

# 확률적모형을 이용한 피로균열성장의 손상과정에 관한 연구

이원석\*, 조규승\*, 이현우\*\*

## A Study on the Damage Process of Fatigue Crack Growth Using the Stochastic Model

Won Suk Lee\*, Kyu Seoung Cho\* and Hyun Woo Lee\*\*

### ABSTRACT

In general, the scatter is observed in fatigue test data due to the nonhomogeneity of a material. Consequently, it is necessary to use the statistical method to describe the fatigue crack growth process precisely.

Bogdanoff and Kozin suggested and developed the B-model which is the probabilistic models of cumulative damage using the Markov process in order to describe the damage process. But the B-model uses only constant probability ratio( $r$ ), so it is not consistent with the actual damage process.

In this study, the  $r$ -decreasing model using a monotonic decreasing function is introduced to improve the B-model. To verify the model, test data of fatigue crack growth of Al2024-T351 and Al7075-T651 are used.

Compared with the empirical distribution of test data, the distribution from the  $r$ -decreasing model is satisfactory and damage process is well described from the probabilistic and physical viewpoint.

**Key Words :** Stochastic Model(확률적 모델), Cumulative Distribution Function(누적분포함수), Damage Process(손상과정), Fatigue Crack Growth(피로균열성장), Probability Mass Function(확률질량함수), Characteristic Function(특성함수), Probability Generating Function(확률생성함수)

### 1. 서론

구조물의 피로손상에 있어서 중요한 메커니즘중에 하나는 미소균열의 성장으로 인한 전파이다. 균열성장거동을 연구함으로써 구조물의 피로수명 평가 및 예측에 필요한 정보를 얻을 수 있다. 피로하중을 받는 구조물의 손상과정 및 수명은 큰 변동성(variability)을 수반한다. 왜냐하

면 실제의 재료는 미시적 관점에서 균질하지 않기 때문에 동일한 하중조건이라 하더라도 주어진 균열길이에 도달하는데 걸리는 시간에 있어서 분산(scatter)이 존재하며, 이러한 경향은 균열길이가 커질수록 크게 증가한다.

피로 파손의 수명해석에서 많은 확률모형이 발전되어 왔으며, 크게 결정론적 모델과 확률모델로 나눌 수 있다. 결정론적 모델은 실험치의 평균만을 고려하여 평균누적

\* 부산대학교 대학원 정밀기계공학과  
\*\* 정회원, 부산대학교 기계기술연구소

손상에 관한 정보를 제공한다. 이에 반하여 확률모델은 평균뿐만이 아니라 요동(fluctuation)도 고려하므로 실제의 거동을 보다 정확히 기술할 수 있다. 따라서 실험치의 분산이 클 경우는 이를 반영한 확률모델을 이용하여야 한다. 균열성장은 균열의 길이가 커질수록 분산이 커지며 이는 또한 재료의 피로에 대한 저항에 따라 그 정도는 현저한 차이가 난다. 그러므로 구조물의 안정성 및 신뢰성을 높이기 위해서는 이러한 변동성을 고려한 확률모델의 도입은 필수적이다.

Bogdanoff-Kozin<sup>(11)-(8)</sup>은 Markov과정을 이용하여 손상과정에 대한 새로운 확률모델(B모델이라 부른다)을 제안하였다. B모델은 구조물이 파손될 때까지 걸리는 시간에 관한 통계치(평균, 분산 등)를 이용하여 손상을 나타내는 변수(단면적, 변위, 응력, 균열길이 등)에 손상상태를 대응시키고, 손상이 현상상태에서 다음상태로 증가할 수 있는 최소한의 하중반복수를 Duty Cycle(D.C.)이라 정의하여 D.C.가 가해지는 동안 다른 손상상태로 증가될 확률  $q$  를 구하고, 이를 이용하여 손상과정을 기술한다. 확률  $q$  를 이용하여 단위손상에 걸리는 시간의 크기에 대한 정보를 얻을 수 있으며,  $q$ 의 값이 클수록 시간은 작아진다.

B모델은 고사이클(S-N), 저사이클, 균열성장, 마모 등에 적용되었으며, 실험적 분포(empirical distribution)와 잘 일치하였다. B모델은 일반적으로 수명해석에서 많이 쓰이는 Weibull분포와 유사한 누적분포특성이 있음을 보여 주었다. 최근<sup>(12)</sup>에는 2단블럭하중을 받는 이방성 재료에도 적용되고 있으며 실험결과와 잘 일치하여 B모델의 적용범위가 상당히 넓음을 알 수 있다.

그러나 지금까지 일정인폭 하중하의 균열성장에 적용된 B모델은 확률  $q$ 의 값이 일정한 경우이므로 실제의 손상과정에 대한 확률정보를 제공한다고 보기는 어렵다. 균열길이 커질수록 일정한 균열증분에 걸리는 시간은 짧아진다. 이것은 균열성장에 대한 확률  $q$ 의 값이 증가함을 의미한다. 본 연구에서는 이러한 것을 고려하여  $q$ 가 증가하는 모델을 제시하였다.

## 2. 이론적 배경

주어진 계의 동적 거동특성이 확률법칙에 의해서 지배되는 수학적 모델을 확률과정<sup>(13)</sup>(stochastic process)이라 한다. 즉 확률과정은 확률법칙을 따르며 시간에 따라 변동하는 시계열(Time Series)을 따르는 이론적 모형이다. 시간을 나타내는 매개변수를  $t$ , 확률 parameter를

$w$ 라 할 때, 확률과정을  $X(t, w)$ 라 표시한다. 특히 시간  $t$ 를 고정하면  $X(t, w)$ 는 하나의 확률변수가 되고 따라서 주어진 확률분포를 따르게 된다. 그러므로 확률과정(SP)은 무한개의 확률변수(r.v.)들의 수열로 생각할 수 있다.

한편 확률 parameter  $w$ 를 고정하면  $X(t)$ 는 시간  $t$ 에 따라서 변동하는 하나의 함수  $x(t)$ 가 얻어진다. 이것의 그래프는 확률과정(SP)  $X(t, w)$ 의 한 실현치들로 된 곡선을 나타내며, 이것을 표본과정(sample path)이라고 한다. 확률과정(SP)  $X(t)$ 의 가능한 모든 실현치들의 집합  $S$ 를 상태공간(state space)이라 하고,  $S$ 의 원소  $s$ 를 상태(state)라 한다.

### 2.1 불연속 Markov Process (Discrete Markov Process)

#### 2.2.1 정의 및 기본성질

시간  $t_1$ 에 있어서  $S(t_1)$ 의 실현치가 주어져 있을 때,  $t_1$ 보다 이후인 시점  $t_2 (> t_1)$ 에 있어서  $S(t_2)$ 의 확률법칙이  $t_1$ 이전의 시점  $u (< t_1)$ 의 실현치  $S(u)$ 에 무관한 확률과정(SP)  $S(t)$ 를 Markov과정이라 하며, 수학적으로 표현하면 시점  $t_1 < t_2 < \dots < t_n < t$ 에 대하여 다음 식(1)를 만족한다.

$$P\{S(t) = s | S(t_1) = s_1, S(t_2) = s_2, \dots, S(t_n) = s_n\} = P\{S(t) = s | S(t_n) = s_n\} \quad (1)$$

시간  $t$ 가 이산형일 때를 불연속 Markov 과정이라 한다. 본 논문에서는 피로균열성장에서의 누적손상거동을 다루므로  $S(t)$ 는 손상상태(damage state)를 나타내며, 파손상태(failure state)는  $b$ 로 표시한다. 즉 다음과 같은 매개변수공간  $T$ 와 상태공간  $S$ 를 갖는 불연속 과정을 이용한다.

$$T \in \{0, 1, 2, 3, \dots, \infty\}, S \in \{1, 2, 3, \dots, b-1, b\}$$

$$S \in \{1, 2, 3, \dots, b-1, b\}$$

Markov과정을 기술하기 위해서는 각 상태에서 다른 상태로 이동할 확률을 알아야 하며 이는  $m$ 보 추이확률( $m$ -step transition probability)  $P_{ij}(m)$ 에 의해서 쉽게 기술된다.  $P_{ij}(m)$ 의 정의는 다음과 같다.

$$P_{ij}(m) = P\{S(n+m) = j | S(n) = i\} \quad n, m \in T, i, j \in S \quad (2)$$

특히  $m=1$ 일때  $P_{ij}(1)$ 를 추이확률이라 하며  $P_{ij}$ 로 나타내기도 한다.  $P_{ij}(m)$ 를 원으로 하는  $b \times b$ 의 정방행렬을  $P(m)$ 으로 나타내며  $m$ 보 추이확률행렬 ( $m$ -step transition stochastic matrix)이라 하며,  $m=1$ 일때 간단히 추이확률행렬  $P$  (transition stochastic matrix)라 한다. 추이확률  $P_{ij}(m)$ 은 일반적으로 시점  $n$ 에 따라서 변한다. 시간에 따라 변하는 경우를 정상추이확률(stationary transition probability)이라 하며 그렇지 않은 경우를 비정상추이확률(nonstationary transition probability)이라 한다.

$m$ 보 추이확률행렬  $P(m)$ 과 추이확률행렬  $P$  사이의 관계식은 Chapman-Kolmogorov 방정식(3)을 이용하여 식(4)와 같이 간단히 표현할 수 있다.

$$P_{ij}(n+m) = \sum_{k=1}^b P_{ik}(n)P_{kj}(m) = P(n) \cdot P(m) \quad n, m \in T, \quad i, j, k \in S \quad (3)$$

또는  $P(n+1) = P(n) \cdot P(1) = P(n) \cdot P$

식 (3)과 수학적 귀납법을 이용하면

$n = 1, 2, \dots$  을 대입하면

$$P(2) = P(1) \cdot P = P^2$$

$$P(3) = P(2) \cdot P = P^2 P = P^3$$

$$P(m) = P(m-1) \cdot P = P^{m-1} P = P^m \quad (4)$$

이다.

어떤 시점  $x$ 에서 손상상태  $j$ 에 있을 확률을  $p_x(j)$ 라 하고 이를 성분으로 가지는 상태확률벡터  $\vec{p}_x$  (state stochastic vector)를 다음과 같이 정의한다.

$$\vec{p}_x = \{p_x(1), p_x(2), \dots, p_x(b)\}, \quad \sum_{j=1}^b p_x(j) = 1 \quad (5)$$

그러므로 식(5)에서 보는바와 같이  $p_x(j)$ 는 확률질량 함수(p.m.f)를 가진다. 그리고  $x=0$  인 경우를 초기상태 확률벡터(initial state stochastic vector)라 부른다.

이것은 균열성장에서 초기 균열 길이의 분포를 나타낸다. 시간  $x$ 에서 손상상태를 나타내기 위해서 상태확률벡터  $\vec{p}_x$ 와 추이확률행렬과의 관계식을 구해야 한다. 이것은 다음과 같이 구한다.

$$\begin{aligned} P\{S(n) = j\} &= \sum_{i=1}^b P\{S(n) = j \wedge S(0) = i\} \quad (\text{전확률정리}) \\ &= \sum_{i=1}^b P\{S(0) = i\} P\{S(n) = j, S(0) = i\} \\ &= \sum_{i=1}^b p_0(i) \cdot P_{ij}(n) \end{aligned}$$

따라서

$$\vec{p}_n = \vec{p}_0 \cdot P(n) \quad (6)$$

이 성립한다. 식(4)를 이용하면

$$\vec{p}_n = \vec{p}_0 \cdot P^n \quad (7)$$

이다.

### 2.2.2 기하변환(geometric transform)

임의시점  $x$ 에서 주어진 계의 확률분포와 확률변수의 모멘트 그리고 극한 확률을 구하기위해서 변환을 이용한다. 즉 추이확률을 이용하여 시점  $x$ 에서의 확률변수  $S(t)$ 의 확률분포,  $m$ 보추이확률의 일반식을 구함으로써 계의 확률거동을 해석할 수 있다. 불연속시간의 경우는 기하변환을 이용하며, 연속시간인 경우는 지수변환을 이용한다. 기하변환의 기본성질을 이용함으로써 확률분포의 특성과 극한확률 그리고 분포함수에 관한 문제를 쉽게 해결할 수 있다. 이산 확률변수  $x$ 에 대하여 이산함수  $f(x)$ 의 기하변환을 다음과 같이 정의한다.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{b^x} = 0 \text{을 만족하는 } b \text{가 존재할 때}$$

$$\begin{aligned} f^g(z) &= f(0) + f(1)z + f(2)z^2 + \dots \\ &= \sum_{x=0}^{\infty} f(x)z^x \quad (8) \end{aligned}$$

는 수렴하며  $f^g(z)$ 와  $f(x)$ 은 다음관계가 성립한다.

$$f(x) = \frac{1}{x!} \frac{d^x}{dz^x} f^g(z) \Big|_{z=0} \quad (9)$$

$f^g(1) = \sum_{x=0}^{\infty} f(x) = 1$ 일 때  $f(x)$ 은 확률변수  $x$ 의 확률

질량함수가 되며, 이때  $f^g(z)$ 를 확률생성함수(probability generating function)라 부른다.

그리고 확률변수  $x$ 의 평균, 분산 그리고  $k$ 차모멘트(the  $k$ -th moment about origin)를 확률생성함수의 미분을 이용하여 구할 수 있다. 그리고 이산함수  $f(x)$ 와  $f^g(z)$ 는 일대일 대응이므로 역변환을 이용하여 임의의 시점  $x$ 에서의 확률을 쉽게 구할 수 있다.

상태확률벡터  $\vec{p}_x$ 와 추이확률행렬  $P(m)$ 의 기하변환을 각각  $X(z)$ ,  $\psi(z)$  라 하면 다음과 같이 표현된다.

$$X(z) = \sum_{x=0}^{\infty} P_x z^x, \quad \psi(z) = \sum_{x=0}^{\infty} P^x z^x \quad (10)$$

$\varphi_{ij}(z) = \sum_{x=0}^{\infty} P_{ij}^x(z) z^x$  는  $\psi(z)$ 행렬의  $(i,j)$ 원을 나타

낸다. 확률변수  $T_{ij}$ 는  $m$ 보추이확률행렬의 정의에 의해서 다음과 같이 나타낸다.

$$P\{T_{ij} = x\} = P_{ij}^x(x)$$

즉  $P_{ij}^x(x)$ 는 시간  $x=0$ 일 때  $i$ 상태에서 시간  $T_{ij}$ 때에 상태  $j$ 에 있을 확률을 나타낸다. 그리고 행렬이론에서  $\psi(z)$ 는 역행렬  $(I - Pz)^{-1}$ 와 같다.

$$\psi(z) = \sum_{x=0}^{\infty} P_x z^x = (I - Pz)^{-1} \quad (11)$$

본 연구에서는 Fig.1의 transition이 한 단계씩 진행되는 모델을 가정하였다.

Fig.1의 추이확률행렬은 다음과 같이 표현된다.

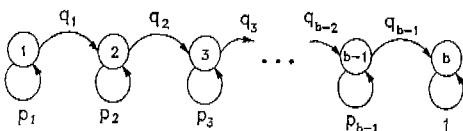


Fig.1 Model with only one-step transition

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & q_1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & p_2 & q_2 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & q_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & p_{b-1} & q_{b-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \quad p_i + q_i = 1$$

이것을 역행렬식 (11)에 대입하면 다음과 같이 된다.

$$\varphi_{1y}(z) = \frac{q_1 q_2 \cdots q_{y-1} z^{y-1}}{(1-p_1 z)(1-p_2 z) \cdots (1-p_y z)} \quad 1 < y \leq b-1$$

$$\varphi_{1b}(z) = \frac{q_1 q_2 \cdots q_{b-1} z^{b-1}}{(1-p_1 z)(1-p_2 z) \cdots (1-p_{b-1} z)(1-z)}$$

$$\varphi_{yb}(z) = \frac{q_y q_{y+1} \cdots q_{b-1} z^{b-y}}{(1-p_y z)(1-p_{y+1} z) \cdots (1-p_{b-1} z)(1-z)} \quad (12)$$

$y = 1, 2, \dots, b-1$

$$\varphi_{iy}(z) = \frac{q_j q_{j+1} \cdots q_{y-1} z^{y-j}}{(1-p_j z)(1-p_{j+1} z) \cdots (1-p_y z)}$$

$1 \leq j < y \leq b-1$

$$\varphi_{ij}(z) = \frac{1}{(1-p_j z)} \quad j = 1, 2, \dots, b-1$$

식(12)에  $z=1$ 을 대입하면 모든 경우에서  $\varphi_{ij}(1) = 1$ 이므로 확률변수  $T_{ij}$ 는 확률질량함수를 갖지 않는다. 기하변환의 최종치정리를 적용하면 상태  $i$ 에 관계없이  $\varphi_{ib}(\infty)$ 는 1이며  $j = b$  인 경우는  $\varphi_{ib}(\infty) = 0$  이다. 이것은 상태  $b$ 가 흡수상태(파손상태)이기 때문이다. 이것을 이용하여 초기상태확률벡터  $\vec{p}_0$ 에 대하여 상태확률벡터  $\vec{p}_x$ 의 극한 즉 부동벡터  $\vec{\pi}$ 를 구하면 다음과 같다.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \vec{p}_x = \vec{\pi} = \vec{p}_0 \cdot P(\infty) = \vec{p}_0 \cdot \lim_{z \rightarrow 1} (1-z)\psi(z) \quad (\text{최종치 정리})$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \infty} p_x(j) = \pi(j) = 0 & j = 1, 2, \dots, b-1 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} p_x(j) = \pi(j) = 1 & j = b \end{cases} \quad (13)$$

위의 모델에서 시간  $x=0$ 일때 일시상태  $i(i \neq b)$ 에 있다고 하면 상태  $(i+1)$ 에 도달하기 전에 재귀발생(recurrence)이 반복된다. 즉 상태  $(i+1)$ 에 도달하기 전에 전에  $i$ 에 유한한 시간 동안 머물러 있다. 이 머물러 있는 시간을  $T_i$ 라 하면  $T_i$ 는 성공할 확률이  $q_i$ 인 베르누이 시행에서 처음으로 성공하는데 걸리는 독립시행의 횟수를 나타내며, 이것은 기하분포를 따른다. 그러므로  $T_i = x$ 일 확률을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$P\{T_i = x\} = q_i p_i^{x-1} \quad (14)$$

기하분포의 특성함수(ch.f.)는 식 (15)과 같다.

$$\varphi_{T_i}(u) = E\{e^{iTx}\} = \frac{q_i e^{ju}}{(1 - p_i e^{ju})}, \quad j = \sqrt{-1} \quad (15)$$

$W_{yb}$ 를 상태  $y$ 에서 흡수상태  $b$ 에 도달하는데 걸리는 시간이라 하면, 위에서 정의한 확률변수  $T_i$ 에 의하여 다음과 같이 표현된다.

$$W_{yb} = T_y + T_{y+1} + \cdots + T_{b-1}$$

$W_{yb}$ 의 확률질량함수와 분포함수를 각각  $p_{yb}$ ,  $F_w(x; y, b)$ 라 하면

$$p_{yb}(x) = P\{W_{yb} = x\}$$

$$F_w(x; y, b) = P\{W_{yb} \leq x\}$$

이다. 확률변수  $T_y, T_{y+1}, \cdots, T_{b-1}$ 는 서로 독립이므로 특성함수의 성질에 의해서  $W_{yb}$ 의 특성함수는 다음과 같이 표현된다.

$$\varphi_w(u; j, b) = \prod_{i=y}^b \frac{q_i e^{ju}}{(1 - p_i e^{ju})}, \quad j = \sqrt{-1} \quad (16)$$

$W_{yb}$ 의 확률질량함수를 구하기 위해  $e^{ju}$ 를  $z$ 로 바꾸면 식 (17)과 같다.

$$\varphi_w(z; y, b) = \frac{q_y q_{y+1} \cdots q_{b-1} z^{b-y}}{(1 - p_y z)(1 - p_{y+1} z) \cdots (1 - p_{b-1} z)} \quad (17)$$

이것을 추이확률행렬의 기하변환식  $\varphi_{yb}(z)$ 과 비교하면 다음과 같다.

$$\varphi_{yb}(z) = \frac{\varphi_w(z; y, b)}{(1 - z)} \quad (18)$$

여기서  $\frac{1}{1-z}$ 을 급수전개하여 위의 식 (18)에 대입하면 식(19)와 같다.

$$\begin{aligned} \varphi_{yb}(z) &= p_{yb}(0) + [p_{yb}(0) + p_{yb}(1)]z + \cdots \\ &\quad + [p_{yb}(0) + \cdots + p_{yb}(k)]z^k + \cdots \\ &= \sum_0^{\infty} F_w(x; y, b) z^x \end{aligned} \quad (19)$$

즉  $\varphi_{yb}(z)$ 에서 확률변수  $W_{yb}$ 의 확률은  $W_{yb}$ 의 분포함수와 같다.

$W_{yb}$ 는 확률질량함수를 가지므로 미분을 이용하여 모멘트를 구하면 식 (20)과 같다.

$$\begin{aligned} E[W_{yb}] &= \sum_{j=y}^{b-1} (1 + r_j) \\ \text{Var}[W_{yb}] &= \sum_{j=y}^{b-1} (1 + r_j) r_j \\ \mu_3[W_{yb}] &= \sum_{j=y}^{b-1} (1 + r_j) r_j (1 + 2r_j) \\ \mu_4[W_{yb}] &= 3\text{Var}[W_{yb}]^2 + \sum_{j=y}^{b-1} (1 + r_j) \\ &\quad r_j (1 + 2r_j) (1 + 3r_j) \\ &\quad + \sum_{j=y}^{b-1} (1 + r_j) r_j^2 \quad \text{확률비 } r_j = \frac{p_j}{q_j} \end{aligned} \quad (20)$$

식(20)에서  $\mu_3, \mu_4$ 는 평균에 대한  $W_{yb}$ 의 3차모멘트와 4차모멘트를 나타낸다.

상태확률  $P_x(b)$ 와 확률변수  $W_{yb}$ 의 분포함수  $F_w(x; y, b)$ 와의 관계는 식(6)을 이용하면

$$\begin{aligned} P_x(b) &= \sum_{k=1}^b P_0(k) \times P_{kb}(x) \quad (\text{전확률정리}) \\ &= \sum_{k=1}^b P_0(k) \times P\{T_{kb} = x\} \end{aligned} \quad (21)$$

이다. 초기상태가 모두  $y$ 라 하면 식(21)은 다음과 같다.

$$P_x(b) = P\{T_{kb} = x\} = F_w\{x; y, b\} \quad (22)$$

즉 확률변수  $W_{yb}$ 의 분포함수는 상태확률  $P_x(b)$ 의 값과 같음을 알 수 있다. 따라서 균열성장에서 파손상태에 도달하는데 걸리는 시간의 분포함수는 식(22)의 결과에 의하여 식(7)을 이용하여 계산할 수 있다.

Markov과정에서 확률  $q_i$ 와 상태수  $b$ 를 표본의 통계치를 이용하여 결정하는데, 일반적으로 평균과 분산을 사용하므로 일의적으로 결정할 수 있는 parameter는 2개뿐이다. 그러므로 확률  $q_i$ 가 같다고 가정한다. 이것은 확률변수  $W_{yb}$ 가 음이항 분포를 따른다는 것을 의미한다.

### 3. 실험

#### 3.1 실험장치

실험장치는 최대용량 10ton의 폐쇄유압회로방식의 MTS(Material Testing System)을 사용하였다. 본 시스템은 데이터를 자동으로 A/D변환하여 컴퓨터에 저장하여 처리할 수 있는 소프트웨어를 제공한다. 균열길이는 COD게이지(6mm)를 이용하여 균열선단 개구변위를 측정 후 ASTM E647에 따라 COD게이지의 mounting location에 따른 compliance coefficient를 사용하여 구하였다. 이는 MTS에서 제공하는 Package에 따라 자동적으로 계산되어진다.

#### 3.2 실험조건

예비균열은 하중비  $R=0.1$ 하에서 초기최대하중  $P_{max} = 7kN$ 을 가하여 실험하였으며, 균열성장실험은 하중비  $R=0.1$ 하에서  $P_{max} = 3kN$ 을 가진하였다. 예비균열과 균열성장실험에서 정현파를 사용하였으며 주파수는 15Hz이다.

#### 3.3 시편

본 연구에서는 Al2024-T351와 Al7075-T651의 두 재료에 대하여 동일한 형상을 갖는 시편을 사용하였다. 두 재료의 물성치는 Table1과 같다. 노치는 chevron 형상이며 시편규격은 Fig.2에 나타내었다.

Table 1 Material properties of Al2024-T351 and Al7075-T651

Al2024-T351		Al7075-T651	
Young's Modulus	Yield Strength	Young's Modulus	Yield Strength
72 GPa	365.7 Mpa	71.6 Gpa	486Mpa

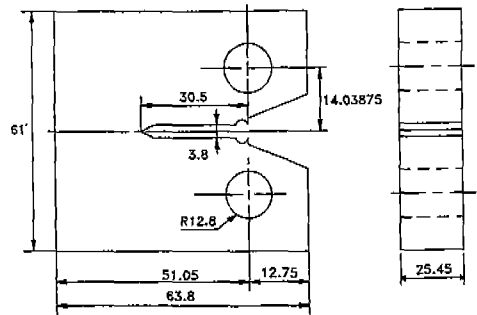


Fig. 2 CT specimen

### 4. 데이터 분석 및 결과

본 논문에서는 손상이 현상태에서 다음상태로 증가할 수 있는 최소한의 하중반복수 즉 Duty Cycle을 100cycle로 두었다.

#### 4.1 불연속 Markov과정

$\Delta a = 1mm$ 에 대해 주어진 균열길이에 도달하는 시간을 확률변수  $N$ 이라 하면  $N$ 은 Table 2와 같이 정의된다.

확률변수  $N$ 의 평균과 분산은 표본의 평균과 분산을 나타내는 식 (23)을 이용하여 계산하였으며 그 결과는 Table 3에 나타내었다.

Table 2 Random variables

균열성장 (mm)	
N1	34.3~35.3
N2	34.3~36.3
N3	34.3~37.3
N4	34.3~38.3
N5	34.3~39.3

$$\text{평균} : \hat{m} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i,$$

$$\text{분산} : \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{m})^2 \quad (23)$$

Table 3 Mean and variance of random variable

AI2024			AI7075		
균열 성장 시간			균열 성장 시간		
	평균	분산		평균	분산
N1	182.36	921.16	N1	42.89	28.32
N2	284.99	1662.55	N2	73.27	44.84
N3	348.04	1973.57	N3	96.27	65.11
N4	389.24	2123.92	N4	113.45	81.59
N5	416.21	2215.45	N5	125.81	93.21

Table 4 Probability ratio r and the number of state in Markov process

AI2024			AI7075		
균열 성장 시간			균열 성장 시간		
	r <sub>j</sub>	j		r <sub>j</sub>	j
N1	5.0787	1,...,30	N1	0.64962	1,...,26
N2-N1	6.8946	31,...,43	N2-N1	0.519	27,...,46
N3-N2	5.305	44,...,53	N3-N2	0.9167	47,...,58
N4-N3	3.577	54,...,62	N4-N3	0.9089	59,..., 67
N5-N4	3.4957	63,...,69	N5-N4	1.06	68,...,77

확률변수 N의 평균과 분산을 이용하여 Markov과정에 서 정의된 상태수와 확률비 r을 표본평균과 표본분산을 연립하여 구하면 Table 4와 같다.

#### 4.2 q가 증가하는 모델

기존의 B모델은 표본의 평균과 분산을 이용하여 손상 상태수 b와 확률비r을 결정하므로 각 손상상태의 확률비는 일정한 값을 가정하였다. 실제로는 균열이 성장함에 따라 다음 손상상태로 이동할 확률 q가 증가하며, 이는 확률비 r의 감소를 의미한다. 그러므로 기존의 B모델은 주어진 균열길이에 도달하는데 걸리는 시간에 대해 양호한 분포함수를 제공하지만 손상과정에 대해서는 만족스럽지 않다. 손상과정에 대한 확률정보를 얻기 위해서는 손상상태가 증가함에 따라 확률비 r이 감소하는 적당한 함수관계를 찾아야 한다. 본 연구에서는 이러한 단조감소하는 여러가지 함수를 적용한 결과 식(24)의 형태가 비

교적 양호한 결과를 보여주었다.

$$r_j = \alpha j^\beta, \quad j = 1, 2, \dots, b-1 \quad (24)$$

식 (24)와 확률변수 N5의 평균과 분산을 이용하여 상태수 b와 상수  $\alpha, \beta$ 를 구하여 Table 5에 나타내었다.

Table 5 The value of constant  $\alpha, \beta$  and the number of damage state for N5

AI2024-T351			AI7075-T651		
$\alpha$	$\beta$	상태수 b	$\alpha$	$\beta$	상태수 b
15.752297	-2/5	77	1.383815	-1/5	73

Table 5의 결과와 Table 3의 평균 그리고 식(20)을 이용하여 확률변수 N1~N4의 상태수를 구하면 Table 6과 같다.

Table 6을 이용하여 균열길이와 손상상태와의 관계를 Fig.3에 나타내었다.

Table 6의 값을 이용한 분포함수와 Markov 모델에서 구한 분포 및 실험적분포를 Fig.4, 5에 나타내었다.

Fig.4, 5에서 보는 바와 같이 비교적 잘 일치한다. 확률변수 N1~N4의 분포가 실험적 분포와 잘 일치한다는 것은 식(24)에서 정의한 확률비 r을 이용하여 손상과정을 나타낼 수 있다는 것을 의미한다.

Table 6 The number of damage state of random variable

	AI2024-T351	AI7075-T651
	상태수 b	상태수 b
N1	23	23
N2	45	40
N3	60	55
N4	70	65
N5	77	73

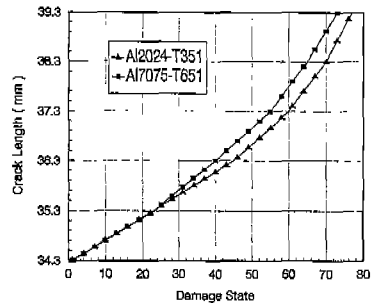


Fig. 3 Damage state vs. crack length

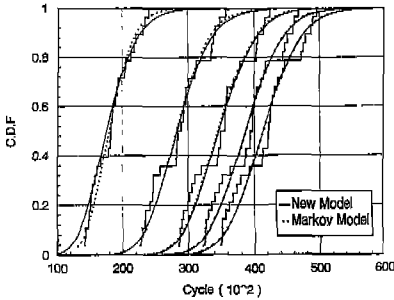


Fig. 4 Comparisons between the Markov model and the new model(Al2024-T351)

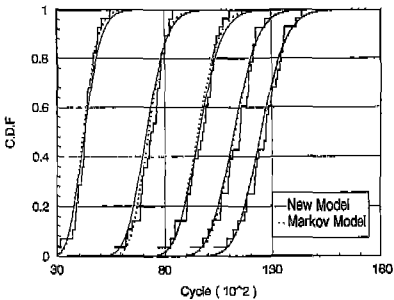


Fig. 5 Comparisons between the Markov model and the new model(Al7075-T651)

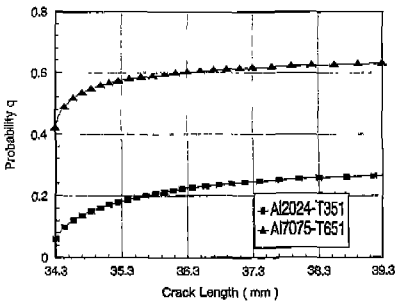


Fig. 6 Crack length vs. Probability q

각 손상상태에 따라 다음상태에 도달할 확률을 구하여 Fig.6에 나타내었다.

각 손상상태  $i$ 에 대응하는 확률  $q_i$ 의 값으로부터 피로 균열성장에서의 손상과정을 기술할 수 있으며, 상태수의 차가 크지 않을 경우 이 값을 비교함으로써 Al2024-T351과 Al7075-T651의 피로저항 정도를 비교할 수 있

다. Fig. 6에서 보는 바와 같이 Al2024-T351의  $q$ 값이 Al7075-T651의  $q$ 값보다 작으므로 Al2024-T351이 Al7075-T651보다 피로저항이 큼을 알 수 있다.

### 5.결 론

초기균열증분에 걸리는 시간의 영향은 균열길이가 커짐에 따라 감소하며, 바로 이전의 균열증분에 걸리는 시간의 영향이 다음 균열증분에 걸리는 시간에 큰 영향을 미친다. 이에따라 상태 (state)수가 증가함에 따라 확률  $q$ 가 증가하는 모델을 제시하였으며, 이는 실험적 분포와 비교적 잘 일치하였고, 확률  $q$ 를 이용하여 손상과정을 확률적 관점에서 기술할 수 있었다. 또한 실험에 사용되었던 재료(Al2024-T351, Al7075-T651)의 상태수의 차가 크지 않은 경우이므로 확률  $q$ 를 이용하여 손상과정과 피로저항을 비교할 경우 Al2024-T351이 Al7075-T651보다 피로저항이 큼을 알 수 있다.

### 참 고 문 헌

1. Bogdanoff J. L. and Kozin, F ,1985, Probabilistic models of cumulative damage.
2. Bogdanoff J. L. and Kozin, F , 1983, "On the probabilistic modeling of fatigue crack growth", Engineering Fracture Mechanics, Vol 18, NO. 3 , pp 623~632
3. Bogdanoff J. L. and Kozin, F , 1984, "Probabilistic models of fatigue crack growth - II", vol 20, No. 2, pp 255~270
4. Bogdanoff J. L. and Kozin, F , 1978, "A new cumulative damage model-Part 1", Journal of applied mechanics, Vol. 45, pp246~250.
5. Bogdanoff J. L. and Kozin, F , 1978, "A new cumulative damage model-Part 2", Journal of applied mechanics, Vol. 45, pp246~250.
6. Bogdanoff J. L. and Kozin, F ,1978, "A new cumulative damage model-Part 3", Journal of applied mechanics, Vol. 45, pp246~250.
7. Bogdanoff J. L. and Kozin, F , 1980, "A new cumulative damage model-Part 4", Journal of



- applied mechanics, Vol. 45, pp246~250.
8. Howard, R., 1970 , Dynamic Probablistic models
  9. 구자홍, 1988, 확률론 ,pp225~290
  10. E. Cinlar 1975, Introduction to stochastic process.
  11. Sheldon M. Ross, 1980. Introduction to probabilistic models.
  12. 김도식, 1995, "CFRP복합재료의 2단 블럭하중하의 피로손상누적거동에 대한 확률적 해석", 대한기계학회, pp39~44