

# 수직면에서 회전운동 하는 단일 탄성링크를 가지는 매니퓰레이터의 모델링과 제어에 관한 연구

김종대\*, 오석형\*\*, 김기호\*\*\*, 오재윤\*\*\*\*

## A Study on the Modeling and Control of a Flexible One-Link Manipulator Moving in a Vertical Plane

Jongdae Kim, \* Seokhyung Oh, \*\* Kiho Kim, \*\*\* Chaeyoun Oh, \*\*\*\*

### ABSTRACT

This paper presents a technique to model and control a manipulator which has a flexible link and moves in a vertical plane. The flexible link is modeled as an Euler-Bernoulli Beam. Elastic deformation of the flexible link is represented using the assumed modes method. A comparison function which satisfies all geometric and natural boundary conditions of a cantilever beam with an end mass is used as an assumed mode shape. Lagrange's equation is utilized for the development of a discretized model. This paper presents a simple technique to improve the correctness of the developed model. The final model including the shortening effect due to elastic deformation correlates very well with experimental results. The free body motion simulation shows that two assumed modes for the representation of the elastic deformation is proper in terms of the model size and correctness. A control algorithm is developed using PID control technique. The proportional, integral and derivative control gains are determined based on dominant pole placement method with a rigid one-link manipulator. A position control simulation shows that the control algorithm can be used to control the position and residual oscillation of the flexible one-link manipulator effectively.

**Key Words** : assumed mode(가정된 모드), elastic deformation(탄성변형), comparison function(비교함수), shortening effect(줄어들 효과), PID control(비례 적분 미분제어), dominant pole placement(지배극점배치)

### 1. 서 론

큰 작업 공간이나 큰 부가하중을 가지거나, 고속의 작업이나 고 정밀도가 요구되는 작업에 이용되거나, 매니퓰레이터의 설계시 링크 무게에 제한을 가지는 매니퓰레이

터 시스템은 현재 산업용으로 사용되는 로봇보다 링크의 탄성이 크게 증가한다. 이같은 링크의 탄성 증가는 매니퓰레이터의 동적 거동 해석이나 제어를 위한 모델을 개발할 때 링크 탄성의 중요성이 커진다. 이것은 링크의 탄성을 적절히 고려해서 모델을 개발해야 한다는 것을 의미

\* 대우전자 부품(주) 생산기술지원팀  
 \*\* 군산대학교 기계공학부  
 \*\*\* 원자력연구소 원전용로봇 시스템개발팀  
 \*\*\*\* 전북대학교 기계공학부

한다.

일반적으로 링크의 탄성을 고려하는 방법에는 다음 두 가지가 있다. 하나는 유한요소법(FEM)이고 다른 하나는 가정된 모우드 방법(assumed modes method)이다. 형상함수(shape function)와 노드변위의 선형적인 조합에 의해 탄성 변위를 나타내는 유한요소법은 복잡한 시스템을 모델링 하는데 용이 하지만 상대적으로 많은 수의 자유도(DOF)를 가지고 시스템을 모델링 하게 된다<sup>(1-6)</sup>. 가정된 모우드 형상과 일반화 좌표의 선형적인 조합에 의해 탄성 변형을 나타내는 가정된 모우드 방법은 복잡한 시스템을 모델링 하기가 쉽지는 않으나 상대적으로 작은 수의 자유도를 가지고도 시스템을 나타낼 수 있다<sup>(7-13)</sup>.

가정된 모우드 법에 사용되는 가정된 모우드 형상으로는 기하학적 경계조건만을 만족하는 허용함수(admissible function)이면 충분하다<sup>(14)</sup>. 가정된 모우드 형상의 선택은 시스템 모델링의 정확도에 많은 영향을 미치므로 시스템의 기하학적(geometric) 경계조건과 자연적(natural) 경계조건 뿐 아니라 시스템의 운동방정식도 만족하는 고유함수를 가정된 모우드 형상으로 사용하는 것이 가장 바람직 하나 아주 단순한 시스템 이외에는 고유함수를 구하기가 용이하지 않다는 문제점이 있다. 일반적으로 가정된 모우드 형상으로 허용함수<sup>(9-11)</sup>와 고유함수<sup>(12,13)</sup>가 많이 사용되나 허용함수의 단순화에 의한 정확도 상실과 고유함수를 구하는 과정의 복잡성 사이에 적절한 보상으로 모든 경계조건을 만족하는 비교함수가 사용될 수 있다<sup>(15)</sup>.

탄성링크를 가지는 매니퓰레이터는 제어를 위해 사용되는 액추에이터 수보다 제어 해야될 일반화 좌표 수가 많으므로 일반 산업용 로봇과 같이 강성링크를 가지는 매니퓰레이터에 사용되었던 제어기법을 그대로 이용 할 수가 없다. 액추에이터와 같은 위치에서 검출된 피이드백 입력을 이용하는 제어<sup>(13,17)</sup>, 끝지점의 위치 속도 등을 피이드백 해서 이용하는 제어<sup>(8,18)</sup>, 시스템의 변동을 대처하기 위한 적응제어<sup>(4,19,20)</sup>, 설정된 성능지수를 최적화 하는 최적 제어<sup>(15,21)</sup> 등과 같이 탄성링크를 가지는 매니퓰레이터를 제어하기 위한 많은 기법들이 여러 참고문헌에서 제시되었다.

본 논문은 수직면 상에서 회전운동 하는(즉, 중력의 영향을 고려 해야하는) 단일 탄성링크를 가지는 매니퓰레이터 시스템의 모델링과 제어기법에 관한 연구이다. 본 논문은 먼저 시스템의 구성과 시스템 모델링시 사용되는 가정 등을 기술하고, 가정된 모우드법과 Lagrange 방정식을 이용하여 이산화된 운동방정식을 유도한다. 이때 가정

된 모우드 형상으로는 끝지점에 질량을 가지는 외팔 보의 기하학적 경계조건과 자연적 경계조건 만을 모두 만족하는 비교함수가 사용된다. 운동방정식의 선형화를 통해 시스템의 고유진동수를 계산하고 이들을 실험에 의해 측정된 고유진동수와 비교해서 개발된 모델의 정확성을 입증한다. 이 과정에서 모델의 정확성을 향상시키기 위한 간단한 방법을 제안한다. 본 논문에서 개발된 모델은 궁극적으로 매니퓰레이터 위치 및 잔류 진동제어에 사용될 것이므로 제어에 이용될 모델의 적절한 크기를 임의의 위치에 관해 일정 각도로 자유 운동시키는 모의실험을 통해서 구한다. 그리고 PID 제어 알고리즘을 개발해서 탄성 매니퓰레이터의 위치 및 구동시 발생하는 잔류진동을 효율적으로 제어 할 수 있음을 모의실험을 이용해서 보여준다.

## 2. 단일 탄성링크를 가지는 매니퓰레이터 시스템

Fig. 1은 단일 탄성링크를 가지는 매니퓰레이터 시스템을 보여주는 그림이다.  $J_h$ 는 매니퓰레이터를 구동하는 액추에이터와 링크를 액추에이터에 고정하는 부위를 합한 허브의 질량 관성 모멘트이고  $M_e$ 와  $J_e$ 는 엔드 이펙터와 유효하중을 합한 끝지점 질량과 질량 관성 모멘트이다. 탄성링크의 길이는 단면적에 비해 아주 커서 전단 변형과 회전 관성 효과를 무시할 수 있으므로 Euler-Bernoulli 법으로 탄성링크를 모델 한다. 탄성링크는 작동시 비틀림이 없이 작동 면에서의 굽힘 변형만 있는 것으로 가정해서 모델 되어 진다. 그리고 조인트 부위의 마찰과 탄성링크의 구조적인 감쇠는 시스템 모델링시 무시된다.

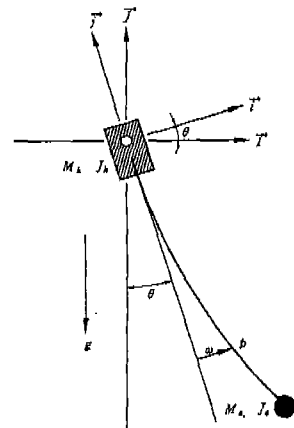


Fig. 1 A schematic diagram of the flexible one link manipulator

### 3. 시스템의 운동 방정식

시스템의 작동 면에서의 탄성 변형은 가정된 모우드 법에 의해 근사하게 나타내어진다. 가정된 모우드 법은 탄성변형을 공간좌표의 함수인 가정된 모우드와 시간의 함수인 일반화 좌표의 선형적인 조합에 의해 나타낸다<sup>(14)</sup>. 이를 이용해서 적당한 크기의 이산화된 모델을 유도한다. 이산화된 모델은 먼저 시스템의 운동 에너지와 위치 에너지를 구한 다음 가정된 모우드 법을 이용하여 다시 나타낸 후에 이들을 Lagrange 방정식에 적용해서 유도한다.

#### 3.1 가정된 모우드 형상(assumed mode shape)의 개발

가정된 모우드 형상을 이용해서 탄성 링크의 변형을 나타내는데 적합한 가정된 모우드 형상의 선정은 최종 모델의 정확도에 많은 영향을 미친다. 본 시스템에서 탄성링크는 액츄에이터에 고정되어서 탄성운동을 하므로 외팔보와 같은 형태의 변형 운동을 한다고 생각할 수 있다. 따라서 외팔 보가 끝지점에 질량을 가지는 경우의 모든 기하학적 경계조건과 자연적 경계조건 만을 동시에 만족하는 비교함수를 개발하여 가정된 모우드 형상으로 사용한다. 본 논문에서 사용하는 편미분에서 위 첨자 “'”은 공간좌표에 대한 편미분을 나타내고 위 첨자 “.”은 시간에 대한 편미분을 나타낸다.

외팔 보의 시작점에서, 즉 허브 부위에서 변위와 기울기가 영이라는 조건으로부터 다음과 같은 기하학적 경계 조건을 구한다.

$$\omega(0,t) = \omega_0 = 0 \quad (1)$$

$$\omega'(0,t) = \omega'_0 = 0 \quad (2)$$

외팔 보의 끝지점에서 전단력과 굽힘 모멘트의 균형이 이루어진다는 조건으로부터 다음과 같은 자연적 경계 조건을 구한다.

$$EI\omega''_l + J_e[\ddot{\theta} + \ddot{\omega}'_l] = 0 \quad (3)$$

$$EI\omega'''_l + M_e[-\ddot{\omega}_l + \dot{\theta}^2\omega_l - \ddot{\theta}l + g\sin\theta] = 0 \quad (4)$$

식 (1)-(4)에서 탄성 운동을  $\omega(x,t) = w(x)e^{j\omega t} - \sum_{i=1}^n \varphi_i(x)\alpha_i(t)$ 의 관계를 이용하여 변수 분리한 후, 선형화시킨다. 본 논문은 외팔 보 형태의 가정된 모우드 형상을 개발하여 이용하므로 선형화된 식에서 강체 운동에 관련된 항들을 무시한다. 그 다음 아래 식과 같이 나타내지

는 일반적인 탄성빔의 굽힘 변형<sup>(14)</sup>을 이 식들에 적용한다.

$$\varphi(x) = C_1 \sin(\alpha x) + C_2 \cos(\alpha x) + C_3 \sinh(\alpha x) + C_4 \cosh(\alpha x) \quad (5)$$

그리고서 계수  $C_1, C_2, C_3, C_4$ 에 대해 정리하면 다음과 같은 행렬식 형태로 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} & \beta_{34} \\ \beta_{41} & \beta_{42} & \beta_{43} & \beta_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \beta_{31} &= -\alpha^2 EI \sin(\alpha l) - \alpha \omega^2 J_e \cos(\alpha l) \\ \beta_{32} &= -\alpha^2 EI \cos(\alpha l) + \alpha \omega^2 J_e \sin(\alpha l) \\ \beta_{33} &= \alpha^2 EI \sinh(\alpha l) - \alpha \omega^2 J_e \cosh(\alpha l) \\ \beta_{34} &= \alpha^2 EI \cosh(\alpha l) - \alpha \omega^2 J_e \sinh(\alpha l) \\ \beta_{41} &= -\alpha^3 EI \sin(\alpha l) + \omega^2 M_e \cos(\alpha l) \\ \beta_{42} &= \alpha^3 EI \cos(\alpha l) + \omega^2 M_e \sin(\alpha l) \\ \beta_{43} &= \alpha^3 EI \sinh(\alpha l) + \omega^2 M_e \cosh(\alpha l) \\ \beta_{44} &= \alpha^3 EI \cosh(\alpha l) + \omega^2 M_e \sinh(\alpha l) \end{aligned}$$

위의 식(6)이 유용(nontrivial)해를 갖기 위해서는 행렬  $(\beta_{ij})$ 의 행렬식이 영이어야 한다는 조건으로부터 비선형 대수 방정식이 유도된다. 이 비선형 대수 방정식을 풀면 식(5)의  $\alpha$  값들을 구할 수 있고 각각의  $\alpha$  값들에 상응하는 계수  $C_1, C_2, C_3, C_4$ 의 값들은 위의 식(6)을 이용하여 구할 수 있다. 본 논문에서는 Table 1과 같은 물리적·기계적 성질을 가지는 탄성 링크를 실험과 시뮬레이션에 이용한다. Table 1에서 길이가 1 m 이고 끝지점 질량이  $3.21640 \times 10^{-8}$  Kg인 경우를 식(6)에 대입하여 처음 세개의 유용해( $\alpha$ )를 구한 후 각각의 유용해에 상응하는 계수( $C_1, C_2, C_3, C_4$ )를 구하면 다음과 같다.

$\alpha$	1.77699	4.55709	7.73112
$C_1$	1.00000	1.00000	1.00000
$C_2$	-1.34844	-0.98409	-1.00059
$C_3$	-1.00000	-1.00000	-1.00000
$C_4$	1.34844	0.98409	1.00059

그리고 이 값들( $\alpha$  와  $C_1, C_2, C_3, C_4$ )을 식(5)에 대입하면 Table 1에서 길이가 1 m 이고 끝지점 질량이  $3.21640 \times 10^{-8}$  Kg인 경우의 처음 세개의 가정된 모우드 형상이 된다.

Table 1 Physical and mechanical property of the flexible one link manipulator

Property		Unit
Length	1	$L = 1.0$ m
	2	$L = 0.8$ m
	3	$L = 0.6$ m
Density	$\rho = 7.90000 \times 10^3$	$\text{Kg} \cdot \text{m}^3$
Modulus of elasticity	$E = 1.93000 \times 10^{11}$	$\text{Kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
Area moment of inertia	$I = 6.61330 \times 10^{-12}$	$\text{m}^4$
Area	$A = 0.37230 \times 10^{-4}$	$\text{m}^2$
Thickness	$t = 0.15 \times 10^{-2}$	m
Mass moment of inertia(Hub)	$J_H = 6.50810 \times 10^{-9}$	$\text{Kg} \cdot \text{m}^2$
End mass ( $M_e$ )	1	$3.21640 \times 10^{-8}$ Kg
	2	$7.30463 \times 10^{-8}$ Kg
	3	$1.03964 \times 10^{-7}$ Kg
	4	$1.34860 \times 10^{-7}$ Kg
Mass moment of inertia (End Mass. $J_e$ )	1	$2.80346 \times 10^{-9}$ $\text{Kg} \cdot \text{m}^2$
	2	$1.07275 \times 10^{-9}$ $\text{Kg} \cdot \text{m}^2$
	3	$2.03970 \times 10^{-9}$ $\text{Kg} \cdot \text{m}^2$
	4	$3.46092 \times 10^{-9}$ $\text{Kg} \cdot \text{m}^2$

### 3.2 운동에너지와 위치에너지

시스템의 운동에너지는 허브부위의 회전 운동, 탄성 링크의 선형과 회전운동 그리고 끝지점 질량의 선형과 회전 운동에 의해 발생되며 총 운동에너지는 이들을 합한 것으로 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 T = & \frac{1}{2} J_h \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \int_0^l \rho A [\dot{\omega}^2 + \dot{\theta}^2 \omega^2 + 2\dot{\theta} \dot{\omega} x + \dot{\theta}^2 x^2] dx \\
 & + \frac{1}{2} J_e [\dot{\theta}^2 + 2\dot{\theta} \dot{\omega}_l + \dot{\omega}_l^2] \\
 & + \frac{1}{2} M_e [\dot{\omega}_l^2 + \dot{\theta}^2 \omega_l^2 + 2\dot{\theta} \dot{\omega}_l l + \dot{\theta}^2 l^2] \quad (7)
 \end{aligned}$$

여기서  $J_e$ 는 끝지점 질량의 질량 관성 모멘트로 끝지점 질량의  $\bar{K}$  축에 관한 회전 운동에 의한 운동에너지를 고려하기 위해 이용된다.

시스템의 위치에너지는 탄성링크의 탄성변형과 끝지점 질량과 탄성 링크에 중력이 작용함에 의해 발생되며 시스템의 총 위치에너지는 이들을 합한 것으로 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \Pi = & \int_0^l \frac{E I}{2} (\omega'')^2 dx + \int_0^l \rho A g [\omega \sin \theta - x \cos \theta] dx \\
 & + M_e g [\omega_l \sin \theta - l \cos \theta] \quad (8)
 \end{aligned}$$

### 3.3 이산화된 운동 방정식

탄성변형  $\omega$  는 아래와 같이 가정된 모우드 형상과 일반화 좌표의 선형적인 조합으로 근사한다.

$$\omega(x, t) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) a_i(t) = a^T \varphi \quad (9)$$

여기서  $\varphi_i$  는 3.1절에서 개발된  $i$  번째 가정된 모우드이고  $a_i$  는  $\varphi_i$  에 상응하는 시간의 함수인  $i$  번째 일반화 좌표이다. 그리고  $n$  은 탄성변형을 나타내기 위해 사용된 가정된 모우드 형상 수를 나타낸다.

Lagrange 방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (10)$$

여기서  $L$  은 Lagrangian으로 운동 에너지에서 위치 에너지를 뺀 것 ( $L = T - \Pi$ ) 이다. 그리고 벡터  $q$  는 강제 운동을 나타내는 일반화 좌표 ( $\theta$ ) 와 탄성 운동을 나타내는 일반화 좌표 ( $a_1, a_2, \dots, a_n$ ) 를 합한 일반화 좌표 벡터이다.

먼저 식(7)-(8)을 식(9)를 이용해서 재정리한 다음 식(10)에 대입하여 편미분과 전미분을 각각의 일반화 좌표에 대해서 시행하면 아래와 같은  $n+1$ 개의 이산화된 비선형 미분 방정식 형태의 운동 방정식을 구하게 된다. 자세한 운동 방정식의 유도과정은 참고문헌 (22)에서 제시한다.

$$\begin{aligned}
 & J_h \ddot{\theta} \\
 & + \int_0^l \rho A [x^2 \ddot{\theta} + x \ddot{a}^T \varphi + \ddot{\theta} a^T \varphi \varphi^T a + 2\dot{\theta} \dot{a}^T \varphi \varphi^T a] dx \\
 & + J_e [\ddot{\theta} + \ddot{a}^T \varphi_l]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+M_e[l^2\ddot{\theta} + l\ddot{a}^T \varphi_l + \ddot{\theta} a^T \varphi_l^T a + 2\dot{\theta} \dot{a}^T \varphi_l \varphi_l^T a] \\
 &+ \int_0^l \rho A g [x \sin \theta + \cos \theta a^T \varphi] dx \\
 &+ M_e g [l \sin \theta + \cos \theta a^T \varphi_l] = Q
 \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
 &\int_0^l \rho A [x \ddot{\theta} \varphi + \varphi \varphi^T \ddot{a}] dx + J_e [\ddot{\theta} \varphi_l + \varphi_l \varphi_l^T \ddot{a}] \\
 &+ M_e [l \ddot{\theta} \varphi_l + \varphi_l \varphi_l^T \ddot{a}] - \int_0^l \rho A [\dot{\theta}^2 \varphi \varphi^T a] dx \\
 &- M_e [\dot{\theta}^2 \varphi_l \varphi_l^T a] + \int_0^l E I [\varphi'' \varphi'^T a] dx \\
 &+ \int_0^l \rho A g [\varphi \sin \theta] dx + M_e g [\varphi_l \sin \theta] = 0
 \end{aligned} \tag{12}$$

식(11)에서 오른쪽 변의 Q는 외부에서 가해지는, 즉 액츄에이터를 통해 탄성링크를 구동하기 위해 가해지는 입력 토크이다.

#### 4. 운동방정식의 선형화

실험에 의해 측정된 고유진동수와 본 논문에서 개발된 모델을 이용해서 계산된 고유진동수를 비교해서 모델의 정확성을 입증하고, 선형 제어이론을 이용해서 탄성링크의 위치 및 잔류진동 제어를 위한 알고리즘을 개발하려고 하면 위에서 개발된 운동방정식의 선형화가 필요하다.

선형화를 위해서는 먼저 평형 점을 구해야 한다. 평형 상태에서 속도와 가속도는 영이 되므로 운동방정식인 식(11)과 식(12)에서 시간의 도함수 부분을 제거하면 연립 비선형 대수방정식이 되고 이 연립 대수방정식을 만족하는 일반화 좌표들이 시스템의 평형 상태를 나타낸다. 이 대수방정식들은 비선형성이 심하므로 컴퓨터를 이용하여 해를 구한다. 이와 같은 과정을 통해 구한 임의의 평형 상태를 나타내는 일반화 좌표를  $(\theta^*, a_1^*, a_2^*, \dots, a_n^*)$  이라 하고 이들에 관해 위의 운동방정식을 선형화하면 다음과 같은 행렬식 형태로 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & \dots & M_{1n} \\ M_{21} & \cdot & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & M_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \ddot{\theta} \\ \Delta \ddot{a}_1 \\ \vdots \\ \Delta \ddot{a}_n \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & \cdot & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \theta \\ \Delta a_1 \\ \vdots \\ \Delta a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{13}$$

식(13)의 질량행렬과 강성행렬 요소들은 참고문헌 (22)에서 주어진다.

#### 5. 실험적 모델의 입증

위에서 개발된 모델의 정확도를 입증하기 위하여 식(13)을 이용해서 구한 시스템의 고유진동수 값과 실험에 의해 측정된 고유진동수 값을 비교하였다. 탄성 링크로는 두께가 아주 얇은 스테인레스 강이 사용되고 이의 물리적 기계적 성질은 Table 1에서 주어진다. 링크가 수직으로 놓인 경우에 대해서 세계의 다른 길이의 링크와 네개의 다른 끝지점 질량을 이용해서 구한 고유진동수 값을 비교하였다. 가속도계에 비해 스트레인 게이지는 무게가 아주 작으므로 점 질량(point mass)의 효과를 극소화 할 수 있을 뿐만 아니라 잘못된 가정에 의해 발생될 우려가 있는 비틀림 모우드가 휨 모우드에 미치는 영향을 최소화 할 수 있으므로 시스템의 주파수 반응을 측정하기 위해 스트레인 게이지를 이용한다.

Table 2-4는 각각 0.6, 0.8, 1.0m의 길이를 가지는 링크 끝에 네개의 다른 끝지점 질량을 부착한 경우 처음 네개의 고유진동수를 비교한다. 우리가 예상하는 바와 같이 링크의 길이가 길어질수록 오차가 커지는 것을 알 수 있다. 두 번째, 세 번째, 네 번째 고유진동수는 몇 경우를 제외하고는 4% 이내의 오차를 가지는 상당히 좋은 결과를 보여 주고 있다. 그러나 시스템의 운동에 가장 크게 영향을 미치는 첫 번째 고유진동수는 오차가 아주 크다는 것을 발견하였다. 특히 두 번째, 세 번째, 네 번째 고유진동수는 끝지점 질량의 무게에 의해 오차가 크게 변함이 없으나 첫 번째 고유진동수는 끝지점 질량이 커짐에 따라 오차가 커지는 것을 알 수 있다. 이같은 사실은 Fig.2에서 보여 주는 바와 같은 링크가 휨으로 인한 길이가 줄어드는 효과를 고려하지 않음으로 인해 기인되는 것으로 생각된다. Fig. 2에서 보는바와 같이 p점의  $\bar{J}$  축 방향 위치가 실제로는  $-(x-h)$  이나 이를  $x$ 로 고려해서 시스템을 모델링한 결과로 생각된다. 여기서  $h$ 는 탄성 변형에 의해 줄어드는 길이로 다음과 같다.

$$h = x(1 - \cos\theta_s) \tag{14}$$

$\cos\theta_s$ 를 Taylor 다항식으로 전개해서 처음 두항만을 취해서  $h$ 를 근사하면 아래와 같다.

$$h \approx x(1 - 1 + \frac{\theta_s^2}{2}) = \frac{x\theta_s^2}{2} \tag{15}$$

또한  $\tan\theta_s \approx \omega/x$ 로 나타낼 수 있고, 여기서  $\theta_s$ 와  $\omega$ 가 작다면  $\theta_s \approx \omega/x$ 로 나타낼 수 있다. 이 관계를 식 (15)에 대입하면  $h \approx \omega^2/2x$ 이다. 탄성 힘에 의해 줄어드는 효과를 고려하기 위해서는  $x$ 대신 ( $x-h$ )를 사용하면 된다. Table 2-4에서 보는 바와 같이 두 번째 세 번째 네

Table 2 Comparison of measured and computed natural frequencies(without shortening effect) (L=0.6m)

L = 0.6m

	End mass	Measured	Computed	rel. err. (%)
1st nat. freq.	1	2.88	2.78	3.47
	2	2.30	2.22	3.48
	3	2.08	1.96	5.77
	4	1.91	1.78	6.81
2nd nat. freq.	1	19.08	19.26	-0.94
	2	17.25	17.93	-3.94
	3	16.75	17.45	-4.18
	4	16.25	17.11	-5.29
3rd nat. freq.	1	56.25	56.46	-0.37
	2	52.50	54.12	-3.09
	3	51.75	52.99	-2.40
	4	50.75	51.81	-2.09
4th nat. freq.	1	112.50	113.56	-0.94
	2	103.75	109.24	-5.29
	3	101.25	105.90	-4.59
	4	98.25	101.42	-3.23

Table 3 Comparison of measured and computed natural frequencies(without shortening effect) (L=0.8m)

L = 0.8m

	End mass	Measured	Computed	rel. err. (%)
1st nat. freq.	1	1.75	1.60	8.57
	2	1.48	1.32	10.81
	3	1.35	1.19	11.85
	4	1.25	1.08	13.60
2nd nat. freq.	1	10.88	10.76	1.10
	2	9.85	10.00	-1.52
	3	9.55	9.72	-1.78
	4	9.38	9.53	-1.60
3rd nat. freq.	1	32.10	31.20	2.80
	2	30.25	29.93	1.06
	3	29.83	29.44	1.30
	4	29.48	29.04	1.49
4th nat. freq.	1	64.00	62.53	2.30
	2	60.75	60.67	0.13
	3	60.05	59.69	0.60
	4	59.20	58.60	1.01

Table 4 Comparison of measured and computed natural frequencies(without shortening effect) (L=1.0m)

L = 1.0m

	End mass	Measured	Computed	rel. err. (%)
1st nat. freq.	1	1.23	1.05	14.63
	2	1.08	0.88	18.52
	3	1.00	0.80	20.00
	4	0.94	0.74	21.28
2nd nat. freq.	1	7.00	6.89	1.57
	2	6.48	6.40	1.23
	3	6.28	6.21	1.08
	4	6.16	6.08	1.22
3rd nat. freq.	1	20.50	19.82	3.33
	2	19.44	18.99	2.30
	3	19.19	18.69	2.61
	4	19.00	18.47	2.80
4th nat. freq.	1	40.75	39.57	2.89
	2	39.10	38.44	1.69
	3	38.75	37.96	2.03
	4	38.38	37.53	2.21

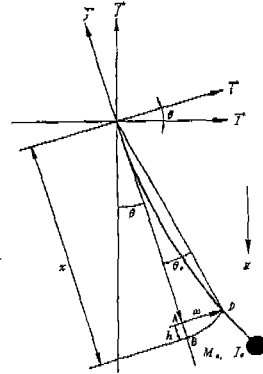


Fig. 2 A schematic diagram showing shortening effect

번째 고유진동수는 첫 번째 고유진동수에 비해 아주 좋은 결과를 보이므로 위의 줄어듦 효과는 첫 번째 모드 수 정에만 이용한다.

Table 5는 위의 탄성변형에 의한 줄어듦 효과를 고려해서 계산된 고유진동수와 실험에 의해 측정된 고유진동수의 비교를 보여준다. 이 표는 가장 오차가 컸던 길이 1m 링크의 첫 번째 고유진동수 오차를 4%이내로 조정할 수 있음을 보여준다.

### 6. 적절한 모드 수의 선정

본 논문에서 개발되는 모델은 궁극적으로는 시스템의 위치 및 잔류진동의 실시간 제어에 사용될 것이므로 모델의 크기와 모델의 정확성 사이에 적절한 조절이 필요하

Table 5 Comparison of measured and computed natural frequencies(with shortening effect) (L=1.0m)

L = 1.0m

	End mass	Measured	Computed	rel. err. (%)
1st nat. freq.	1	1.23	1.19	3.25
	2	1.08	1.04	3.70
	3	1.00	0.96	4.00
	4	0.94	0.90	4.23
2nd nat. freq.	1	7.00	6.89	1.57
	2	6.48	6.40	1.23
	3	6.28	6.21	1.11
3rd nat. freq.	1	20.50	19.82	3.32
	2	19.44	18.99	2.31
	3	19.19	18.69	2.61
	4	19.00	18.47	2.79
4th nat. freq.	1	40.75	39.57	2.90
	2	39.10	38.44	1.69
	3	38.75	37.96	2.04
	4	38.38	37.53	2.21

다. 모델의 크기가 커질수록 모델의 정확성이 증가하나, 계산량이 증가됨으로 인해 실시간 제어가 어려워지고, 모델의 크기가 너무 작으면 시스템의 상태를 적절하게 예측치 못 함으로 인해 실시간 제어시 시스템의 안정성 자체도 보장하기 어려워지는 경우가 생길 수 있기 때문이다. 따라서 될 수 있으면 모델의 정확성을 크게 손상시키지 않는 범위에서 작은 크기의 모델을 결정하여 위치 및 잔류진동 제어에 이용하는 것이 필요하다.

탄성링크가 일정각도로 진자운동을 하는 모의실험을 통해 적절한 모델 크기를 정한다. 모의실험에는  $3.22 \times 10^2 \text{ kg}$ 의 끝지점 질량을 가지는 길이 1m의 탄성 매니퓰레이터를 이용하였다. 탄성 변형을 나타내기 위한 모우드 수를 늘리면서(즉 모델의 크기를 늘리면서) 주요한 시스템의 반응을 비교하여 가능한 한 정확성을 유지하는 작은 크기의 모델을 정한다. 위의 5절에서 제안한 탄성에 의한 줄어듦 효과가 고려된 선형화된 운동 방정식을 이용해서 모의 실험을 수행한다. Fig.3은 강제운동 모우드를 비교하고, Fig. 4-5는 탄성 링크 끝지점의 X와 Y좌표를 비교한 것이다. Fig. 3-5에서 보는 바와 같이 2개 이상의 가정된 모우드를 이용한 경우의 반응은 비슷하므로 모델의 크기를 증가시켜서 계산량을 증가시킨 만큼의 정확성 향상 효과를 기대하기가 힘들다. 한 개의 가정된 모우드만을 이용한 경우는 2개 이상의 가정된 모우드를 이용한 경우들과 상당한 차이가 있어서 시스템의 상태를 적절히 예측하기가 힘들다는 것을 알 수 있다. 따라서 두개의 가정된 모우드를 이용하는 경우가 모델의 크기와 정확도 측면에서 적절함을 알 수 있다.

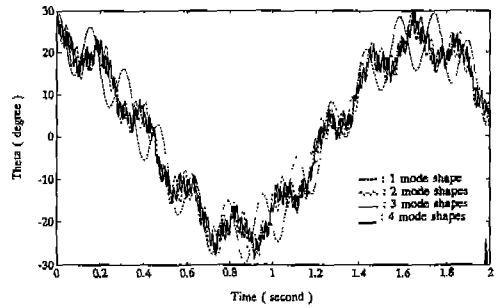


Fig. 3 Time response of rigid mode

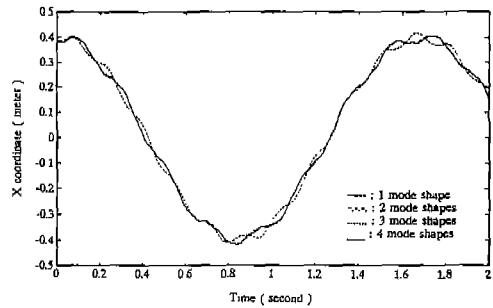


Fig. 4 Time response of X coordinate of the end point

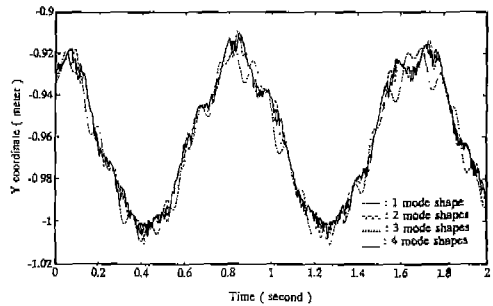


Fig. 5 Time response of Y coordinate of the end point

### 7. PID 제어 알고리즘의 개발

본 절에서는 탄성링크의 위치제어와 이때 생기는 잔류진동을 제어하기 위한 제어 알고리즘을 개발한다. 제어 알고리즘은 제어기 구조가 간단하여 실시간 제어 실현이 용이한 PID 제어기법을 이용하여 개발한다. PID 제어의 기본적인 식은 다음과 같다.

$$u(t) = K_p e_p(t) + K_i \int_0^t e_i(t) dt + K_d \frac{de_d(t)}{dt} \quad (16)$$

여기서  $K_p, K_i, K_d$ 는 각각 비례, 적분, 미분제어이득을 나타낸다. 본 논문에서는 좀 더 좋은 응답 특성을 가지며 시스템을 좀더 효율적으로 제어하기 위하여 식(16)에서 비례, 적분, 미분제어 입력 계산시 오차 항들을 다음과 같이 변형하여 이용한다.

$$e_p(t) = by_{ref} - y(t) \quad (17)$$

$$e_i(t) = y_{ref} - y(t) \quad (18)$$

$$e_d(t) = -y(t) \quad (19)$$

식(17)에서 상수  $b$ 는 0~1 사이의 값으로 시스템의 상승시간(rise time)과 오버슈트(overshoot)를 조정하는데 사용된다.

Fig. 6은 위의 오차 항들을 고려한 본 논문에 이용되는 PID제어를 나타내는 블록선도이다.

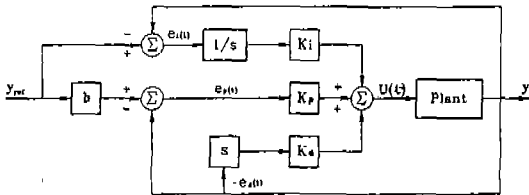


Fig. 6 Block diagram for modified PID control

모의실험을 위한 프로그래밍시 비례제어 입력은 아래의 식을 이용하여 계산된다.

$$P(t_i) = K_p[by_{ref}(t_i) - y(t_i)] \quad (20)$$

적분제어 입력은 아래의 식을 이용하여 계산된다.

$$I(t_{i+1}) = I(t_i) + K_i h e_i(t_i) \quad (21)$$

여기서  $h$ 는 샘플링 간격을 나타낸다. 그리고 미분제어 입력은 아래와 같이 Tustin 근사법을 이용하여 계산된다<sup>(23)</sup>.

$$D(t_i) = \frac{2T_d - hN}{2T_d + hN} D(t_{i-1}) - \frac{2K_p N T_d}{2T_d + hN} [y(t_i) - y(t_{i-1})] \quad (22)$$

여기서  $T_d = K_p / K_a$ 이고,  $N$ 은 임의의 조절 가능한 상수이다.

비례 적분 미분이득값들을 구하기 위하여 먼저 탄성링크

크 매니플레이터를 강체링크 매니플레이터라 가정한다. 강체링크 매니플레이터의 운동 방정식은 탄성링크 매니플레이터의 운동방정식에서 탄성 항들을 제거하면 쉽게 얻을 수 있다. 이 운동방정식을 이용하여 아래와 같은 전달함수를 구할 수 있다.

$$T_d = K_p / K_a$$

$$G_p(s) = \frac{\Delta\theta(s)}{\Delta Q(s)} = \frac{1}{(\xi_1 s^2 + \xi_2)} \quad (23)$$

여기서  $\xi_1$ 과  $\xi_2$ 는 상수 값으로 다음과 같다.

$$\xi_1 = J_h + \frac{1}{3} \rho A l^3 + M_e l^2$$

$$\xi_2 = \frac{1}{2} \rho A g l^2 \cos \theta_* + M_e g l \cos \theta_*$$

식(23)의 강체링크 매니플레이터의 전달함수가 아래와 같이 지정된 위치에 폐회로 전달함수 극점을 가지게끔 비례 적분 미분이득값들을 정한다.

$$p_1 = -\zeta \omega_0 + i \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2} = -\sigma + i \omega \quad (24)$$

$$p_2 = -\zeta \omega_0 - i \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2} = -\sigma - i \omega \quad (25)$$

$$p_3 = -\omega_0 \quad (26)$$

위에서와 같이 강체링크 매니플레이터가 지정된 위치에 지배 극점을 가지게끔 제어이득 값을 구한다. 이 제어이득 값을 기초로 해서 식 (13)의 탄성링크 매니플레이터 모델을 이용한 모의실험을 실시한다. 이와 같은 모의실험을 반복시행해서 본 논문에 이용한 시스템이 적절한 오버슈트와 상승시간 및 정착시간(settling time)을 가지게끔 제어이득 값을 아래와 같이 수정하여 탄성링크를 가지는 매니플레이터의 위치제어 모의실험에 이용한다.

$$K_p = 0.9960 [Nm / rad],$$

$$K_i = 2.0462 [Nm / rad \cdot s],$$

$$K_d = 0.7207 [Nms / rad],$$

$$b = 0.3000,$$

$$N = 5000,$$

$$h = 0.0010 [s]$$

줄어들 효과를 포함하고 2개의 가정된 모우드를 사용해서 탄성링크의 변형을 고려한 선형 운동방정식인 식(13)



을 이용해서 위치제어 모의실험을 실시한다. 이를 위하여 식(13)을 아래와 같은 선형화된 1차 미분방정식 형태의 상태방정식으로 변환해서 사용한다.

$$\dot{x} = Ax + bu \quad (27)$$

여기서  $A = F^{-1}G, F = \begin{bmatrix} I & O \\ O & M \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} O & I \\ -K & O \end{bmatrix}$

그리고  $b$ 는  $F^{-1}$ 행렬의 네 번째 열 벡터이고  $u$ 는 제어입력으로 식(20)-(22)의 값을 합한 것이다. 탄성링크의 제어

시 최종위치에서 링크의 잔류진동을 제어하는 것이 중요한 문제이므로 식(27)은 최종위치에 대해 선형화된다. 조인트가 0°인 수직위치에서 45°위치로 회전운동을 하는 경우에 대해 앞에서 개발한 제어 알고리즘을 적용하여 모의실험을 해봄으로써 본 논문에서 개발한 PID 제어 알고리즘의 효율성을 보이고자 한다.

Fig. 7-9는 Table 1에서  $3.22 \times 10^{-3} \text{kg}$ 의 끝지점 질량을 가지는 길이 1m인 단일 탄성링크로 구성된 매니플레이터 시스템을 위의 제어이득값을 이용하여 모의 실험한 결과를 보여준다. Fig. 7은 강체운동 모우드( $\theta$ )의 시간응답을 보여준다. 이 그림은 강체모우드는 대략 2% 정도의 작은 오버슈트를 가지고 대략 2.5초 정도에 정상상태에 도달하는 것을 알 수 있다. Fig. 8-9는 탄성링크 끝지점의 X 와 Y 좌표값의 시간반응을 보여준다. 이들은 초기에 약간 반대 방향으로 움직인 다음 목표지점으로 부드럽게 움직이며, 대략 위의 강체모우드와 같은 정도의 정착 시간을 갖는 것을 알 수 있다.

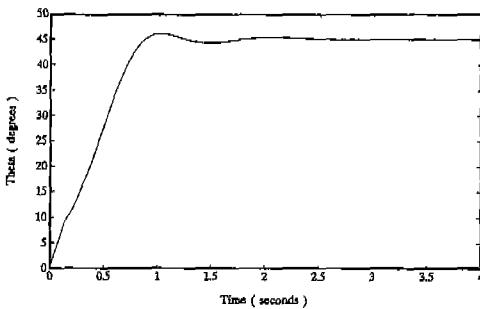


Fig. 7 Time history of rigid mode

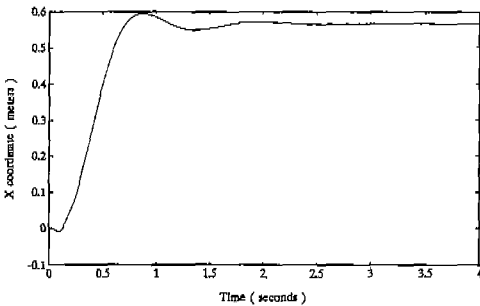


Fig. 8 Time history of X coordinate of the end point

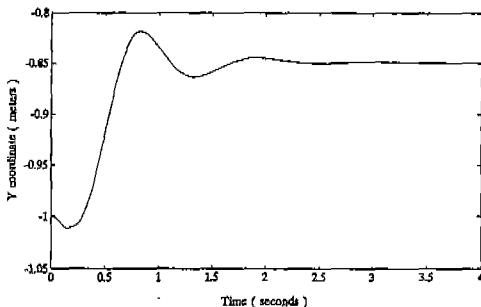


Fig. 9 Time history of Y coordinate of the end point

## 8. 결 론

본 논문에서는 수직면상에서 회전운동을 하는 단일 탄성링크를 가지는 매니플레이터 시스템의 모델을 개발하였다. 그리고 탄성링크의 위치 및 잔류진동을 제어하기 위한 제어 알고리즘을 개발하였다. 가정된 모우드 법을 이용하여 탄성 변형을 나타내었고, 외팔 보의 끝지점에 유효하중을 가지는 경우의 기하학적 경계조건과 자연 경계조건을 동시에 만족하는 비교함수를 가정된 모우드 형상으로 사용하였다. Lagrange 방정식을 이용하여 이산화된 운동 방정식을 유도하였다. 본 논문은 탄성 휨에 의한 줄어듦 효과의 중요성을 보여 주었다. 탄성 휨에 의한 줄어듦 효과를 고려해서 첫 번째 모우드를 보상시킨 모델은 처음 네개의 고유진동수를 4%이내의 상대오차를 가지고 예측하는 실험결과와 아주 좋은 상호 관계를 보여 주었다. 본 논문은 모델의 크기를 변화시키면서 시스템을 일정각도로 진자운동을 하는 모의실험을 통해 시스템의 시간반응을 비교하여 2개의 가정된 모우드를 이용하는 것이 모델의 크기와 정확성 측면에서 적절하다는 것을 제시하였고 탄성링크 위치제어 모의실험에 이용하였다. PID제어기법을 이용한 제어알고리즘을 개발하였다. 제어 이득값들은 강체링크를 가지는 모델과 지배극점배치법에 이용하여 구한 값을 기초로 하여 탄성링크가 적절한 상승 시간과 오버슈트 및 정착시간을 가지게끔 선정하였다. 탄

성링크를 수직위치로부터 45도 회전시키는 모의실험을 통해 본 논문에서 개발된 제어알고리즘이 탄성링크의 위치 및 잔류진동 제어에 효율적으로 이용될 수 있음을 보여 주었다.

### 참 고 문 헌

1. Usoro, P.B., Nadira, R. and Nahil, S.S., "A finite element/Lagrange approach to modeling lightweight flexible manipulators," *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* . Vol.198, pp. 198-205, 1986.
2. Sunada, W.H. and Dubowsky, S., "On the dynamic analysis and behavior of industrial robotic manipulators with elastic members," *Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, Vol.105, pp. 42-51, 1983.
3. Levinson, D.A. and Kane, T.R., "Simulation of large motions of nonuniform beams in orbit: Part I -The cantilever beam," *The Journal of the Astronautical Sciences*, Vol.29 No.3, pp. 213-244, 1981.
4. Menq, C. and Chen, J., "Dynamic modeling and payload-adaptive control of a flexible manipulators," *Proceedings 1988 IEEE International Conference on Robotic and Automation*, No.1 , pp. 488-493, 1988.
5. Bayo, E. and Moulin, M., "An efficient computation of the inverse dynamics of flexible manipulators in the time domain," *Proceedings 1989 IEEE International Conference on Robots and Automation*, No.2 , pp. 710-715, 1989.
6. Christensen, E.R. and Lee, S.W., "Nonlinear finite element modeling of the dynamics of unconstrained flexible structures," *Computer & Structures*, Vol.23 No.6 pp. 819-829, 1986.
7. Johanni R., "On the automatic generation of the equations of motion for robots with elastically deformable arms," In *theory of Robotics*, pp. 143-147. Edited by D. Kopacek, I. Troch and K. Desoyer. IFAC Proceedings Series, No.3, Oxford, 1988.
8. Cannon Jr., R.H. and Schmitz, E., "Initial Experimental on the end-point control of a flexible one-link robot," *The International Journal of Robotics Research*, Vol.3 No.3 , pp. 62-75, 1984.
9. Book, W.J., Maizza-Neto, O. and Whitney, D.E., (December 1975) "Feedback control of two beam, two joint systems with distributed flexibility," *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol.97 , pp. 424-431, 1975.
10. Yigit, A., Scott, R.A. and Ulsoy, A.G., "Flexural motion of a radially rotating beam attached to a rigid body," *Journal of Sound and Vibration*, Vol.121 No.2 , pp. 201-210, 1988.
11. Yang, G. and Donath, M., "Dynamic model of a one-link robot manipulator with both structural and joint flexibility," *Proceedings 1988 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, No.1 , pp. 476-481, 1988.
12. Biswas, S.K. and Klafater, R.D., "Dynamic modeling and optimal control of flexible robotic manipulator," *Proceedings 1988 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, No.1, pp. 15-20, 1988.
13. Nathan, P.L. and Singh, S.N., "Variable structure control of a robotic arm with flexible links," *Proceedings 1988 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, No.1, pp.882-887, 1988.
14. Meirovitch, L., "Analytical methods in Vibrations," The Macmillan Company, New York, 1967.
15. 오재윤, "중력장에서 두개의 탄성링크를 가지는 매니퓰레이터의 최적제어," *韓國精密工學會誌*, 第11卷, 第3號, pp.122-130, 1994.
16. Weaver Jr., W., Timoshenko, S.P. and Young, D.H., "Vibration problems in engineering." John Wiley and Sons, New York, 1990.

17. Schmitz, E., "Dynamic and Control of a Planar Manipulator with Elastic Links," Proceedings of 25th Conference on Decision and Control, pp.1135-1139, 1989.
18. Oakely, C.M. and Cannon Jr., R.H., "End-Point Control of a Two-Link Manipulator with a Very Flexible Forearm: Issues and Experiments," Proceedings of the American Control Conference, pp.1381-1388, 1989.
19. Feliu, V., Ratten, K.S. and Brown Jr., H.S., "Adaptive Control of a Single-Link Flexible Manipulator in the Presence of Joint Friction and Load Changes," Proceedings 1988 IEEE International Conference on Robotics and Automation, No.3, pp.1036-1041, 1988.
20. Rovner, D.M., and Cannon Jr., R.H., "Experiments Toward On-Line Identification and Control of a Very Flexible One-Link Manipulator," The International Journal of Robotics Research, Vol.6 No 4, pp.3-19, 1987.
21. Carusone, J., Buchan, K.S. and D'Eleuterio, G.M.T., "End-Effector Tracking Control for Structurally Flexible Manipulators," Proceedings of the American Control Conference, pp.1389-1396, 1989.
22. 김종대, "유연한 단일 링크 로봇트의 모델링과 제어", 석사학위 논문, 전북대학교 대학원, 1995,2
23. Armtrom, K.J. and Hagglund, T., "Automatic Tuning of PID Controllers," Instrument Society of America, 1988.