

본 연구는 충북대학 국책 자유공모과제(과제번호 : 95F - 31)의 연구비지원으로 수행된 것임.

## 트로코이드 기어의 단조 해석

조해용\*, 민규식\*\*, 최종웅\*\*\*

## Analysis for Forging of Trochoidal Gears

Hae Yong Cho\*, Gyu Sik Min\*\* and Jongung Choi\*\*\*

### ABSTRACT

This paper describes forging of trochoidal gears, which are being widely used in timing belt pulley, pump pulley etc., as a series of development of the simulator for non-axisymmetric elements. Kinematically admissible velocity fields for forging of trochoidal gear were proposed and the loads were calculated by numerical method. When the simulation was carried out, half pitch of gear was divided into 6 deformation regions which have different velocity fields by assumptions and boundary conditions. The neutral surface was introduced into forging of trochoidal gears with flat punch and, for each step, it is assumed as a circle with its radius  $r_n$ . The experimental set-up was installed in 200 ton hydraulic press for forging. The billets, of Al 2218 aluminum alloy, were slightly phosphate-coated. It was shown that the theoretical solutions, as upper bound, are useful to predict the forging load for forging of trochoidal gears, because they give estimates that are substantially higher than experimental loads.

**Key Words:** Upper Bound Method(상계법), Kinematically Admissible Velocity Field(동적 가용속도장), Trochoidal Gear(트로코이드 기어), Relative Pressure(상대압력)

### 기 호 설 명

$r, \theta, z$  : 원주좌표계  
 $M$  : 필렛 반경, 치형 반경  
 $r_n$  : 중립면 반경 [mm]  
 $r_r$  : 치저원 반경 [mm]

$u$  : 편치의 하강 속도 [mm/s]  
 $U_r, U_\theta, U_z$  : 각 방향의 속도성분  
 $N$  : 기어의 잇수  
 $r_p$  : 피치원 반경 [mm]  
 $t$  : 순간의 빌렛높이 [mm]  
 $\alpha$  : 1/2 피치 각 [rad]

\* 충북대학교 정밀기계공학과, NSDM for ERC, 정회원

\*\* 마산전문대학 자동차과, 정회원

\*\*\* 부산대학교 대학원 기계설계공학과, 학생회원

## 1. 서 론

자동차 산업이 급속히 발전하면서 자동차 부품의 수요가 증가하고 그 품질의 고기능화 및 생산성의 향상이 절실히 요구되고 있다. 이러한 요구에 부응하기 위하여 가공시 금속의 유동에 의한 강도 향상과 생산시간의 단축으로 인해 대량생산이 가능한 압출, 단조 등과 같은 소성가공에 의한 생산 방법이 발전하게 되었다. 이러한 소성가공 공정들은 큰 하중이 수반되는 등 가혹한 작업 조건에서 진행되므로 소성가공시 금속에 작용하는 압력과 하중을 예측하기 위한 해석이 필요하게 되었으며 이에 따라 여러 가지 해석법이 개발되었다. 이러한 것들 중에서 상계법은 해석대상 부품의 형상정의와 정의된 형상에 대한 속도장을 가정함으로써 3차원 형상을 갖는 부품을 소성가공할 경우에 그 하중 및 상대압력 해석에 적용이 가능하므로 여러 연구자들에 의해 여러 가지 소성가공법에 있어 다양한 형상에 대한 상계해가 제시되었다.

이러한 연구자들 중 Kim<sup>(1)</sup>은 치형의 형상이 원호인 트로코이드 기어를 평균형을 통하여 압출할 경우에 있어서 속도장을 유도하고 그 상계해를 구하여 실험과 비교하였다. Kiuchi<sup>(2,3)</sup>는 UBET를 사용하여 각형 스플라인과 비축대칭 부분이 결합된 부품의 단조를 해석하였다. 이외에 Juneja<sup>(4)</sup>, Dean<sup>(5)</sup>, Ohga<sup>(6,7)</sup> 등은 기어 형상의 부품에 대한 단조 상계해를 제시하였다. 국내에서는 Choi<sup>(8)</sup> 등이 스피어 기어의 단조에 있어서 치형을 사다리꼴로 가정하고 치형영역의 속도성분 표현에 있어서 두개의 좌표계를 사용하였으며, 치형영역에서 원주방향 속도성분이 없는 것으로 가정하여 상계해석하였다. Cho<sup>(9,10)</sup> 등은 중공소재를 사용한 스피어기어와 여러 가지 형상의 스플라인의 단조를 상계해석함에 있어 중립면을 도입하여 소재의 내부유동을 해석하였다. 이상에서와 같이 많은 선행 연구자들이 원통형 주위에 일정한 간격으로 치형을 갖는 기어형상의 부품에 대해 상계해석을 수행하였다. 그러나, 현재까지 치형의 형상이 원호인 트로코이드 기어에 대한 소성가공 해석은 Kim<sup>(1)</sup>의 압출을 제외하고는 보고된 바가 없다.

본 연구에서는 비축대칭 형상을 갖는 부품의 단조해석에 대한 범용 시뮬레이터 개발의 일환으로서 유압 펌프, 자동차의 각종 펌프 풀리(pulley), 타이밍 벨트 풀리 혹은 직조기 물의 풀리 등등에 사용되는 트로코이드 기어를 단조할 경우에 상계법을 적용할 수 있는 동적 가용속도장을 제시하고자한다. 또한, 제시한 속도장으로써 단조공정 변수에 따른 하중과 상대압력을 해석하고 실험과 이론해

석을 비교하여 실제 단조에 적용할 경우 제시한 속도장의 타당성 및 상계해의 신뢰성을 검증하고자 한다.

## 2. 이론해석

원통형의 소재로부터 해석대상인 트로코이드 기어의 단조를 해석하기 위해 기어의 1/2 피치를 6개의 변형영역으로 분할하면 Fig. 1과 같다. 각종 펌프에 사용되는 트로코이드 기어의 실제 치형은 필렛부만이 존재하거나 필렛부와 필렛부 바로 위(Fig. 1의 H J 면)에 약간의 원호로 이루어진 부분이 결합된 반치형 또는 2/3치형 형태로 구성되지만 본 연구에서는 여러 가지 높이의 치형에 대한 적용성을 위하여 필렛상부의 형상을 반경이 M인 완전한 원호로 가정하여 해석하였다. 또한, 평편치를 이용한 단조시 중립면은 본 연구자들이 제시한 것<sup>(9,10)</sup>과 같이 반경이  $r_n$  인 원호로 가정하였다.

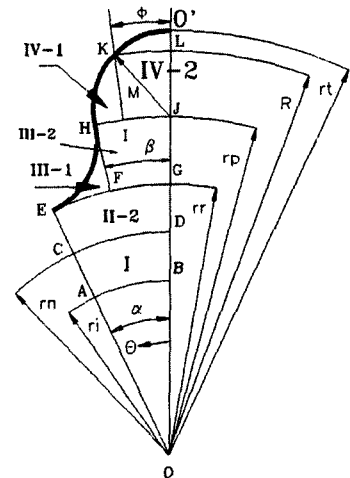


Fig 1. Schematic drawing of half pitch for trochoidal gear

해석을 위하여 다음과 같은 일반적인 가정을 한다.

1. 재료는 비압축성이며 등방성이다.
2. 단조중 재료는 Von Mises의 항복조건을 따른다.
3. 사용한 재료는 강소성재료라 가정한다.
4. 소재의 외경과 단조하고자 하는 트로코이드 기어의 치저원 직경을 일치하게 하여 펀치의 하강과 동시에 치형부분으로 소재가 유동한다고 생각한다.
5. 축방향의 속도는 전 변형영역에서 다음과 같이 가정한다.

$$U_z = -\frac{u}{t}z \quad (1)$$

여기서,  $Z$ 는 축방향의 좌표이다.

## 2.1 동적가용 속도장

각 변형영역에 대한 경계조건과 체적일정조건을 만족하는 속도장을 유도하면 다음과 같다.

### 1) I 변형영역 속도장 ( $0 \leq \theta \leq \alpha$ , $r_i \leq r \leq r_n$ )

Fig. 1에서와 같이 중립면의 아래쪽 영역으로서 축대칭 변형영역이라 가정하여 원주방향의 속도성분을 "0"으로 둔다. 체적일정 조건에 의해 다음과 같은 속도성분을 구할 수 있다.

$$U_r = \frac{u}{2t} \left( r - \frac{r_n^2}{r} \right), \quad U_\theta = 0$$

### 2) II 변형영역 속도장 ( $0 \leq \theta \leq \alpha$ , $r_n \leq r \leq r_r$ )

이 영역은 중립면 위쪽의 영역으로서 I 영역과 같이 축대칭 변형영역으로 가정한다. 따라서, 다음과 같은 속도성분을 얻을 수 있다. 속도성분의 형태가 I 영역과 동일하나 재료의 유동 방향이 다르다. 즉, I 영역의 반경방향 속도성분은 그 크기가 음수(-)이지만 II 영역의 반경방향 속도성분은 그 크기가 양수(+)이다.

$$U_r = \frac{u}{2t} \left( r - \frac{r_n^2}{r} \right), \quad U_\theta = 0$$

### 3) III 변형영역 속도장 ( $\beta \leq \theta \leq \alpha$ , $r_r \leq r \leq r_p$ )

Fig. 1에서와 같이 단조중 소재가 공구면 E-H에 접하는 영역으로서 공구면에 대한 법선방향의 속도성분이 "0"이 되어야 한다는 구속조건 ( $U_r / U_\theta = \cot \phi$ )을 포함하고 있다.

$$U_r = \frac{u}{2t} \left( r - \frac{r_n^2}{r} \right)$$

$$U_\theta = \frac{u}{2t} \left( r - \frac{r_n^2}{r} \right) \cot \psi$$

$$\cot \psi = \frac{(r_r + M)^4 - (r^2 - M^2)^2 - (r^2 - r_r^2) \{ (2M + r_r)^2 - r^2 \}}{2(r_r + M)^2 \sqrt{(r^2 - r_r^2) \{ (2M + r_r)^2 - r^2 \}}}$$

### 4) IV 변형영역 속도장 ( $0 \leq \theta \leq \beta$ , $r_r \leq r \leq r_p$ )

치형부의 영역으로서 원주방향의 속도성분이 원주좌표  $\theta$ 에 따라 선형적으로 변화한다고 가정한다. 따라서 다음과 같은 속도성분을 얻을 수 있다.

$$U_r = \frac{ur}{2t} - \frac{C_1}{2t} \frac{C_2}{\beta r} + \frac{C_{IV}}{r}$$

$$U_\theta = \frac{u\theta}{2t} \left( r - \frac{r_n^2}{r} \right) \cdot \cot \psi$$

$$C_1 = \frac{1}{2} \sqrt{(r^2 - r_r^2) \{ (2M + r_r)^2 - r^2 \}} + 2r_f^2 \sin^{-1} \left( \frac{\sqrt{(2M + r_r)^2 - r^2}}{2\sqrt{M(r_r + M)}} \right)$$

$$C_2 = \frac{1}{2} (\tan^{-1} A + \tan^{-1} B) + \sin^{-1} \left( \frac{\sqrt{(2M + r_r)^2 - r^2}}{2\sqrt{M(r_r + M)}} \right)$$

$$- \frac{1}{4(r_r + M)^2} \sqrt{(r^2 - r_r^2) \{ (2M + r_r)^2 - r^2 \}}$$

$$A = - \frac{(2M + r_r) \sqrt{(2M + r_r)^2 - r^2} + 4M(r_r + M)}{r_r(r^2 - r_r^2)}$$

$$B = - \frac{(2M + r_r) \sqrt{(2M + r_r)^2 - r^2} - 4M(r_r + M)}{r_r(r^2 - r_r^2)}$$

$$C_{IV} = \frac{\pi M^2}{2t\beta} - \frac{u}{2t} \frac{r_n^2}{r}$$

### 5) V 변형영역 속도장 ( $\phi \leq \theta \leq \beta$ , $r_p \leq r \leq R$ )

III 영역과 같이 단조중 유동하는 소재가 공구면에 접하는 영역으로서 공구면 법선방향의 속도성분이 "0"이 되어야 한다. 따라서, 다음과 같은 속도성분을 얻을 수 있다.

$$U_r = \frac{u}{2t} \frac{r}{r} + \frac{C_V}{r}$$

$$U_\theta = \left( \frac{u}{2t} \frac{r}{r} + \frac{C_V}{r} \right) \frac{r^2 - a \cdot b}{\sqrt{(a^2 - r^2)(r^2 - b^2)}}$$

여기서,  $a = r_p + M$ ,  $b = r_p - M$

$$C_V = \frac{u}{2t} \frac{r_n^2}{\beta} C_2 - \frac{u}{2t} \frac{C_1}{\beta} + C_{IV}$$

$$C_1 = C_1 \big|_{r=r_p}$$

$$C_2 = C_2 \big|_{r=r_p}$$

6) VII 변형영역 속도장 ( $0 \leq \theta \leq \phi$ ,  $r_p \leq r \leq R$ )

IV영역과 같이 원주방향의 속도성분이 원주좌표  $\theta$  에 따라 선형적으로 변화한다고 가정하면 다음과 같은 속도성분을 얻을 수 있다.

$$U_r = \frac{ur}{2t} + \frac{u}{2tr} \frac{C_3}{\phi} + \frac{C_v}{r} \cdot \frac{C_4}{\phi} + \frac{C_{vI}}{r}$$

$$U_\theta = \frac{\theta}{\phi} \cdot \left( \frac{ur}{2t} + \frac{C_v}{r} \right) \sqrt{\frac{r^2 - a \cdot b}{(a^2 - r^2)(r^2 - b^2)}}$$

여기서

$$C_3 = \frac{\sqrt{(a^2 - r^2)(r^2 - b^2)}}{2} + \frac{(b - a)^2}{2} \sin^{-1} \sqrt{\frac{a^2 - r^2}{a^2 - b^2}}$$

$$C_4 = \sin^{-1} \sqrt{\frac{a^2 - r^2}{a^2 - b^2}} - \frac{1}{2} (\tan^{-1} C - \tan^{-1} D)$$

$$C = \frac{(b^2 - a^2 - a\sqrt{a^2 - r^2}) \cdot \sqrt{r^2 - b^2}}{b(b^2 - r^2)}$$

$$D = \frac{(b^2 - a^2 + a\sqrt{a^2 - r^2}) \cdot \sqrt{r^2 - b^2}}{b(b^2 - r^2)}$$

## 2. 2. 에너지 소비율

전체 에너지 소비율은 각각의 에너지 소비율의 합이다. 즉,

$$\dot{E}_T = \sum \dot{E}_p + \sum \dot{E}_s + \sum \dot{E}_f \quad (2)$$

여기서,  $\dot{E}_p$  는 내부에너지 소비율,  $\dot{E}_s$  는 전단에너지 소비율,  $\dot{E}_f$  는 마찰에너지 소비율이다.

## 3. 결과 및 고찰

원통형 소재를 사용하여 트로코이드 기어를 단조할 경우 상계법을 적용할 수 있는 동적 가공속도장을 제시하였다. 본 연구에서는 트로코이드 기어의 단조 완료후 최종 두께를 10 mm, 마찰상수는 0.14를 사용하였다. 실험 및 해석대상으로 한 소재는 Al 2218이며 가공경화를 고려할 경우 Fig. 2의 압축시험으로 부터 얻은 다음 식에 의해 유동응력을 계산하였다.

$$\bar{\sigma} = 352.48 \bar{\epsilon}^{0.2320} \quad (3)$$

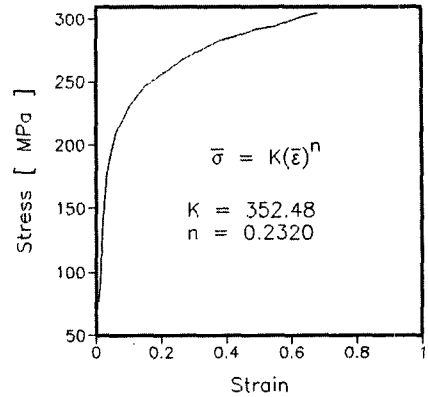


Fig. 2 Stress-strain curve of Al 2218 by compression test

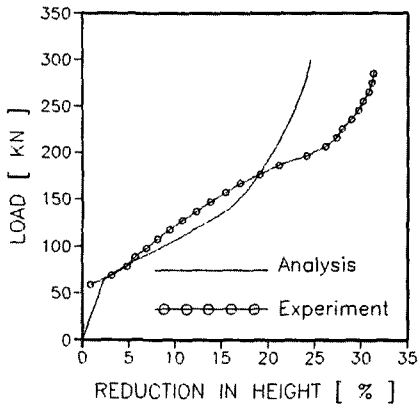
Table 1에 본 연구에서 사용한 Al 2218 소재의 화학적 성분을 나타내었다.

Table 1 Nominal chemical compositions of wrought Al 2218<sup>(11)</sup>

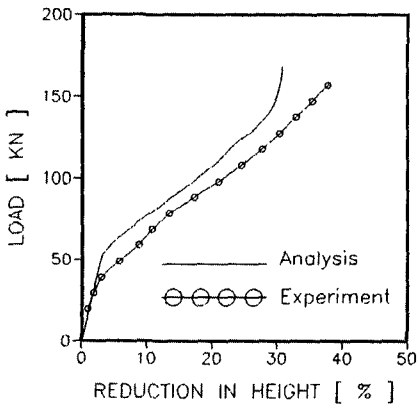
Composition (%)							
Al	Si	Cu	Mn	Mg	Fe	Zn	Others
92.5	0.30	3.54	0.05	1.30	0.10	0.03	1.73Ni 0.01Cr

Fig. 3은 중공과 중실 소재를 사용한 트로코이드 기어의 단조에 있어서 잇수가 12개인 경우 이론해석과 실험의 하중을 압하율에 따라 나타낸 것이다. 중공소재를 사용한 단조시에는 압하율에 따른 하중의 변화경향이 단조 공정 전체에 걸쳐 실험과 일치하고 중공소재의 경우는 단조장비의 능력을 결정하는 단조 하중예측이 있어 중요한 단조 후반부의 경향이 실험과 일치한다. 따라서, 제시한 속도장은 실제 단조에서 중요한 최종상태의 하중예측에 있어서 유용할 것으로 생각된다. 실험과 이론해석에 있어 압하율의 차이는 실험장비와 사용된 소재의 탄성변형량과 다이와 펀치사이의 틈새를 통한 압출비가 큰 후방압출 형태의 소재유동 때문이라 생각된다. 이러한 유동의 결과로서 치형부 주위에 다이의 치저부에서 먼저 발생하는 측방향으로 돌출된 플래쉬(flash)형상이 나타나며 단조가 진행됨에 따라 플래쉬의 높이가 증가한다.

Fig. 4는 트로코이드 기어의 단조실험에 있어서 소재를 중실 소재인 경우 직경 19.4 mm, 높이 13.3 mm로 가공하고, 중공 소재인 경우 내경을 9.50 mm, 높이 17.8 mm로 가공하여 실험한 경우 여러 단계의 압하율에 따른 트로코이드 치형의 성형과정을 나타낸 실험결과이다. 그림에서와 같이 치형을 채우는 자유면의 형상이 원호에 가



(a) solid



(b) hollow

Fig. 3. Relative pressures and loads for forging of trochoidal gear

까움을 볼 수 있다.

실제 자동차용 순환 펌프 또는 타이밍 벨트 폴리에 사용되는 트로코이드 기어의 치형은 본 연구에서 해석대상으로 한 치형에서 Fig. 1의 H J면 위에 약간의 원호 부분이 존재하는 반치형 혹은 2/3 치형과 같이 임의의 반경을 갖는 형상이다. 이러한 임의의 반경의 치형에 대한 최종 상태의 하중은 본 연구에서 제시한 하중의 분포를 나타내는 Fig. 4에서 실제 치형의 임의의 반경에 해당하는 압하율에서의 하중과 같다. 따라서, 실제 트로코이드 기어의 단조시 치형의 높이에 관계없이 본 연구에서 제시한 상계해를 적용할 수 있을 것이라 생각된다.

Fig. 5는 중실 소재를 사용한 트로코이드 기어의 단조에 있어서 잇수가 12개인 경우 변형에너지, 전단에너지, 마찰에너지를 압하율에 따라 나타낸 것이다. 그림에서와 같이 참고문헌 [8]과는 달리 전체하중에 미치는 영향에

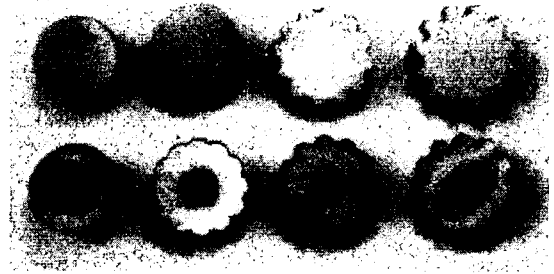


Fig. 4. Photographs of forged trochoidal gear for each step

있어 변형에너지가 지배적이며 마찰에너지가 전단에너지보다 크게 나타나고 있다. 따라서, 실제 단조에서는 존재하지 않으나 이론해석상 나타나는 전단의 영향이 가장 적게 평가되었으며 실제에서와 같이 변형에너지의 영향이 지배적이므로 변형영역의 분할 및 각 변형영역에 대한 속도장이 실제 유동을 잘 표현하였다고 할 수 있다.

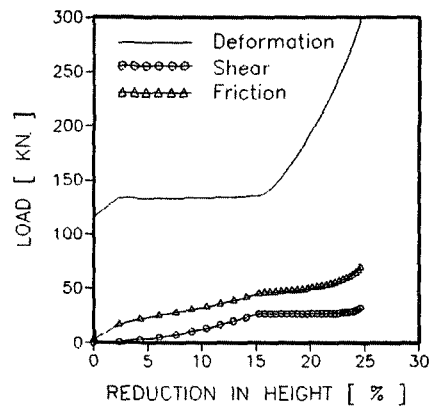


Fig. 5. Variations of energies with respect to reduction in height

Fig. 6은 중실소재를 사용한 트로코이드 기어의 단조에 있어서 잇수가 동일한 경우 피치원 반경의 크기에 따른 하중과 상대압력을 나타낸 것이다. 잇수에 관계없이 피치원 반경의 증가에 따라 단조품의 크기가 증가하므로 하중과 상대압력이 증가하고 있다. 또한, 동일한 피치원에 대하여 잇수가 증가할수록 상대압력과 하중이 증가하는 것을 볼 수 있다. 이것은 잇수가 증가함에 따라 변형영역과 전단면의 개수가 증가하기 때문이라 생각된다.

Fig. 7은 동일한 피치원 반경에 대하여 단조 최종상태

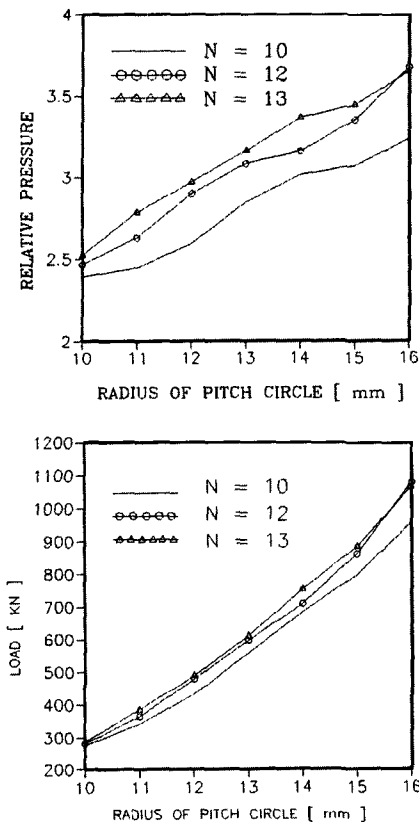


Fig 6. Variations of loads and relative pressures in case of constant number of teeth

의 하중과 상대압력을 잇수에 따라 나타내었다. Fig. 6과 같이 피치원 반경의 증가에 따라 하중과 상대압력이 증가하는 결과를 볼 수 있으며 같은 피치원 직경에서 최종상태의 상대압력과 하중이 최소가 되는 잇수를 찾을 수 있다. 그림과 같은 경우 잇수가 6 ~ 7개일 때 가장 낮은 상대압력과 하중으로 트로코이드 기어를 단조할 수 있을 것이다. 따라서, 기어의 잇수, 모듈 등과 같은 공정변수에 대한 단조 최적조건을 찾을 수 있다.

#### 4. 결 론

본 연구에서는 상용 알루미늄 소재 Al 2218을 사용하여 원호 형상의 치형을 갖는 트로코이드 기어를 단조할 경우 상계법을 적용할 수 있는 동적 가용속도장을 유도하여 수치해석과 실험을 비교한 결과 다음과 같은 결론을

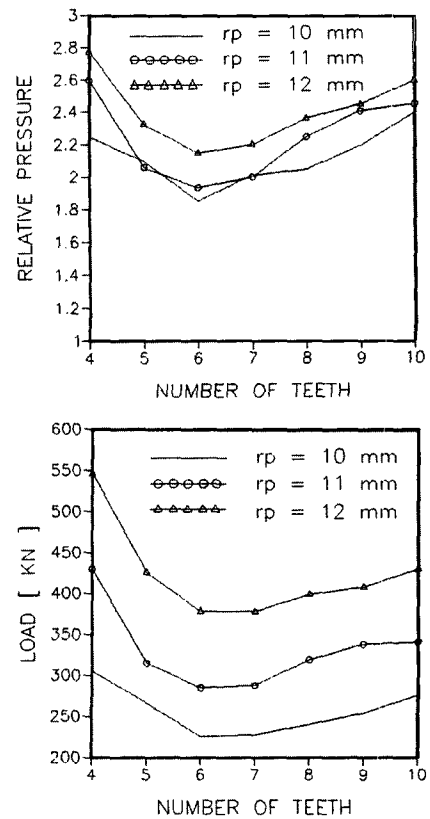


Fig 7. Variations of loads and relative pressures in case of constant radius of pitch circle

얻었다.

1. 중실 및 증공소재를 사용하여 원호 형상의 치형을 갖는 트로코이드 기어를 단조할 경우 상계법을 적용할 수 있는 동적 가용속도장을 유도하였다.
2. 치형의 형상이 원호인 부품의 단조시 소재의 유동에 의해 치형부분을 채우는 자유면 형상을 원호로 가정된 속도장에 의해 구한 상계해는 실험과 경향이 잘 일치하며 실험의 하중보다 큰 해를 나타내므로 실제 단조하중의 예측에 효과적이라 생각한다.
3. 동일한 잇수인 경우 피치원 반경의 증가에 따라 하중과 상대압력이 증가하며 트로코이드 기어의 단조시 공정변수에 대한 단조 최적조건을 찾을 수 있었다.
4. 실제 사용되는 치형보다 높은 치형을 해석함으로써 여러 가지 높이의 치형에 대한 하중을 알 수 있다.
5. 제시한 속도장은 변형에너지의 영향이 가장 크고 전

단의 영향이 가장 적게 평가되었으므로 단조시 금형내의 소재유동을 실제로 가장 가깝게 표현한 속도장이다.

### 참 고 문 헌

1. D. K. Kim, "Upper Bound Analysis of the Square Die Extrusion of Non-Axisymmetric Section", Ph. D. Pusan National University, 1996.
2. M. Kiuchi, T. Muramatsu and T. Imai, "Analysis on Non-Axisymmetric Complex Forging", J. of the JSTP, Vol. 30, No. 342, pp. 997 ~ 1003, 1989.
3. M. Kiuchi, "Complex Simulation System of Forging Based on UBET", Annals of the CIRP, Vol. 35/1, pp. 147 ~ 150, 1986.
4. O. P. Grover and B. L. Juneja, "Analysis of Closed-Die Forging of Gear- Like Elements", Advanced Tech. of Plasticity, Vol. II, pp.888 ~ 893, 1984.
5. N. A. Abdul and T. A. Dean, "An Analysis of the Forging of Spur Gear Forms", Int. J. Mach. Tool Des. Res., Vol. 26, No. 2, pp. 113 ~ 123, 1986.
6. K. Ohga, K. Kondo and T. Jitsunari, "Research on precision Die Forging Utilizing Divided Flow", Bulletin of the JSME, Vol. 28, No. 244, pp. 2451~2459, 1985.
7. K. Kondo, T. Jitsunari and K. Ohga, "Investigation on Cold Die Forging of a Gear Utilizing Divided Flow", Bulletin of JSME, Vol. 28, No. 244, pp. 2442~2450, 1985.
8. 최재찬, 허판도, 김창호, 최중용, "스퍼어 기어의 밀폐 단조에 관한 상계해석", 한국정밀공학회지, 제 11 권, 제 4 호, 통권 제 42 호, pp. 26 ~ 37, 1994.
9. 조해용, 최재찬, 최중용, 민규식, "중공소재의 내경변화에 따른 스퍼어기어 단조에 관한 연구", 한국소성가공학회지, 제 4 권, 제 3 호, pp. 257 ~ 266, 1995.
10. 조해용, 최중용, 민규식, "중공 및 중실소재를 이용한 스플라인 단조에 관한 연구", 한국정밀공학회지, 제 13 권, 제 1 호, pp. 108 ~ 115, 1996.
11. 최재찬, 조해용, "Semi - Solid Al 재료 복합단조기술", 부산대학교 정밀정형 및 금형가공연구센터 보고서, p. 23, 1995.