

이송모터 전류신호의 Wavelet 변환에 의한 공구파손 식별

박화영*, 김선호*, 안중환**, 이만형**

Identification of Tool Breakage Signal Using Wavelet Transform of Feed Motor Current in Milling Operations

Hwa-young Park*, Sun Ho KIM*, Jung-Hwan Ahn**, Man-Hyung LEE**

ABSTRACT

This Paper is concerned with effective signal identification method for tool breakage and micro chipping using discrete wavelet transform of feed motor current in milling operations. The wavelet transform uses an analyzing wavelet function which is localized in both frequency and time domain to detect subtle time localized changes in input signals. The changing pattern of wavelet coefficient is continuously compared to detect tool breakage and micro chipping over one spindle revolution. The results indicate that the wavelet transform can identify tool failure with much greater sensitivity than the time domain monitoring and frequency domain monitoring such as FFT. Experimental results are presented to support the proposed scheme.

Key Words: wavelet transform(웨이브렛 변환), feed motor current(이송모터전류), tool breakage(공구파손), analyzing wavelet function(해석 웨이브렛 함수)

1. 서 론

가공중(In Process) 공구의 상태를 감시하는 방법으로 직접적인 방법과 간접적인 방법이 있는데 자동화된 시스템에 적용하기 위해서는 간접적인 방법이 유리하다. 간접적인 방법으로 가공중 공구상태를 감시하기 위해, 수집된 절삭신호를 분석하여 특징을 찾아내는 방법으로 시간영역(Time Domain) 해석과 주파수영역(Frequency

Domain) 해석이 주로 이용되어 왔다. 시간영역해석의 경우 RMS, Peak Value, 평균/분산을 이용한 정적분석과 AR(Auto Regressive) 모델⁽¹⁾, ARMA(Auto Regressive Moving Average) 모델, Kalman Filter등 동적시계열 모델이 연구되어 왔다. 주파수영역해석의 경우 푸리에 변환(Fourier Transform)에 의한 신호해석 기술이 주로 이용되고 있다. 그러나 신호의 최대값을 기준으로 한 레벨 감시법의 경우 가공조건이 수시로 변동되는 밀링

* 한국기계연구원 자동화연구부
** 부산대학교 기계공학부

공정에는 부적합하며, 푸리에 변환된 결과에는 시간정보가 포함되어 있지 않고, 국부적인 변환결과가 전체를 대표하는 성질을 가지는 단점이 있다. 이에 비해 웨이브렛(Wavelet) 변환은 고주파성분에 대해서는 시간분해능이 높고, 저주파성분에 대해서는 주파수분해능이 높은 다중 해상도 해석기술로서 국소적인 변동점을 민감하게 검지하는 것이 가능하다^[5,6].

본 연구에서는 앤드밀 가공중 발생하는 공구의 파손을 검출하기 위해, 가공중 얻은 절삭신호를 이용해, 효과적으로 밀링공구의 파손상태를 식별하는것에 관한 연구를 수행했다. 절삭신호는 이송축모터 구동기와 모터 사이에 설치한 전류센서로 부하전류 신호를 얻었으며, 이를 웨이브렛 변환을 통해 얻어진 웨이브렛 계수변화를 이용해 공구상태를 식별했다. 웨이브렛 변환은 고속신호처리를 위해 이산 웨이브렛 변환(Discrete Wavelet Transform)을 이용했다. 웨이브렛 변환에 의한 공구식별 결과는 시간영역해석으로서 레벨 비교법과 주파수영역해석으로 푸리에 변환 결과와 비교했다. 본 논문에서는 이에 대한 이론적배경을 소개하고 절삭실험에 적용시킨 결과를 소개한다.

2. 전류신호의 레벨감시 및 주파수분석

공구파손을 감지하는데 있어 신호의 시간영역 감시법으로서 가장 일반적으로 사용되고 있는 방법으로서 레벨감시법이 있다. 이는 수집된 신호의 최대값을 기준으로 공구가 파손이 되는 경우 파손된 날(刃)의 절삭량 감소로 인해 다음날이 칩(Chip) 제거량이 증가하기 때문에 전체적인 레벨이 증가한다는 근거에 따른 감시법이다. 이를 Fig.1에 설명한다. 그림에서 보이듯이 이송축 모터 부하전류는 공구팁이 파손되기 전에 비해 파손된 후에는 부하레벨이 약 125% 정도가 된다. 밀링공정의 특성은 가공물이 갖는 형상의 변화에 따라 절삭폭(Ad)과 절삭깊이(Rd)가 수시로 변동되는 특징을 갖는다. Fig.2는 정상공구인 경우에도 절삭폭과 절삭깊이에 따라 신호의 레벨이 달라진다는 것을 보여주고 있으며, Fig.3은 동일한 절삭폭과 절삭깊이에서 이송속도가 달라질때의 신호모습이다. 따라서 밀링공정에 대한 공구의 상태를 감시할 때 레벨감시법은 적합하지 못하다는 것을 알수 있다.

Fig.4는 공구의 파손상태를 식별하기 위해 이송모터 전류신호에 푸리에 변환을 한 결과이다. 그림에서 보이듯이 공구팁이 부러지면 중심주파수 및 가까운 하모닉 성분의

레벨이 증가하는 것 외에는 특징이 없다. 따라서 주파수분석법도 다수의 날을 갖고 공구가 회전하는 단속절삭의 경우에는 적합하지 못하다.

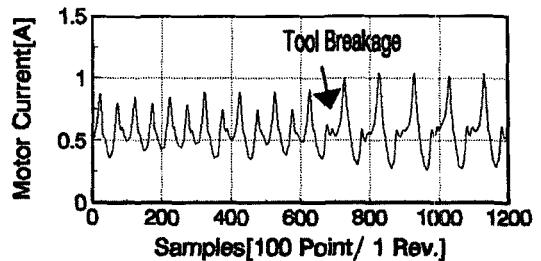


Fig.1. Change of Feed Motor Current with Tool Breakage

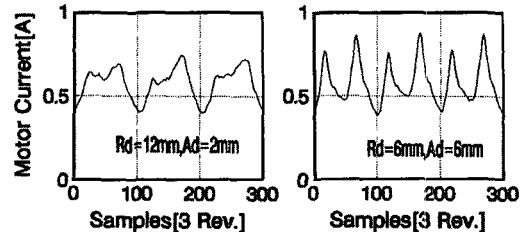


Fig.2. Feed Motor Current with variations of Ad and Rd.

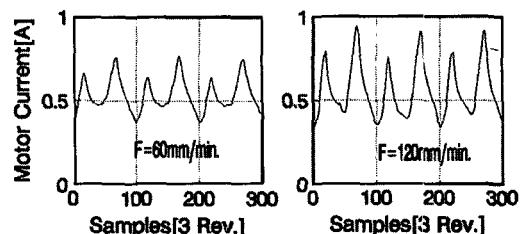


Fig.3. Feed Motor Current with variations of Feedrate

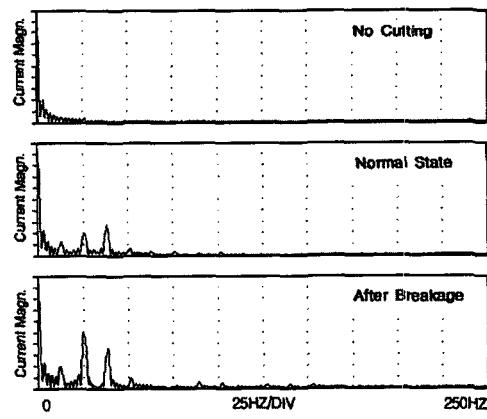


Fig.4. FFT Analysis

3. 웨이브렛 변환의 이론적 배경

종전에는 웨이브렛 변환기술이 적의 잠수함 탐지, 의학 영상처리(Medical Image Processing), 음악합성(Music Synthesis) 등 특수목적에 이용되어 왔으나, 최근에는 생산 분야에 적용되어 드릴상태 감시⁽²⁾, 베어링의 이상진단⁽³⁾, 밀링공구의 결손검지⁽⁴⁾에 적용되기도 했다. 특히 웨이브렛 신호처리는 절삭력이나 전류신호와 같이 비정상성(Nonstationary)을 갖는 신호의 분석에 적합하다.

웨이브렛 변환은 푸리에 변환과 유사한 신호처리법으로서 해석웨이브렛(Analyzing wavelet)이라 불리는 함수를 적분변환하는 것이다. 웨이브렛변환은 크게 연속웨이브렛변환과 이산웨이브렛 변환이다^(5,6,7)

3.1 연속 웨이브렛 변환

시간함수 $f(t)$ 의 연속 웨이브렛 변환 $W(a,b)$ 는 식 (1)과 같이 표현된다.

$$W(a,b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \Psi^{*a,b}(t) dt \quad (1)$$

여기서 웨이브렛이라 부르는 $\Psi^{*a,b}(t)$ 는 변환의 적분 핵을 구성하는 함수이며 *는 복소공역을 나타낸다.

$\Psi^{*a,b}(t)$ 는 평균치가 0으로, 시간원점을 벗어나면 급 속히 진폭이 작아지게 되는 해석웨이브렛(Analyzing wavelet)이라 불리는 기본함수 $\Psi(t)$ 를 이용하여 다음 식과 같이 구해진다.

$$\Psi^{*a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (a, b \in R, a \neq 0) \quad (2)$$

식 (1)에서 알 수 있듯이 시간함수 $f(t)$ 에 대해 웨이브렛 변환된 $W(a,b)$ 는 a, b 평면상의 분포가 된다. 여기서 a 는 주파수에 관련된 파라메터이고 b 는 시간에 관련된 파라메터이다. a 를 작게하면 고주파성분 해석이 가능하기 때문에 시간분해능이 높고, a 를 크게하면 저주파성분 해석이 가능하다. 또한 b 를 이용해 웨이브렛을 시간방향으로 이동시켜 신호의 국소적인 변동을 얻는 것도 가능하다. 이러한 성질을 갖는 웨이브렛 변환은 푸리에 변환에서 얻은 시간정보도 얻을 수 있고 또한 신호의 부분적인 비정상적인 변동, 시간변화 및 불연속점을 검출하는데 적합한 신호처리법이다.

3.2 이산 웨이브렛 변환

식 (1)을 이용하여 수치해석을 수행하는 경우 적분연산 구간을 작게 분할하여 계산하는 방법이 있으나 많은 계산 시간을 필요로 한다. 그러나 해석웨이브렛이라 불리는 기본함수 $\Psi(t)$ 의 형상과 특성 파라메터 a, b 를 잘 선택하여 정규직교화(正規直交化)하는 것에 의해 이산 웨이브렛 변환이 가능해 고속변환이 가능하다. 일반적으로 이산화는 식 (2)에서 a 를 2^j , b 를 $2^j k$ 로 치환함으로서 식 (3)과 같이 이산화 웨이브렛을 만들 수 있다.

$$\Psi_{j,k}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \psi\left(\frac{t-2^j k}{2^j}\right) \quad (j, k \text{는 정수}) \quad (3)$$

위식에서 2^j 는 주파수의 Scale을 나타내고 $2^j k$ 는 시간방향의 Shift를 나타내게 된다. 식 (3)을 $L^2(R)$ 의 정규직교좌표화 할 때 다음과 같이 급수표현이 가능하다.

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{j,k} \Psi_{j,k}(t) \quad (4)$$

$$C_{j,k} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \Psi^{*}_{j,k}(t) dt \quad (5)$$

위식에서 $C_{j,k}$ 는 웨이브렛 계수라 부르며 신호 $f(t)$ 의 주파수-시간 분포를 나타낸다. 정규직교좌표화한 웨이브렛 $\Psi(t)$ 를 구성하는 방법에 대해서는 Mallet, Daubechies 등이 제안한 다중해상도 해석법을 이용한 방법을 이용했다^(5,6,7). 다중해상도 해석법에 의해 우선 Scale함수라 불리는 함수 $\phi(t)$ 를 결정하고 이것을 기초로 웨이브렛 $\Psi(t)$ 를 구한다. 이때 원(元)신호 $f(t)$ 의 이산화는 다음 식과 같이 표현이 가능하다.

$$d_{j,k} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \phi^{*}_{j,k}(t) dt \quad (6)$$

$$\phi_{j,k}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \phi\left(\frac{t-2^j k}{2^j}\right) \quad (7)$$

식 (6)에서 $d_{j,k}$ 는 Scaling 계수라 부르고, 원신호의 j 차 해상도의 이산화 표현이다. j 차 이하 해상도의 Scaling 계수 및 웨이브렛 계수는 $d_{j,k}$ 를 기초로 아래식처럼 반복연산을 통해 구해진다.

$$d_{j+1,k} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i-2k)d_{j,i} \quad (8)$$

$$c_{j+1,k} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} g(i-2k)d_{j,i} \quad (9)$$

식 (8)(9)에서 h 와 g 는 각각 저역(Low Pass) 및 고역필터(High Pass Filter)이며 $\phi(t)$ 및 $\Psi(t)$ 에 의해 구해진다. 여기서 웨이브렛 계수 $c_{j+1,k}$ 는 $d_{j+1,k}$ 와 $d_{j,i}$ 사이의 고주파 성분을 나타낸다. $c_{j+1,k}$ 및 $d_{j+1,k}$ 는 $d_{j,i}$ 의 정보를 모두 가지고 있기 때문에 이러한 계수를 기초로 다음과 같이 역변환에 의해 완전히 이산화된 원신호로 재구성하는것이 가능하다.

$$d_{j,k} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(k-2i)d_{j+1,i} + \sum_{i=-\infty}^{\infty} g(k-2i)c_{j+1,i} \quad (10)$$

본 논문에서는 해석웨이브렛으로서 Daubechies의 직교 웨이브렛을 사용했다⁽⁶⁾. 사용된 $N=2$ 의 웨이브렛 및 Scaling 함수의 형상을 Fig.5에 나타내었다. 이것은 실수공간에서 시간방향으로 Support, Compact한 성질을 갖기 때문에 적분연산을 유한한 범위에서 행하는 장점이 있어 고속계산이 가능하게 된다. 이 경우 $h(n)$ 은 $0 \leq n \leq 2N-1$ 인 범위에서 0이 아닌 유한값을 가지며 $g(n) = (-1)^n h(3-n)$, ($n = 0 \sim 3$) 이된다. 이 범위 외에서는 0이 되는 성질을 갖는 함수이다.

$$h(0) = (1 + \sqrt{3})/4\sqrt{2}, \quad (11)$$

$$h(1) = (3 + \sqrt{3})/4\sqrt{2},$$

$$h(2) = (3 - \sqrt{3})/4\sqrt{2},$$

$$h(3) = (1 - \sqrt{3})/4\sqrt{2},$$

$$g(n) = (-1)^n h(3-n), \quad (n = 0 \sim 3) \quad (12)$$

식 (8), (9)에서는 $d_{j,k}$ 가 무한개가 되지만 실제로 얻어지는 신호 $f(t)$ 는 유한길이를 갖기 때문에 유한개로 이산화된다. 이산 데이터 갯수를 N 개로 하면, $f(t)$ 의 이산화 데이터를 $d_{0,k}$ ($k = 0 \sim N-1$)로 대응 시키므로서 식 (8), (9)는 다음과 같이 나타낼수 있다.

$$\begin{bmatrix} d_{1,0} \\ c_{1,0} \\ d_{1,1} \\ \vdots \\ d_{1,N/2-1} \\ c_{1,N/2-1} \end{bmatrix} = T_N \begin{bmatrix} d_{0,0} \\ d_{0,1} \\ d_{0,2} \\ \vdots \\ d_{0,N-1} \end{bmatrix} \quad (13)$$

여기서 T_N 은 $N \times N$ 의 크기를 갖는 행렬이며 다음과 같이 표현 가능하다.

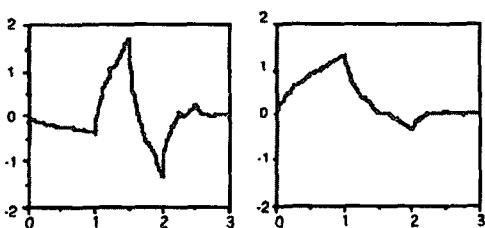
$$T_N = \begin{bmatrix} h(0) & h(1) & h(2) & h(3) & & & & \\ g(0) & g(1) & g(2) & g(3) & & & & 0 \\ & & & & h(0) & h(1) & h(2) & h(3) \\ & & & & g(0) & g(1) & g(2) & g(3) \\ & & & & \dots & \dots & & \\ & & & & \dots & \dots & & \\ 0 & & h(0) & h(1) & h(2) & h(3) & & \\ & & g(0) & g(1) & g(2) & g(3) & & \\ h(2) & h(3) & & & & & h(0) & h(1) \\ g(2) & g(3) & & & & & g(0) & g(1) \end{bmatrix} \quad (14)$$

이 행렬을 이용하여 식(13)의 연산을 반복함으로서 순차적인 저해상도 계수가 구해진다. $j+1$ 차 해상도의 웨이브렛 계수 $C_{j+1,k}$ 및 Scaling 계수 $d_{j+1,k}$ ($K = 0 \sim N/2^{j+1}-1$)는 j 차 Scaling 계수 $d_{j,k}$ ($k = 0 \sim N/2^j-1$)를 $N/2^j \times N/2^j$ 크기의 행열 $T_{N/2^j}$ 로 변환하므로서 얻어진다. 즉, 본래의 이산 데이터 갯수를 $N = 2^J$ 라 할때 $d_{0,k}$ 부터 J 번의 행열 연산으로 모든 계수가 구해진다. 또한 역변환은 T_N 의 역행열 T_N^{-1} 을 이용하므로서 동일하게 연산을 행함으로서 가능하다.

4. 실험장치 및 방법

웨이브렛 변환에 의해 공구파손신호를 식별하기 위해 절삭실험을 통해 절삭신호를 얻었다. 가공중 공구팁의 파손신호를 얻기 위한 절삭실험에는 수직형머시닝센터(대우중공업, FZ25)가 사용되었다. 머시닝센터의 주축은 7.5KW의 AC 서보모터, X, Y 이송축은 1.1KW의 DC 서보모터 그리고 Z 이송축은 1.8KW의 DC 서보모터로

구동된다. 가공물은 S45C(ANSI 1045+)가, 공구는 직경 25mm의 2개의 텁을 갖는 T.A. 형 엔드밀 허더(Sumitomo CME 2025)와 초경합금 P30(Sumitomo MDMM52R) 텁(4각 모서리 반경 R0.8mm)이 사용되었다. 주축 회전수는 780rpm으로 고정시키고 이송속도(F)와 절삭깊이(Rd) 절삭폭(Ad)을 변화시켜 가면서 실험을 하였다. 센서로는 실용성과 유연성을 고려해 이송축 모터와 구동기 사이에 설치된 홀(Hall)형 전류센서를 사용했다. 전류센서로 부터 얻은 신호는 A/D 변환을 통해 샘플링 주파수는 3,328Hz(주축 1회전당 256 데이터 수집)로 하였다. 주축의 1회전 신호를 구분하기 위해서는 주축에 설치한 광 센서(Photo Interrupt)를 사용했다. 엔드밀 텁을 파손 시키기 위해 텁의 뒷면에(앞면은 절삭력에 영향을 줌) WEDM을 이용해 0.2mm의 홈 작업을 수행했다. 사용된 실험장치 구성을 Fig.6에 나타내었다.



Wavelet Function N=2 Scaling Function N=2

Fig. 5. Daubechies wavelet and Scaling Function

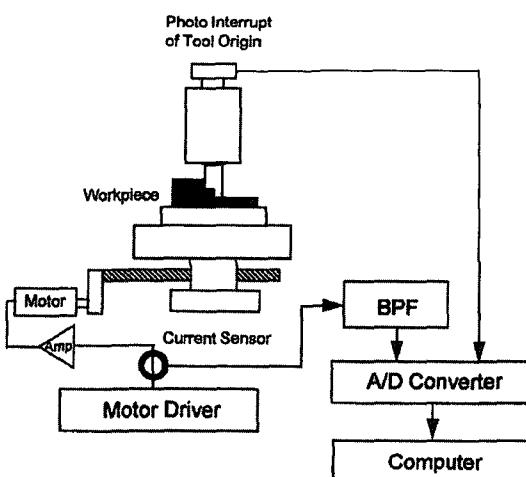


Fig. 6. Experimental Setup

5. 실험결과 및 고찰

본 연구에서 대상으로 한 공구는 2개의 텁을 가지고 있기 때문에, 절삭신호는 1회전에 2개의 피크치를 갖는 특성을 가진다. 이러한 특성을 갖는 절삭신호는 저주파성분을 갖기 때문에 웨이브렛 모델로서는 $N=2$ (Support 0 ~3)인 Wavelet 함수 및 Scaling 함수를 사용 했다. 이에 대한 함수의 모양을 Fig.5에 나타 내었다. 웨이브렛의 해상도는 저주파수 성분 분석의 특성에 맞게 6차로 했으며 이에 따라 주축 1회전 256개의 데이터를 변환하면 웨이브렛 계수는 상위 4개가 특성값을 갖게 된다.

Fig.7은 정상공구와 파손공구에 대해 6차 해상도를 갖는 웨이브렛 변환 결과에 대한 웨이브렛 계수를 나타낸 것이다. 그림에서 보이듯이 6차 해상도 웨이브렛 계수 1 ~4의 경우는 계수값의 특징이 명확하지만 고주파로 갈수록 5차 해상도(5~12) 4차 해상도(13~28) 4차 해상도(29~60) 그 계수값이 작아진다. 이는 밀링공구의 절삭신호가 저주파 성분을 갖는다는 것을 의미한다. 그림에서 보이듯이 각 해상도에서의 웨이브렛 계수가 2개의 피크가 존재하는 것은 공구가 2개의 날을 가지고 있어 회전 당 2개의 날이 가공을 하기 때문이다. 그러나 그림에서 보이듯이 정상공구인 경우에도 웨이브렛 계수가 변동이 있는 것은 정상공구라도 주축의 Run Out 및 공구의 체결정도 등에 영향을 받아 두 개날의 파형이 다르기 때문이다. 그러나 공구팁이 파손되면 웨이브렛 계수는 파손전과 비교하여 전혀 다른 패턴특징을 갖는다.

이러한 웨이브렛 계수 특성을 이용하여 가공중 공구상태를 식별하기 위해 서로 다른 절삭조건에 대해 공구가 파손되기 전후 주축 약 40회전에 대한 이송축 모터 전류신호에 웨이브렛 변환을 수행한 결과를 Fig.8, Fig.9 그리고 Fig.10에 나타내었다. Fig.8은 주축회전수 780rpm 이송속도 100mm/min. 그리고 절삭폭(Ad)

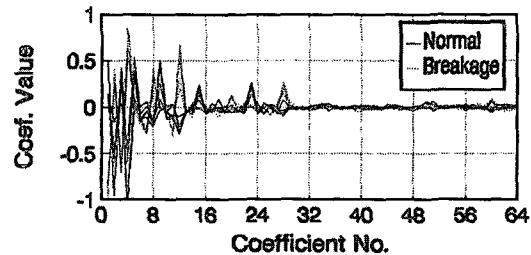


Fig. 7. Result of Wavelet Analysis

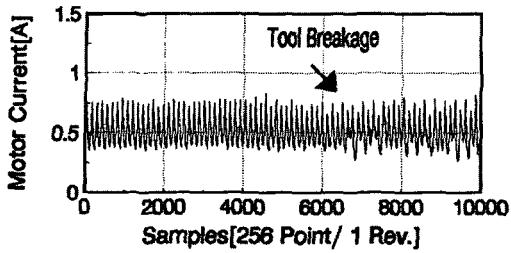


Fig. 8. Feed Motor Current and Wavelet Analysis with Micro Chipping (780rpm, Rd6mm, Ad7mm, F100mm/min)

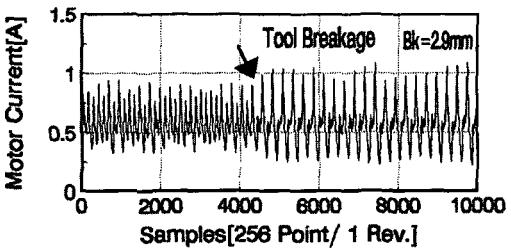


Fig. 9. Feed Motor Current and Wavelet Analysis with Tool Breakage (Bk2.9mm, 780rpm, Rd6mm, Ad5mm, F100mm/min)

7mm 절삭깊이(Rd) 6mm에서 가공중 2개의 텁중 1개가 미소한 파손이 발생한 경우 전류신호와 이를 웨이브렛 변환하여 웨이브렛 계수를 나타낸 것이다. 그림에서 보이듯이 미소파손이 발생하는 경우 계수가 반전되고 있는 것을 보여 주고 있다. Fig.9는 그림8과 동일한 조건에서 Ad 5mm Rd 6mm인 경우 그리고 Fig.10은 Ad 4mm Rd 8mm인 경우에 2개의 텁중 1개가 파손된 경우에 대한 전류신호 및 웨이브렛 계수를 나타낸 것이다. 그림9의 경우에는 파손크기 Bk가 2.9mm이며 그림10의 경우는 2.6mm인 경우이다. 이 경우에도 텁의 파손 전후에 대한 웨이브렛 계수의 특징은 명확히 나타난다. 이상의 결과에서 보이듯이 텁이 파손되기 전후에는 전류신호의 패턴이 바뀌게 되며, 이는 저주파분석을 위한 고해상도 웨이브렛을 적용하는 경우 신호의 특징을 명확하게 식별이 가능하다. Fig.11은 이러한 특징을 정리한 것으로 6차 해상도 웨이브렛 변환을 통해 얻은 웨이브렛 계수 C1~C4는 공구가 파손되기 전에는 W형에서 공구가 파손된 후에는 M 형이 된다는 것을 알 수 있다. 따라서 웨이브렛 변환에 의한 공구파손 식별은 레벨감시나 주파수분석에 비해 민감하게 반응한다는 것을 알 수 있다.

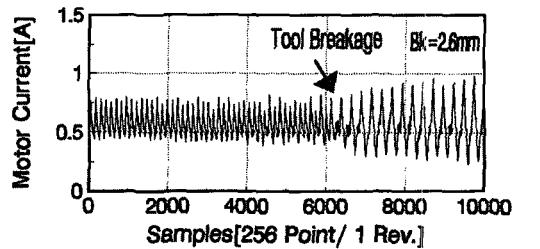
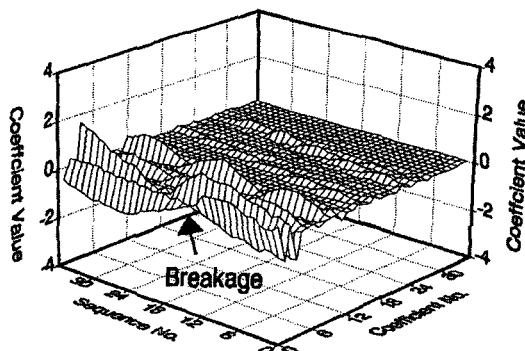


Fig. 10. Feed Motor Current and Wavelet Analysis with Tool Breakage (Bk2.6mm, 780rpm, Rd8mm, Ad4mm, F100mm/min)



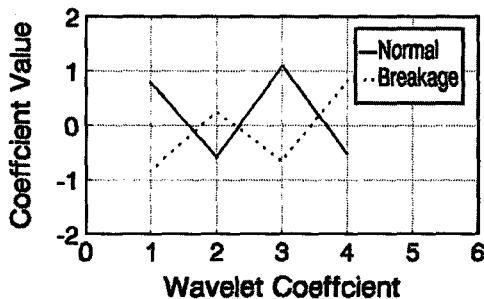


Fig 11. Pattern of Wavelet Coefficient with Tool Breakage

6. 결 론

본 연구에서는 밀링 가공중 발생하는 절삭신호로 부터 공구 파손상태를 식별하기 위해, 모터 구동기와 모터 사이에 설치한 전류센서로 부터 얻은 이송축 부하전류 신호에 이산 웨이브렛 변환을 적용시켜 공구의 파손상태를 식별하는 연구를 수행했다. 이러한 결과의 성능과 예민성을 검증하기 위해 레벨 감시법과 주파수 분석법과도 비교 되었다. 이러한 연구결과를 토대로 다음과 같은 결과를 얻을수 있었다.

- 이송모터 부하전류는 공구파손에 대한 유용한 정보를 가지고 있다.
- 웨이브렛 변환은 밀링 공구팁의 미소파손이나 파손의 식별에 레벨감시나 주파수분석에 비해 민감한 특성을 나타낸다.
- 웨이브렛 변환에 의한 신호처리법은 이론은 복잡하지만, 이를 이산처리함으로서 계산 을 간단히 할 수 있으며 고속신호 처리가 가능하다.

참 고 문 헌

1. 고태조, 조동우, “밀링공정의 적응모델링과 공구마모 검출을 위한 신경회로망 적용”, 한국정밀공학회지, 제11권 제1호, pp.138-149, 1994.
2. Tansel, I. N., Mekdeci, C., Rodriguez, O. and Uragun, B., “Monitoring Drill Conditions with Wavelet Based Encoding and Neural Networks”, Int. J. Mach. Tools Manufact., Vol. 33, No.4, pp.559-575, 1993.
3. Ueno, Y., Mori, K., Kasashima, N. and Yoshioka, T., “Prediction of Spalling on a Rolling Bearing using the Discrete Wavelet Transform”, JSPE, Vol. 61, No. 4, pp.521-526, 1995.
4. Kasashima, N., Mori, K. and Ruiz, G. H., “Detection of Tool Failure in Milling Process using the Discrete Wavelet Transform”, Transac. of JSME, Vol. 61, No. 538, pp.1204-1210, 1995.
5. Mallet, S. G., “Wavelet and Filter Banks: Theory and Design”, IEEE Trans. on Signal Processing, Vol. 40, N0.9, pp.2207-2232, 1992.
6. Daubechies, I., “Orthonormal Bases of Compactly Supported Wavelets”, Communs Pure Appl. Math. XLI, pp.909-996, 1988.
7. Daubechies, I., “The Wavelet Transform, Time-Frequency Localization and Signal Analysis”, IEEE Trans. on Inf. Theory, Vol. 36, N0.5, pp.961-1005, 1990.