적 C^0 -형상함수를 5자유도를 갖는 보강재와 평판요소의 조립강성도 행렬을 정의하는데 사용하였다. 보강재와 평판의 접속부에서 변위의 적합성을 만족시키기 위해 적절한 좌표변환행렬을 사용하여 국부좌표계에서 정의된 보강재의 강성도 행렬을 기준좌표계인 평판의 좌표계로 변환시켰다. 평판의 기준좌표계에 대한 보강재의 방향과 편심효과를 설명할 수 있는 변환행렬이 평판과 보강재의 접속부에서의 국부적인 기동과 합성구조로 된 보강판에서 평판과 보강재가 감당하는 상대적인 강도 분담을 파악하기 위해 사용되었다. p-version 유한요소법에 의한 결과를 기존의 연구결과와 비교하였으며, 특히 h-version 유한요소 해석 프로그램인 MICROFEAP-II 의 결과의 비교하였다.

Abstract

A general stiffener element which includes transverse shear deformation is formulated using the p-version finite element method. Hierarchic C^0 -shape functions, derived from Integrals of Legendre polynomials, are used to define the assembled stiffness matrix of the stiffener with respect to the local reference frame is transformed to the plate reference system by applying the appropriate transformation matrices in order to insure compatibility of displacements at the junction of the stiffener and plate. The transformation matrices which account for the orientation and the eccentricity effects of the stiffener with respect to the plate reference axes are used to find local behavior at the junction of the stiffener and the relative contributions of the plate and stiffener to the strength of the composite system. The results obtained by the p-version finite element method are compared with the results in literatures, especially those by the h-version finite element analysis program, MICROFEAP-II.

* 영남대학교 토목공학과 박사과정
** 영남대학교 토목공학과 부교수
*** 영남대학교 토목공학과 교수

이 논문에 대한 토론을 1996년 9월 31일까지 본 학회에 보내주시면 1997년 3월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

1. 서 론

보강판은 구조적 효율성이 뛰어나므로 선박, 항공기, 자동차 산업뿐만 아니라 토목·건축 분야에서 널리 사용되고 있는 구조부재중의 하나이다. 그러나, 보강재와 평판사이의 접속부에는 기하학적 응력 특이(geometric stress singularity) 현상이 나타나므로 구조해석에 어려움이 따른다. 따라서 임의의 기하형상, 경계조건 및 하중조건을 갖는 보강판의 일반적 이론해를 구하는 것은 불가능하기 때문에 근사해법인 수치해법이 이용되어 왔다. 첫번째 방법은 등가 직교이방성(equivalent orthotropic) 평판으로 모델링하는 기법으로 보강재의 휨강성과 축방향의 강성을 등가의 두께를 갖는 평판으로 환산하는 방법이다. 두번째 방법은 등가 격자해석(equivalent gridwork)으로 주로 보강재가 평판에 비해 하중분담이 큰 경우에 적용되며 플랜지의 유효폭에 따라 분할된 평판의 강성을 보강재에 배분하여 2차원 격자해석을 수행하는 방법이다. 세번째 방법은 보강재를 보로 가정하고 평판은 면내력만 작용하는 막(membrane)으로 모델링하는 방법으로 이산-연속법(discrete-continuous approach)이라 한다. 여기서 제안된 방법들은 합성구조로 된 보강판에서 보강재가 보강판 전체에 미치는 상대적 영향을 파악하기가 어려울 뿐 아니라 보강재와 평판의 접속부(junction)에서 전단지체(shear lag)나 응력집중과 같은 국부적 기동을 고려하기에 어려움이 있다. 이러한 해석 방법들의 문제점으로 인하여 실제구조물을 설계할 때에 보강판에서 판의 두께가 비경제적으로 두꺼워진다는지 또는 판과 보강재의 접합부에서 응력집중현상으로 인하여 구조물의 파괴가 일어날 수 있으므로 보강판에 대한 보다 정확한 해석기법이 요구되고 있는 실정이다.

유한요소법은 이러한 문제점을 극복하여 보다 정확한 결과를 산출할 수 있는 효율적인 방법으로 인식되어 왔으며 많은 연구자들에 의해 다양한 형태의 보강판해석과 이를 위한 요소의 개발이 수행되어 왔다. 즉, Kohnke와 Schnobrich¹⁾ 등은 비대칭으로 보강된 쉘의 정역학적 문제를 1차 Hermitian 다항식을 이용한 48자유도를 갖는 사

각형 쉘요소와 직선 및 곡선보요소를 결합하여 해석하였으나 Kirchhoff이론에 근거한 까닭에 전단 변형효과를 고려할 수 없었으며 또한 강체거동이 변위장에 명확히 정의되지 않은 점이 결점으로 지적될 수 있으며, Lindbergh²⁾는 보강재의 폭에 따른 효과를 분석하였다. Chang³⁾은 유한요소법과 직교이방성이론 및 그외의 여러 이론으로 실제 I-형교를 해석하여 비교했으며, Rossow⁴⁾는 형상함수의 차수를 자유롭게 사용한 반면 절점변위에 적절한 구속을 가하면서 C^1 -연속조건을 만족시켜주는 적합요소(conforming element)를 사용한 구속법(constraint method)을 이용하여 보강판을 해석하였는데, 그 결과치는 신뢰성이 있으나 실제 구조물에 적용하기에는 계산상 비경제적이라고 알려져 있다. Paliwala⁵⁾는 비대칭 보강판의 좌굴 문제를 연구하였으며, Mukhopadhyay⁶⁾는 직교이방성 평판의 지배방정식을 편미분 방정식을 해석하는 수학적 기법인 변수분리법(separation of variables)을 사용하여 상미분 방정식화를 시킨 후 유한차분법(finite difference method)을 적용한 후 유한차분 방정식은 매트릭스법을 적용하여 해석하였다.

종래의 h-version 유한요소법에 근거한 유한요소해석은 보강재의 배치간격이 비교적 클 경우에는 보강재는 보요소를, 판은 쉘 또는 평판요소를 사용하고 있는데 이러한 해석방법에 의한 변위값은 어느 정도 신뢰성을 갖지만 보와 슬래브의 접합부분에서 응력특이(stress singularity) 현상을 규명하는 데에는 한계를 나타내고 있다. 그러므로 본 연구에서는 계층적 성질을 갖는 적분형 르장드르 다항식(Legendre polynomial)을 형상함수로 사용한 p-version 유한요소법을 적용하였다. 기존의 문헌 연구^{7,8,9)}에 의하면 새로이 제안되는 p-version 유한요소법은 응력특이가 발생하는 구조문제에 아주 적합한 모델로 제안되고 있다. 즉, Mehta⁷⁾는 모서리부분에 응력 특이가 발생하는 문제의 경우 p-version해석이 h-version해석에 비해 정해에 대한 수렴속도측면에서 2배 가량 빠르다는 것을 입증했고, Babuska^{8,9)}도 p-version유한요소법의 수렴속도가 빠르다는 것을 여러 논문을 통해 수학

적으로 입증하였다. 따라서, 본 연구에서는 5자유도를 갖는 보강재요소의 유도와 이를 사용하여 보강재와 평판의 접합부에서의 국부적인 거동분석을 수행하며 아울러, 전단변형효과를 고려하였을 경우 보강판에 미치는 효과를 파악하고자 한다. 보강재와 평판의 유한요소 정식화과정은 C^0 -연속조건에 근거를 두었으며 뒸(warping)응력의 효과는 무시하였다. 한편, 종래의 h-version 유한요소법과 비교를 위해 A.I.T.대의 Worsak¹⁰⁾이 개발한 MICROFEAP-II 소프트웨어를 사용하였다.

2. 보강판 해석 방법

보강판 해석의 수치해석 방법으로서 등가 직교이방성 평판이론과 등가 격자해석이론이 있는데 이는 보강재 강성의 판에 대한 기여도에 따라 두 가지 방법중 한가지를 택하여 사용하는 것이 바람직하다. 즉, 평판이 구조물 전체의 거동에 지배적인 역할을 한다면 등가 직교이방성 평판이론을 사용하고, 보강재가 구조물의 거동에 지배적이라면 등가 격자해석이론을 적용한다.

2.1 등가 직교이방성 평판(equivalent orthotropic plate) 이론

보강재를 별도의 부재로 취급하지 않고 보강재의 강성에 해당되는 등가의 평판으로 치환하여 기존의 평판에 추가하면서 보강판 전체를 직교이방성 평판 모델로 취급한다. 크게 보강판은 아래와 같은 두 종류의 직교이방성 요소로 구분할 수 있다. 첫째, 자연 직교 이방성(natural orthotropy)으로 나무판자와 같이 판의 평면에 서로 직각으로 다른 탄성적 성질($E_x \neq E_y$, $\nu_x \neq \nu_y$, $D_x \neq D_y$)을 갖는 것을 말하며 둘째, 기술적 직교 이방성(technical orthotropy)으로 판의 강성을 증가시키기 위해 판에 보강재를 접합시킴으로써 구조적 효율성을 증가시키는 방법이다. Huber¹¹⁾는 보강판에 직교이방성 평판이론을 적용하여 구조해석을 시도하였는데, 보강된 판의 처짐과 휨 모멘트를 구하기 위해 보강된 평판을 일정한 두께를 가진 등가 직교이방성 슬래브로 치환하여 해석을 수행하였다. 직교이방성 평판의 지배방정식은 편미분 방정식으

로 정의되는데 이론해를 구하기 위해서는 라플라스변환(Laplace transform), 푸리에변환(Fourier transform) 또는 변수분리법(separation of variables) 등의 수학적기법이 사용될 수 있다.

한편, 실용해석에 있어서 직교이방성 평판은 두 직각방향으로 각각의 휨강성을 가진 평판으로 정의되는데 이 휨강성은 탄성계수와 2차 단면모멘트의 재료적, 기하학적 형상으로부터 직교이방성 성질을 지니게 된다. 그러면 결국 직교이방성 평판의 해석은 휨강성과 비틀강성의 상수값의 결정에 달려 있다고 볼 수 있으며 Huber 및 Huffington¹¹⁾ 등 많은 학자들이 보다 정확한 휨강성과 비틀강성의 상수값 결정을 위한 이론식과 실험식을 제안하고 있다.

2.2 등가 격자해석(equivalent gridwork) 이론

평판과 보강재가 접합된 합성구조물을 해석하는 또 다른 수치해석 방법으로는 격자구조해석을 들 수 있는데 평판보다는 보강재의 거동이 전체구조물의 거동에 지배적인 영향을 미치는 경우 직교이방성 평판이론보다는 격자구조해석이론이 사용하기 간단하며 아울러 높은 정확도를 나타내고 있다. 격자구조에 의한 해석은 6개의 자유도가 허용되는 3차원 격자 대신 연직방향(Z)의 수직변위와 평면의 두 직교방향(X, Y)의 회전변위만 허용되는 2차원 평면격자모델을 이용하며 하중 재하점과 절점이 일치하지 않을 경우 등가절점하중(equivalent static load)을 이용한다.

구조해석을 위한 격자모델의 구성은 Hambly¹⁶⁾에 의하면 해석대상 구조물의 구조적 거동을 나타낼 수 있는 단면계수와 유효 플랜지폭(effective flange width)을 산정하여 적절한 수의 종형(longitudinal member)과 횡형(transverse member)으로 격자망을 구성해야 한다. 만약 이 망을 구성하고 있는 각 종형의 단면 제원이 서로 다를 때 각 종형의 중립축 위치는 서로 다르게 되므로 각각의 독립적인 휨거동이 발생된다. 그러나 실제 구조물은 평판과 보강재가 합성된 전체단면의 중립축을 중심으로 일체거동을 하므로 각 종형의 모델링시 전체단면에서의 중립축에 대한 휨거동을 고려할 필요가 있다. 격자구조해석은 교량의

바닥판 해석을 위한 가장 보편적인 방법으로서 이해하기 쉽고 사용하기 편리하나 평판요소나, 보요소의 개별적인 거동을 파악하기가 어렵다.

2.3 유한요소해석(finite element analysis) 이론

임의의 기하학적 형상, 하중조건 및 경계조건을 갖는 보강판의 이론적 해석은 불가능하므로 근사적인 수치해석법이 요구되고 있는데, 그 중 유한요소법이 강력한 구조해석 수단으로 인식되고 있다. 유한요소법에 의한 보강판의 해석방법은 크게 2가지로 분류할 수 있는데 첫째는, 절곡평판(folded plate) 구조로 모델링하는 방법으로 면내력과 휨기동을 고려할 수 있는 평면 셀요소(flat element)로 평판과 보강재를 이산화시키는 개념인데 요소분할에 따른 많은 자유도가 필요한 단점을 갖게 된다. 둘째는 McBean¹⁷⁾ 등에 의하여 시도된 방법인데 보강재를 1차원 보로, 평판은 2차원 평판요소로 모델링하는 이산화 보강재법(discrete stiffener approach)으로 보강재 요소에 대해서는 별도의 절점을 추가적으로 부여하지 않으며 평판의 중립면에 접속된 보로 가정하여 보에 대한 강성을 평판에 더해 주는 개념이다. 두꺼운 보강재의 경우 전단변형 효과를 고려해야 하며 모델링이 비교적 간편한 이유 등으로 후자의 경우가 많이 사용되고 있다. 만약 보강재가 비대칭으로 보강되었다면 보강재요소와 평판요소의 중립축이 일치하지 않으므로 편심거리(offset distance)에 따른 좌표변환이 필요하다.

3. P-version 유한요소모델

3.1 형상함수

변위의 형상함수 구성에 있어 적분형 르장드르 다항식에 근거를 둔 C⁰- 계층요소가 사용되었다. 종래의 라그랑제(Lagrange type) 다항식은 비계층적 성질(non-hierarchic nature)을 갖게 되어 형상함수의 차수 p가 증가할 때마다 새로운 형태의 형상함수가 정의되어야 하는 반면, 르장드르(Legendre type) 다항식은 계층적 성질을 갖게 되므로 전 단계의 형상함수에 현 단계의 형상함수

를 추가하는 방법으로 구성된다. 한편, 요소의 변위장을 수식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \phi &= \sum_{j=1}^{P+1} N_j(\xi) \tilde{\phi}_j^i \\ &= [N^T] \{\tilde{\phi}^i\} \end{aligned} \quad (1)$$

여기서, [N^T]=적분형 르장드르 함수에 의한 형상함수

{ $\tilde{\phi}^i$ }=절점변위

p=형상함수의 차수

또한, 르장드르 다항식 P_n(x)는 Rodrigue의 식을 사용하여 일반적인 식으로 나타내면 (2)식과 같이 정의된다.

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

그러나, 1차원 보의 강성도행렬을 일반적으로 (3)식과 같이 정의된다고 가정하면 N_i, N_j는 르장드르 다항식 P_n(x)를 적분한 형태를 취해야만 (3)식의 적분기호 안에서 보는 바와 같이 1차 미분되어 본래의 르장드르 함수가 되며, 동시에 르장드르 다항식의 고유성질인 직교성(orthogonality)을 유지할 수 있게 된다.

$$K_{ij} = \int_{-1}^1 \frac{dN_i}{d\xi} \frac{dN_j}{d\xi} d\xi \quad (3)$$

따라서, 형상함수가 1차(k=1,2)일 때는 절점좌표를 갖는 모서리 절점(corner node)이므로 라그랑지형이나 르장드르형의 선형 보간함수를 그대로 사용하고 형상함수가 2차 이상일 경우는 절점좌표가 없는 절점(nodeless node)이 추가되는 주변 절점(side node)에 대해서는 적분형 르장드르 함수가 사용되며 (4)식과 같이 정의된다.

$$N_k = \sqrt{\frac{2k-1}{2}} \int_{-1}^{\xi} P_{k-1}(t) dt, \quad k > 2 \quad (4)$$

3.2 강성도행렬의 유도

3.2.1 변위-변형률관계

보강재의 변위-변형률 관계는 다음의 4가지 구

조적 모드(mode)에 의해 지배받는다. 첫째 축방향 거동(pure axial extension), 둘째 횡방향 휨 거동(in-plane or lateral bending), 셋째 연직방향 휨거동(transverse bending), 넷째 비틀거동(torsion)인데 위의 4가지 항은 보강재의 축방향 변형률과 전단 변형률을 지배하는 항들로서 축방향 변형률은 첫째, 둘째, 셋째항에 의하여 발생되고 전단변형률은 셋째, 넷째항에 의하여 발생된다.

한편, 보강재와 평판의 접속부에서 변형의 적합조건(compatibility)을 만족시키기 위해 면내 전단변형률(in-plane or lateral shear strain)은 무시하므로 횡방향 휨거동에 의한 전단변형은 고려하지 않는다. 이 가정은 평판의 면내 강성도(in-plane stiffness)가 연직휨에 대한 강성도에 비해 매우 크므로 접속되는 보강재의 평판의 면내 방향 전단변형률을 0으로 만들며 이로 인한 전단 변형효과를 무시할 수 있는 근거가 된다.

보강재의 변위-변형률 관계식을 유도하기 위하여 기본가정은 보강재는 평판에 완전히 접합되어 일체거동을 하여야 하며 변형은 아주 작다고 가정한다. 또한 휨에 의하여 발생하는 축방향 변형률은 선형이고 연직방향의 전단변형을 고려하고 있으며, 단면의 뒹거동(warping)은 길이 방향에 따라 일정하다고 가정하여 뒹함수(warping function) ψ 도 길이 방향에 무관하기 때문에 본질적으로 뒹응력은 무시하였다. 그리고 보강재의 재료는 선형, 탄성이며 균질하고 등방성으로 가정한다.

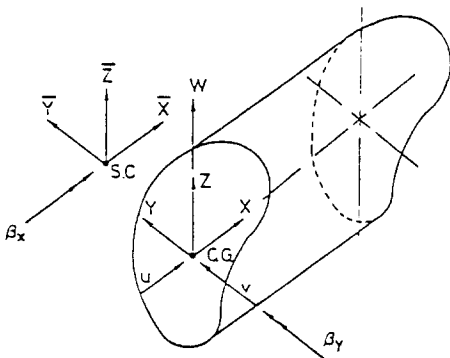


그림 1. 보강재의 변위장

앞서 설명한 보강재의 거동을 지배하는 4가지 기본 모드와 가정을 기초로 한 보강재의 변위변형률 관계식은 아래와 같이 요약할 수 있다.

$$\epsilon_x = \frac{du}{dx} + z \frac{d\beta_y}{dx} - y \frac{d^2v}{dx^2} \tag{5}$$

$$\gamma_{xy} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - \bar{z} \right) \frac{d\beta_x}{dx} \tag{6}$$

$$\gamma_{xz} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} + \bar{y} \right) \frac{d\beta_x}{dx} + \left(\frac{dw}{dx} + \beta_y \right) \tag{7}$$

3.2.2 국부좌표계에서의 강성도 행렬

범함수로 정의되는 변형에너지는 다음과 같다.

$$U = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 [\tilde{D}]^T [\tilde{S}] [\tilde{D}] d\xi \tag{8}$$

여기서, 변형률 매트릭스와 탄성 매트릭스는 아래와 같다.

$$[\tilde{D}] = [\Phi_{,\xi}^1, \Phi_{,\xi\xi}^2, \Phi_{,\xi}^3, \Phi_{,\xi}^4, \Phi^4, \Phi_{,\xi}^5]^T \tag{9}$$

$$[\tilde{S}] = \begin{bmatrix} \frac{2EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{-4EI_{yz}}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{2\gamma GA}{L} & 0 & \gamma GA & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma GA & 0 & \frac{L\gamma GA}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-4EI_{yz}}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_y}{L} \end{bmatrix} \tag{10}$$

(1)식을 이용하여, 변형률 매트릭스 $[\tilde{D}]$ 을 형상함수와 절점변위 값으로 표시하면

$$[\tilde{D}] = [B] [\tilde{\phi}]^T \tag{11}$$

여기서, $[\tilde{\phi}] = [[\tilde{\phi}^1], [\tilde{\phi}^2], [\tilde{\phi}^3], [\tilde{\phi}^4], [\tilde{\phi}^5]]$

$$[B] = \begin{bmatrix} N_{,\xi}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{,\xi}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{,\xi}^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{,\xi}^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{,\xi}^5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{,\xi}^5 \end{bmatrix} \tag{12}$$

(9)식과 (10)식을 (8)식에 대입 후 (13)식과 같은 요소 강성도 매트릭스 구할 수 있다.

$$[\tilde{K}_S] = \begin{bmatrix} [\tilde{K}_{11}] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [\tilde{K}_{22}] & 0 & 0 & [\tilde{K}_{25}] \\ 0 & 0 & [\tilde{K}_{33}] & 0 & [\tilde{K}_{35}] \\ 0 & 0 & 0 & [\tilde{K}_{44}] & 0 \\ 0 & [\tilde{K}_{25}] & [\tilde{K}_{35}] & 0 & [\tilde{K}_{55}] \end{bmatrix} \quad (13)$$

여기서

$$\begin{aligned} [\tilde{K}_{11}] &= \tilde{S}_{11} \int_{-1}^1 [N_{i,\xi}^1] [N_{i,\xi}^1]^T d\xi \\ [\tilde{K}_{22}] &= \tilde{S}_{22} \int_{-1}^1 [N_{i,\xi}^2] [N_{i,\xi}^2]^T d\xi \\ [\tilde{K}_{25}] &= \tilde{S}_{26} \int_{-1}^1 [N_{i,\xi}^2] [N_{i,\xi}^5]^T d\xi \\ [\tilde{K}_{33}] &= \tilde{S}_{33} \int_{-1}^1 [N_{i,\xi}^3] [N_{i,\xi}^3]^T d\xi \\ [\tilde{K}_{35}] &= \tilde{S}_{35} \int_{-1}^1 [N_{i,\xi}^3] [N_{i,\xi}^5]^T d\xi \\ [\tilde{K}_{44}] &= \tilde{S}_{44} \int_{-1}^1 [N_{i,\xi}^4] [N_{i,\xi}^4]^T d\xi \\ [\tilde{K}_{55}] &= \tilde{S}_{55} \int_{-1}^1 [N_{i,\xi}^5] [N_{i,\xi}^5]^T d\xi \\ &\quad + \tilde{S}_{66} \int_{-1}^1 [N_{i,\xi}^5] [N_{i,\xi}^5]^T d\xi \end{aligned}$$

3.2.3 전체좌표계에서의 강성도 매트릭스

보강재와 평판의 접속부에서의 변위의 적합조건을 만족하기 위해서 보강재의 변위장을 평판의 중립면에 대한 변위장으로 나타내야 한다. 보강재와 평판의 변위장은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} [\delta]_{st} &= [u, v, w, \beta_x, \beta_y]_{st}^T \\ [\delta]_{pl} &= [u, v, w, \beta_x, \beta_y]_{pl}^T \end{aligned} \quad (14)$$

여기서, st는 보강재를, pl은 평판을 나타내며, 보강재와 평판을 국부좌표계에서 전체좌표계로 좌표변환 매트릭스 [T]를 사용하여 정의하면 다음과 같다.

$$[\delta]_{st} = [T] [\delta]_{pl} \quad (15)$$

$$[T] = [T_1] [T_2] \quad (16)$$

여기서, [T₁], [T₂]는 보강재의 위치와 평판의 기준축이 이루는 각과 보강재와 평판의 중립축 거리인 편심거리에 따른 좌표변환 매트릭스로 C와 S는 보강재의 방향에 따른 국소 좌표축과 평판의

기준축이 이루는 각에 대한 여현(cosine)과 정현(sine)값을 말하며, e_y와 e_z는 기준 좌표축 중심에서 보강재와 평판의 접속부까지 거리이며, \bar{e}_y 와 \bar{e}_z 는 전단중심에서 보강재와 평판의 접속부까지 거리를 나타낸다.

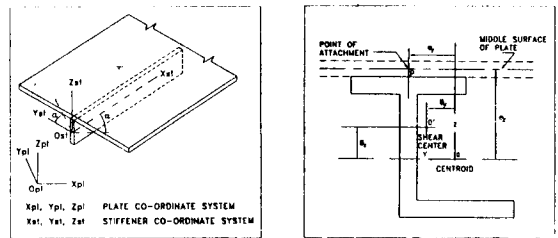
[T₁]=보강재의 임의방향에 따른 좌표변환 매트릭스

$$= \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 & 0 \\ -S & C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C & S \\ 0 & 0 & 0 & -S & C \end{bmatrix} \quad (17)$$

[T₂]=보강재와 평판의 중립축간의 편심에 대한 좌표변환 매트릭스

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -e_z & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -(e_y - \bar{e}_y) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & (e_y - \bar{e}_y) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

위의 두 좌표변환 매트릭스를 곱하면 다음과 같다.



(보강재의 방향)

(보강재의 편심)

그림 2. 보강재 방향(orientation)과 편심(eccentricity)에 따른 좌표 보정

$$[T] = \begin{bmatrix} C & S & 0 & -Ce_z & -S(e_z - \bar{e}_z) \\ -S & C & 0 & Se & -C(e_z - \bar{e}_z) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & (e_y - \bar{e}_y) \\ 0 & 0 & 0 & S & -C \\ 0 & 0 & 0 & C & C \end{bmatrix} \quad (19)$$

보강재를 평판의 기준좌표계로 좌표변환하는 변환매트릭스는 각각의 절점변수의 좌표변환과 관계가 있다. 이 관계를 이용하면

$$[\phi]_{st} = [T][\phi]_{pi} \quad (20)$$

그러므로, 전체좌표계에 대한 보강재의 강성도 매트릭스는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$[K]_{pi} = [T]^T [K]_{st} [T] \quad (21)$$

3.3 단면력 벡터

유한요소 방정식으로 부터 각 축력(P), 휨 모멘트(M)와 비틀 모멘트(T)을 구하면 아래 식과 같다.

$$P = EA \frac{du}{dx} \quad (22)$$

$$V_z = \gamma GA \left(\frac{dw}{dx} + \beta_y \right) \quad (23)$$

$$M_y = -EI_y \frac{d\beta_y}{dx} + EI_{yz} \frac{d^2v}{dx^2} \quad (24)$$

$$M_z = EI_{yz} \frac{d\beta_x}{dx} - EI_z \frac{d^2v}{dx^2} \quad (25)$$

$$M_T = -GJ \frac{d\beta_x}{dx} \quad (26)$$

여기서, E, G, A는 각각 탄성계수, 전단 탄성계수 및 단면적이며, I_y, I_z, I_{yz} 는 y축, z축을 중심으로 2차 단면모멘트 및 2차 상승모멘트이며, 횡방향 휨(in-plane bending)을 무시할 경우 $I_z = I_{yz} = 0$ 이 된다. 한편, J와 λ 는 비틀상수 및 전단계수이다.

4. 수치해석 예제

해석모델은 참고문헌^{1,3,4,6)}에서 해석되는 기본 예제를 택하였는데 4변이 모두 단순지지된 평판으로 등분포하중(10psi)과 평판 중앙에 집중하중(1kip)을 받는 경우이며, 판과 보강재는 동일재료로서 탄성계수는 30×10^6 psi, 프아송비는 0.3이다. 보강재의 결합 형태에 따라 대칭보강된 경우와 비대칭보강된 경우 두가지를 예로 들었고, 결과치의 검증은 위하여 이론해³⁾와 기존 연구자들이 수행한 수치해석 근사해^{1,3,4,6)}가 사용되었다. 이론해는 보강판의 지배방정식을 유도한 후 미분방정식의 해를 구하기 위하여 단일 Fourier 급수를 사용한 OMS(Operational Mathematics with Single series)방법과 이중 Fourier 급수를 사용한 OMD(Operational Mathematics with Double series)방법을 들 수 있다. 한편, 수치해석법은 C¹-연속 조건을 만족시켜주기 위해 절점변위(nodal variable)에 적절한 구속을 가하는 동시에 형상함수의 차수를 자유롭게 사용할 수 있는 구속법(constraint method)을 사용한 Rossow⁴⁾의 연구결과와 Worsak이 개발한 h-version 소프트웨어인 MICROFEAP-II의 해석 결과를 비교, 검토하였다. p-version 모델은 그림 3에서 보는 바와 같이 기하형상을 표현할 수 있는 최소 갯수의 요소인 3개 요소로 분할한 후 수렴성 조사를 한 후 수렴구간에 있는 적절한 형상함수 차수 p를 결정하여 사용하였다. 본 연구에서의 해석내용은 크게 두가지로 요약할 수 있다. 첫째는, h-version 유한요소 소프트웨어인 MICROFEAP-II과 본 연구에서 제안하는 p-version 유한요소법의 수렴성과 정확도의 비교이다. 두 모델의 결과를 검증하기 위하여 이론해인 OMS 방법과 수치해석법인 구속법이 사용되었는데 이들 방법은 전단변형을 고려하지 않았기 때문에 전단변형을 구속한 후 비교하였다. 둘째는, 보강재의 형상에 따라 전단변형효과가 크기 때문에 전단변형을 고려할 수 있는 MICROFEAP-II 만의 비교를 하였다.

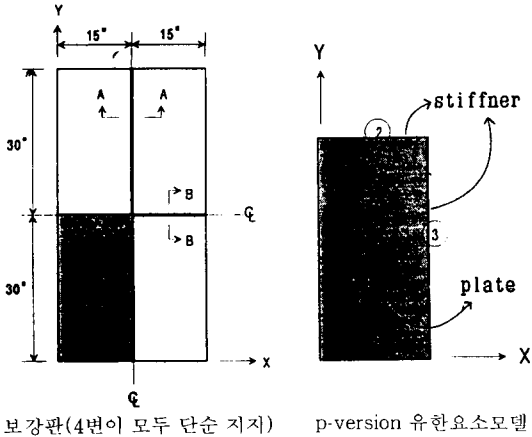


그림 3. 해석 보강판의 제원

4.1 보강재의 전단변형효과를 고려하지 않은 경우

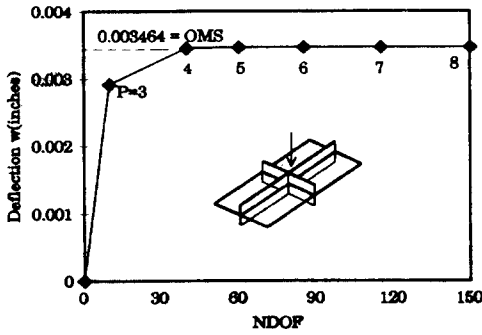
자유도의 증가에 따른 보강판의 중앙처짐에 대한 수렴성 조사를 하였다. 비교 대상인 MICROFEAP-II 과 p-version 모델에 모두 전단 변형 효과를 구속하였다. 왜냐하면, 두가지 모델의 결과에 대한 검증은 위하여 사용되는 Chang의 OMS방법과 Rossow의 구속법은 전단변형이 배제된 값이기 때문이다. 해석모델은 보강판의 대칭성을 고려하여 전체판의 1/4만이 모델링 되었고, 하중은 집중하중(1kip)이 보강판의 중앙에 재하되었다. 선형 보간함수를 사용한 h-version 유한요소법은 균등한 요소분할을 통해 요소의 갯수(NOE)를 표 1과 같이 8개에서 495개로 증가시켰으며, 이에 따른 자유도(NDOF)는 12에서 1350까

지 증가시키면서 해의 수렴성을 검증해 보았는데 자유도가 600(NOE=230)부터는 해석값이 이론해와 거의 일치함을 알 수 있었다. 반면, p-version 유한요소법에 의한 해는 요소의 갯수를 3개로 고정하고 표 2와 같이 형상함수의 차수 p를 3차에서 8차까지 증가시키면서 수렴성을 분석하였는데 자유도가 60(p=5)부터 수렴구간에 드는 것을 알 수 있었다. 즉, 그림 4를 보면 p-version에 의한 중앙처짐과 h-version에 의한 중앙처짐은 자유도 증가에 따라 OMS방법에 의한 값 $3.464 \times 10^{-3} \text{in.}$ 에 모두 수렴하는 것을 알 수 있으나, 그림 5와 같이 보강재가 비대칭보강되었을 때 동일한 자유도에서 p-version의 결과는 1.240×10^{-3} 로 OMS방법에 의한 이론값 1.216×10^{-3} 과 거의 일치함(상대오차 1.9%)을 보여 주는 반면, h-version의 결과는 0.816×10^{-3} (상대오차 32.9%)로 전혀 수렴하지 않는 것을 알 수 있다. 참고로 표 2에서 보는 바와 같이 구속법에 의한 중앙처짐은 1.270×10^{-3} (상대오차 4.4%)로 역시 이론값에 비하여 약간 크게 산출되었다. 이로부터 h-version 모델은 비대칭보강판의 경우에 해의 신뢰성을 보여주지 못함을 알 수 있는데 그 이유는 편심에 대한 좌표변환 매트릭스의 문제와 횡방향 휨(in-plane bending)의 영향을 무시하거나 응력특이 발생되는 보강재와 평판의 접합부에 대한 요소분할이 적절치 못한 데 기인한다고 판단된다.

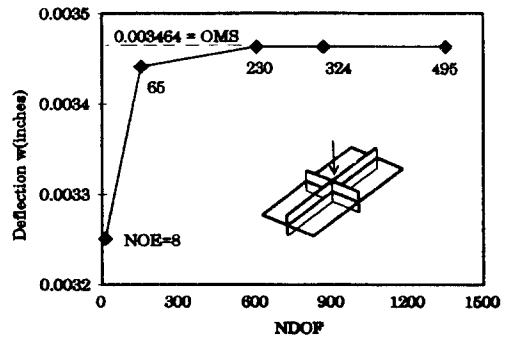
한편, 보강판의 중앙부에서의 모멘트에 대한 비교를 표 2에 나타내었는데, 대칭보강판의 경우는 중앙처짐의 경우와 동일한 경향을 보이고 있으며 OMS방법에 의한 모멘트 M_x 가 2.099in-lb/in인데 비해 구속법은 2.143in-lb/in, h-version 해석값은 2.076in-lb/in, 그리고 p-version 해석값은 2.146in-lb/in로 모든 결과가 서로 근접된 결과를 보이는 반면, 비대칭보강판의 경우는 OMS방법에 의한 모멘트 M_x 가 $0.745 \times 10^{-3} \text{in-lb/in}$ 인데 비해 구속법은 0.854in-lb/in로 다소 차이를 보이고, h-version 해석값은 0.499in-lb/in로 현격한 차이를 보여주고 있다. 그러나, 표 2에서 보듯이 p-version 모델은 0.751in-lb/in로 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. 따라서 p-version 유한요소모델

은 전단변형이 구속되어 있는 경우 대칭보강 또는 비대칭보강된 보강판 해석에 빠른 수렴성과 높은 정확도를 보여 주고 있음을 알 수 있다.

4.2 보강재의 전단변형 효과를 고려한 경우 일반적으로 보강재의 길이를 L, 높이를 h라 할 때 형상비 L/h가 작을수록 전단변형 효과가 중요

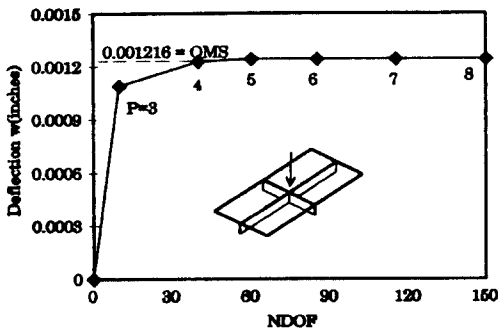


(a) p-version 모델

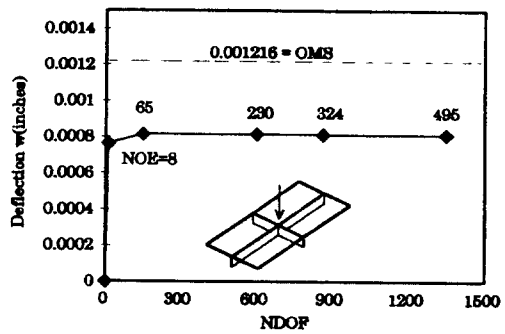


(b) h-version 모델

그림 5. 중앙에 집중하중(1kip)이 작용하는 비대칭보강판의 최대 처짐



(a) p-version 모델



(b) h-version 모델

그림 4. 중앙에 집중하중(1kip)이 작용하는 대칭보강판의 최대 처짐

표 1. h-version 및 p-version 유한요소법에 의한 수렴성 검토(전단변형을 구속한 경우)

구 분	h-version 유한요소법			p-version 유한요소법		
	NOE	NDOF	$w_{center} (in \times 10^{-3})$	P-LEVEL	NDOF	$w_{center} (in \times 10^{-3})$
대칭보강 (1kip 집중하중)	-	-	-	3	10	2.912
	8	12	3.251	4	40	3.446
	65	150	3.441	5	60	3.464
	230	600	3.463	6	85	3.464
	324	864	3.463	7	115	3.464
	495	1350	3.464	8	150	3.464
	OMS 이론해[3]		3.464	OMS 이론해[3]		3.464
비대칭보강 (1kip 집중하중)	-	-	-	3	10	1.090
	8	12	0.761	4	40	1.228
	65	150	0.814	5	60	1.240
	230	600	0.816	6	85	1.240
	324	864	0.815	7	115	1.240
	495	1350	0.813	8	150	1.240
	OMS 이론해[3]		1.216	OMS 이론해[3]		1.216

한 것으로 알려져 있다. 본 연구에서도 해석대상인 보강판의 긴 보강재(longer stiffener)는 $L/h=20$ 이며 짧은 보강재(shorter stiffener)는 $L/h=6$ 이므로, 전단변형효과의 영향이 클 것으로 예상된다. 한편, 앞에서 언급한 바와 같이 OMS방법과 구속법은 전단변형을 고려하지 않은 관계로 p-version 연구결과와의 비교가 불가능하기 때문에 MICROFEAP-II의 결과와만 비교하였다. 즉, 그림 6에서는 긴보강재 방향으로의 최대 처짐은 전단변형을 고려하지 않은 경우 MICROFEAP-II (NDOF=600, NOE=230)에 의하면 3.463×10^{-3} in.이고 p-version(NDOF=60, $p=5$, NOE=3) 결과는 3.464×10^{-3} 로 일치된 반면, 전단변형을 고려한 경우에는 각각의 결과는 3.478×10^{-3} in., 3.722×10^{-3} in.로 MICROFEAP-II는 전단변형에 의한 처짐 증가가 불과 0.4%인데 비해 p-version결과는 7.4%를 보여준다. 한편,

비대칭 보강판의 MICROFEAP-II에 의한 결과는 앞절에서 설명한 바와 같이 이론해와 현격한 차이를 보여 비교하는 것이 무의미하다고 판단되므로 p-version 결과만을 분석하였다. 즉, 전단변형이 구속되었을 경우 최대처짐은 1.240×10^{-3} in이며 전단변형을 고려한 경우는 1.447×10^{-3} in로 16.6%의 처짐증가를 보여 비대칭 보강판의 경우가 전단변형효과가 훨씬 큼을 알 수 있다. 그 이유는, 대칭보강판의 경우 전단변형이 최대가 되는 보강재의 중립면이 평판과 접합되어, 평판의 면내강성(in-plane rigidity)이 전단변형을 억제하는 반면 비대칭 보강판의 경우는 보강재의 상단부가 평판의 중립면과 접합되므로 전단변형이 자유롭게 발생되는데 기인하는 것으로 분석된다.

다음은 전단변형 효과에 대한 모멘트의 비교를 분석하였다. 그림 7과 8은 짧은 보강재와 긴 보강재에 집중하중이 재하되었을 때 전단변형의 영향

표 2. 평판의 중앙부($x=15^\circ, y=30^\circ$)에서의 해석 결과

구 분	결과치 ($x=15^\circ, y=30^\circ$)	P-version NDOF=115		H-version NDOF=864		Constraint Method [4]	Theoretical [3]	
		Shear Included	Shear Supressed	Shear Included	Shear Supressed		OMS	OMD
대칭보강 (1kip 집중하중)	W_{center} (in $\times 10^{-3}$)	3.722	3.464	3.478	3.463	3.464	3.464	3.463
	M_{xx} (in-lb/in)	2.146	2.142	2.106	2.076	2.143	2.099	2.069
	M_{yy} (in-lb/in)	1.164	1.124	1.101	1.092	1.127	1.102	1.083
대칭보강 (10psi 등분포하중)	W_{center} (in $\times 10^{-3}$)	25.62	24.09	24.12	24.04	24.08	24.07	24.08
	M_{xx} (in-lb/in)	6.580	6.503	0.660	0.891	6.963	7.274	7.597
	M_{yy} (in-lb/in)	-15.74	-16.23	-21.30	-20.2	-15.92	-13.89	-12.36
비대칭보강 (1kip 집중하중)	W_{center} (in $\times 10^{-3}$)	1.447	1.240	0.829	0.815	1.270	1.216	1.184
	M_{xx} (in-lb/in)	0.740	0.751	0.531	0.499	0.854	0.745	0.701
	M_{yy} (in-lb/in)	0.280	0.304	0.261	0.253	0.424	0.289	0.285
비대칭보강 (10psi 등분포하중)	W_{center} (in $\times 10^{-3}$)	10.53	9.010	6.699	6.597	8.850	8.814	8.616
	M_{xx} (in-lb/in)	2.870	2.850	-4.493	-4.288	3.869	2.968	2.975
	M_{yy} (in-lb/in)	-6.692	-6.997	-11.42	-10.13	-2.427	-5.805	-4.870

이 어떻게 작용하는지 비교하였다. 여기서, 모멘트는 보강재의 강성이 평판의 중립면으로 환산되었을 때 평판에서 발생되는 모멘트이며 단위는 in-lb/in이다. 짧은 보강재(L/h=6)에서는 그림 8에서 보는 바와 같이 전단변형을 고려할 때 모멘트의 변화가 매우 작은 반면, 긴 보강재(L/h=20)에서는 전단변형을 고려함에 따라 모멘트의 증가

가 나타나고 있다. 그 이유는 작용하는 집중하중을 긴 보강재에 비해 짧은 보강재가 더 많이 분담하게 되며, 아울러 형상비(L/h)가 상대적으로 작은 짧은 보강재에서 전단변형이 더 크게 발생하는데, 이런 결과가 하중 재분배(redistribution)에 의해 긴 보강재에 더 큰 모멘트를 유발하게 되는 것으로 분석된다. 그림 8에서 보듯이 전단변형을

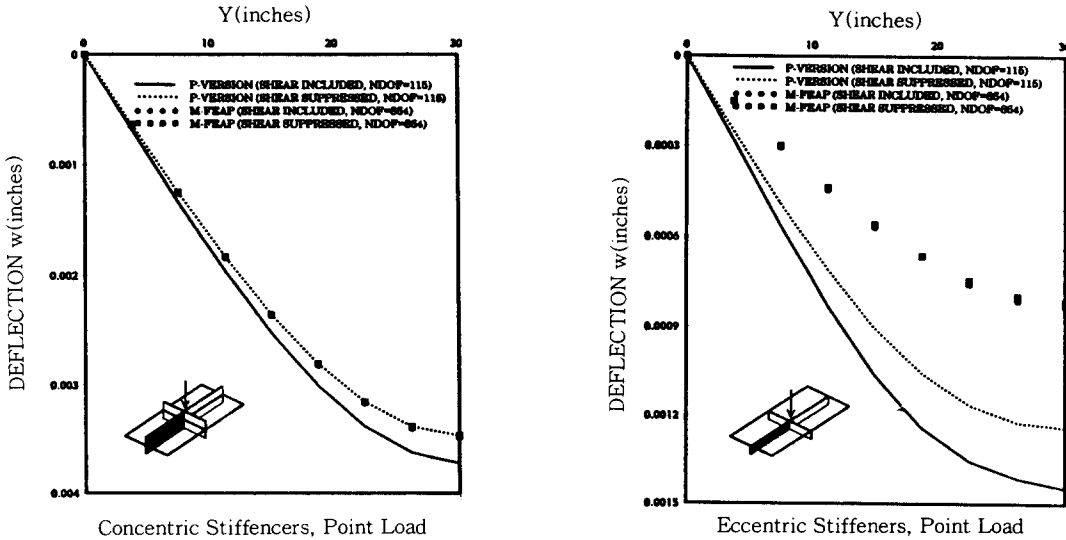


그림 6. 집중하중(1kip) 작용시 전단변형이 고려된 보강판의 처짐(x=15.0°)

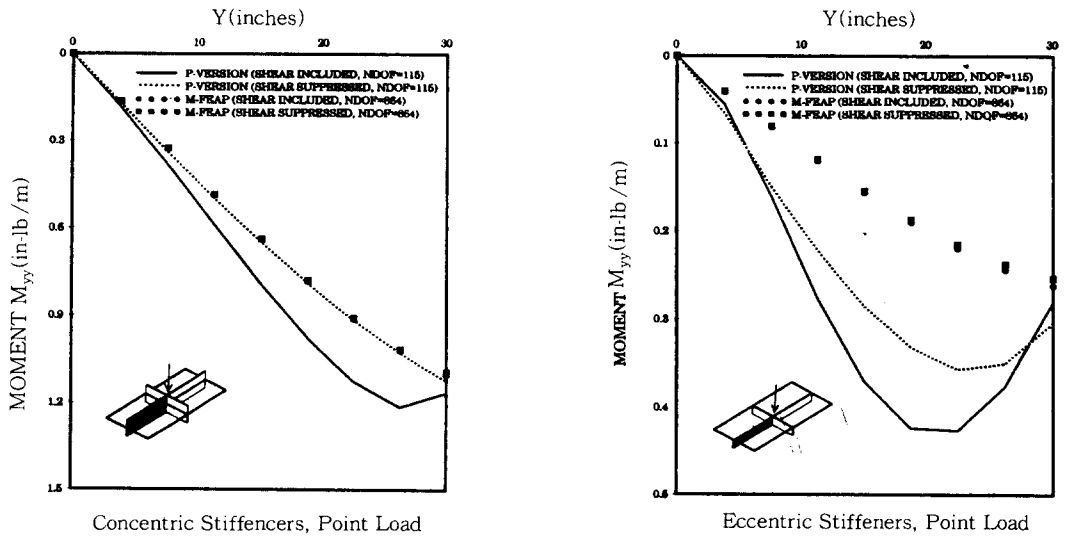


그림 7. 긴 보강재를 따라 발생하는 모멘트 Myy의 비교 (x=15.0°)

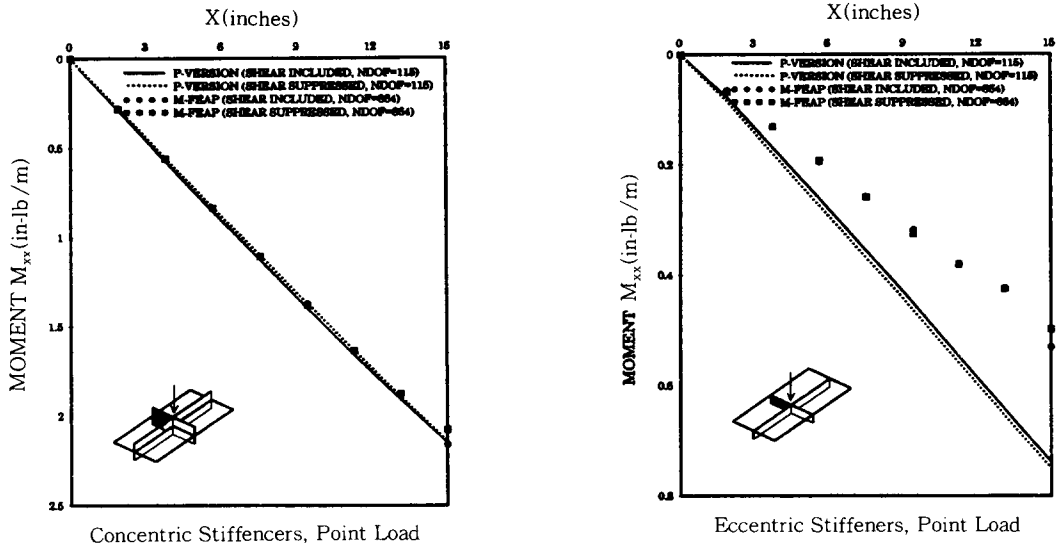


그림 8. 짧은 보강재를 따라 발생되는 모멘트 M_{xx} 의 비교 ($y=30.0$)

고려할 때 모멘트는 대칭보강의 경우 약간 감소 추세를 보인 반면, 비대칭보강의 경우는 오히려 약간 증가되는 경향을 보이고 있다. 또한 그림 7에서 보는 바와 같이 전단변형이 고려되었을 때 긴 보강재($x=15.0$)의 모멘트 변화는 보강판의 중앙에 가까울수록 모멘트가 감소되는 경향이 있으며, 특히 전단변형 효과가 상대적으로 큰 비대칭보강판의 경우 뚜렷한 추세를 보여주고 있다. 이것은, 3inch 깊이의 긴 보강재 단면이 5inch 깊이를 갖는 짧은 보강재와 중앙에서 교차하므로 접합면에서 단면의 크기가 급작스레 커지기 때문에 모멘트가 감소하게 되는 것으로 판단된다. 이와 같은 현상은 짧은 보강재를 따라 발생되는 모멘트의 경우 단면깊이가 큰 짧은 보강재가 단면깊이가 작은 긴 보강재와 접합되는 경우에는 단면의 크기에 영향을 받지 않으므로 그림 8에서 보듯이 나타나고 있지 않음을 알 수 있다.

또한, 비대칭보강판의 경우가 대칭보강판 보다 약 2-3배 정도 적은 처짐과 모멘트값을 표 2과 그림 6, 7, 8에서 보여주고 있는데 이는 비대칭보강판이 구조적으로 훨씬 효율적이라는 것을 입증하고 있다.

5. 결 론

본 연구는 보강판의 휨모멘트와 처짐을 p-version 유한요소법으로 해의 정확성과 효율성을 입증하기 위한 연구로써 본 연구에서 얻은 결론을 요약하면 아래와 같다.

(1) 전단변형이 구속된 경우의 수렴성 조사 결과 p-version 유한요소법에 의한 중앙처짐은 5차 형상함수를 이용하여 3개의 요소로 모델링 ($NDOF=60$)할 때 대칭 및 비대칭 보강판의 이론 해인 OMS결과와 거의 일치하는 반면, MICROFEAP-II에 의한 해석결과는 230개 요소로 모델링 ($NDOF=600$)할 때 대칭보강판의 경우는 OMS결과와 대체로 일치하나, 비대칭 보강판의 경우는 이론해의 중앙처짐의 67% 밖에 되지 않아 현격한 차이를 보이고 있다. 그 이유는 편심 거리에 대한 정확한 변환행렬에 문제점이 있는 것으로 판단된다.

(2) 짧은 보강재($L/h=6$)에 발생되는 최대 모멘트는 긴보강재($L/h=20$)의 최대 모멘트와 비교할 때 M_{xx} , M_{yy} 모두 약 2-3배 정도 크게 발생되었다.

(3) 짧은 보강재에서는 전단변형을 고려할 때 모멘트의 변화가 매우 작은 반면, 긴 보강재는 전단변형을 고려함에 따라 모멘트의 증가가 나타나고 있다. 그 이유는 작용하는 집중하중을 긴 보강재에 비해 짧은 보강재가 더 많이 분담하게 되며, 아울러 형상비(L/h)가 상대적으로 큰 짧은 보강재에서 전단변형이 더 크게 발생되는데, 이런 결과가 하중재분배(redistribution)에 의해 긴 보강재에 더 큰 모멘트를 유발하게 되는 것으로 분석된다.

(4) 대칭보강판에 비해 비대칭 보강판의 경우가 전단변형효과가 큼을 알 수 있었다. 즉, 전단변형을 고려한 경우 보강판의 중앙처짐은 대칭보강판의 경우 7.4% 정도 증가된 반면, 비대칭 보강판의 중앙처짐은 16.6% 정도 증가되었다. 그 이유는 평판의 중립면을 기준으로 대칭보강판은 중립면에 상하대칭이므로 전단변형 효과가 평판의 면내강성에 의해 억제되는 반면, 중립면으로부터 하부로 보강되는 비대칭 보강판의 경우는 전단변형이 자유롭게 발생되는데 기인하는 것으로 사료된다.

(5) 비대칭보강판이 대칭보강판보다 2-3배 정도 적은 처짐과 모멘트값을 나타냄으로써 구조적으로 효율적이라고 판단된다.

참 고 문 헌

[1] Kohnke and Schnobrich, *Analysis of Stiffened Plates by the Finite Element Method*, Doctoral Dissertation, Stanford University, 1968.

[2] Lindbergh, *Finite Element Analysis of Elastic-Plastic Plates and Eccentrically Stiffened Plates*, Doctoral Dissertation, Lehigh University, 1972.

[3] Chang, S.Y., *Analysis of Eccentrically Stiffened Plates*, Doctoral Dissertation, University of Missouri, 1973.

[4] Rossow, M.P., "Computer Implementation of the Constraint Method," *Computers & Structures*, Vol. 6, 1976, pp. 203-209.

[5] Paliwala, J.H., *Plate Stability Analysis by the Constraint Method*, Doctoral Dissertation, Sever Institute, Washington University, St. Louis, Mo., 1974.

[6] Mukhopadhyay, M., "Stiffened Plates in Bending," *Computers & Structures*, Vol.50, 1994, pp.541-548.

[7] Metha, A.K., *P-Convergent Finite Element Approximations in Linear Elastic Fracture Mechanics*, Doctoral Dissertation, Washington University, St. Louis, Missouri, 1978.

[8] Babuska, I. and Szabo, B.A., *The P-Version of F.E.M.*, Report WU/CCM-79/1, Washington University, 1979.

[9] Babuska, I. and Suri, M., *The Optimal Convergence Rate of the P-Version of the Finite Element Method*, Technical Note BN-1045, Laboratory for Numerical Analysis, Institute for Physical Science and Technology, Maryland University, 1985.

[10] AIT, *MICROFEAP-II User's Manual*, 1993.

[11] Huber, M.T., "Zur Elastizitätstheorie der Anorthotropen Platten," *Timoshenko 60th Anniversary Volume*, Macmillan, 1938, pp. 89-92.

[12] Ibrahimkhail, A.K., *Analysis of Stiffened Plates by the Constraint Method*, Master's Thesis, Washington University, 1976.

[13] Hughes, T.H.R., Taylor, R.L., and Kanoknukulchai, W., "A Simple and Efficient Finite Element for Plate Bending," *Int. J. Numer. Eng.*, 11, 1977, pp. 1529-1543.

[14] Troitsky, M.S., *Orthotropic Bridges*, 2nd Edition, The James F. Lincoln Arc Welding Foundation, 1987.

[15] Jaeger L.G. and Bakht, Baidar, *Bridge Analysis by Micro Computer*, McGraw-Hill, 1985.

[16] Hambly, E.C, *Bridge Deck Analysis*, Wiley New York, 1991.

[17] McBean, R.P., *Analysis of Stiffened Plates by the Finite Element Method*, Doctoral Dissertation, Stanford University, 1968.

(접수일자 : 1995. 10. 11)