

밀도 분포를 이용한 구조물 및 리브의 최적 위상 설계

정진평*, 이건우*

Optimal Topology Design of Structures and Ribs Using Density Distribution

Jinpyung Chung* and Kunwoo Lee*

ABSTRACT

Optimal topology design is to search the optimal configuration of a structure which can be used as a shape at the conceptual design stage. Our objective is to maximize the stiffness of the structures and ribs under a material usage constraint. The density of each finite element is the design variable and its relationship with Young's modulus is expressed by quadratic form. The configuration is represented by the entire density distribution, the structural analysis is performed by finite element method and the optimization is performed by Feasible Direction Method. Feasible Direction Method can handle various problems simultaneously, that is, multi-objectives and multi-constraints. Total computation time can be reduced by the quadratic relationship between the density and the material property and fewer design variables than Homogenization Method. Topology optimization technique developed in this research is applied to design the shapes of the ribs.

Key Words: Topology Optimization(위상 최적화), Density(밀도), Stiffness(강성), Finite Element Method (유한 요소 기법), Feasible Direction Method, Ribs(리브)

1. 서론

현대에 들어오면서, 보다 가벼우면서도 효율적인 기계 구조물들의 요구가 증가하고 있다. 외형적으로 아름다우면서도 에너지 및 환경문제를 고려하고, 기능적으로도 훌륭한 기계를 설계하기 위하여 설계자들은 기존의 방법에서 탈피하여 보다 나은 설계 기술을 추구하고 있었다.

구조 설계에서 설계자가 어떤 물체의 형상을 설계한다

는 것은 주어진 구속 조건하에서 외력과 모우멘트가 주어질 때, 설계 목적에 적합한 기능을 적절히 수행할 수 있는 물체의 형상을 찾는 것이다.

물체의 위상 및 형태는 개념 설계 단계에서 결정되는데, 개념 설계 단계에서 결정된 물체의 위상을 고정하고 최적화 작업을 수행하면, 단지 물체의 형상을 나타내는 정해진 수의 매개변수의 값만을 변화시켜 가며, 최적의 형상을 찾기 때문에, 그 물체의 기본적인 윤곽(layout)

* 서울대학교 기계설계학과

은 변하지 않고, 최적의 형상을 찾는데 한계가 있게 된다. 즉, 최적화에 의해 얻어진 최종의 형상이 설계자의 초기 추측에 강하게 의존하므로, 설계자가 개념 설계 단계에서 초기 추측을 잘못하면, 진정한 최적의 형상을 얻지 못할 수도 있고, 설계를 개선해야 할 경우가 많아진다. 결론적으로, 진정한 최적의 형상을 얻으려면, 최적화 단계에서 물체의 내부에 그 물체의 위상을 변화시킬 수 있는 새로운 경계들의 생성을 가능하게 해 주어야 한다.

설계 공정은 순환 공정이고, 설계는 필요에 따라 개선되어 질 수 있으나, 이미 형상이 결정된 설계의 개선에는 비용이 많이 들게 된다. 따라서, 개념 설계 단계에서 모든 설계 결정 사항들이 보다 철저하고 정확하게 계획되고 수행되어야 한다. 하지만, 이 단계에서 설계자들을 도와 줄 수 있는 것은 단지 설계자의 직관, 창의성, 경험, 판단력 등의 추상적인 개념들뿐이다. 본 연구에서는 개념 설계를 설계자의 주관적 결정에 의존하지 않고, 컴퓨터를 이용한 수치해석적 방법으로 주어진 공간상에서 객관적인 최적의 형상을 찾아서, 개념 설계를 자동화하고자 한다. 즉, 개념 설계 단계에서 설계자가 물체의 형상을 초기 추측할 필요 없이, 설계 영역(design domain), 구속 조건(design constraints), 힘의 크기와 방향(load condition)만 지정하여 주면, 최적화 기법을 이용하여 자동으로 최적의 구조적 성능을 발휘하는 기계 구조물의 위상을 찾을 수 있고, 개념 설계 단계에서 원하는 최적의 형상도 얻을 수 있다.

위상 최적화의 가장 평범한 기법은 Ground Structure^{(1),(2)}이고, 가장 대표적인 연구는 Homogenization Method⁽³⁾⁻⁽⁶⁾이다. Homogenization Method를 이용한 위상 최적화 방법은 물체를 수 많은 구멍들을 가지고 있는 미세 구조로 가정하여, 최적의 구조적 성능을 발휘하는 구멍들의 분포를 찾는다. 이 때, 구멍의 크기와 elasticity tensor와의 관계는 Homogenization Method에 의해 구해지고, 최적화 알고리즘으로는 Optimality Criteria Algorithm을 사용한다. 위상 최적화를 이용한 설계의 대부분이 Homogenization Method를 이용해서 행해져 왔으나, 최근 들어 새로운 접근 방법들이 연구되고 있다.

유전 알고리즘을 이용한 위상 최적화는 Jensen등⁽⁹⁾에 의해 시작되었고, Sequential Approximate Optimization Algorithm을 사용한 위상 최적화가 Kumar⁽¹⁰⁾에 의해 수행되었다. Kumar는 설계 영역을 삼각형 메쉬(mesh)로 분할한 뒤, 각 노드점에서의 밀

도값을 설계 변수로 하여, 최적화를 수행하고, 동일한 밀도값들끼리 linear interpolation에 의해 연결하여 구조물의 경계를 직접 직선들의 연결로 표현하고자 하였다. Yang⁽¹¹⁾은 유한 요소의 밀도를 설계 변수로 하여 위상 최적화를 하였다. Sequential Linear Programming으로 선형화하여 최적화를 수행하였으며, 목적 함수에 penalty term을 추가하지 않았다.

Homogenization Method의 경우, 미세 구멍의 크기와 재료의 특성간의 관계를 비교적 정확하게 구해낼 수 있으나, 보통의 엔지니어들이 Homogenization Method를 사용하기가 쉽지 않고, 이 방법을 사용하여 미세 구멍의 크기와 재료의 특성간의 관계를 구하기 위해서는 몇 번의 유한 요소 해석이 필요하다.

Kumar의 경우, 3차원 구조물에 대해서는 적용하지 못했고, Yang의 경우는 penalty term을 사용하지 않아 최적화된 결과에 중간 밀도값이 많이 나타나는 문제점이 있다. 만일, 물체의 형상이 복잡할 경우 문제가 될 수 있을 것이다.

본 연구에서는 물체의 미세 구조에 관심이 있는 것이 아니고, 단지 엔지니어들이 보다 간편하고 효율적으로 위상 최적화를 구조물 및 리브의 설계에 적용할 수 있도록 하고자 한다. 따라서, 유한 요소의 밀도를 설계 변수로 하여 최적화를 행하여, 3차원에도 적용 가능하도록 하였고, 목적 함수에 penalty term을 추가해 중간 밀도를 가능한 배제한 형상을 얻고자 하였다. 최적화 알고리즘으로 Feasible Direction Method를 사용하여, Optimality Criteria Method와는 달리 여러개의 목적 함수와 구속 조건하에서도 위상 최적화를 할 수 있는 가능성을 제시하였고, 밀도와 탄성 계수(Young's Modulus)와의 관계를 근사화 하여, 계산 시간을 단축하고 설계 속도를 향상시켰다. 특히, 물체의 기본적인 형상이 정해져 있는 경우에는 강성을 증가시키기 위하여, 리브를 설치하는 것이 일반적이다. 기존에는 최적의 두께 분포를 찾아서 리브의 형상을 결정하는 것이 일반적이었는데⁽¹²⁾⁻⁽¹⁴⁾, 본 연구에서는 이 리브의 형상을 결정하는데 위상 최적화 기법을 사용하였다.

2. 위상 최적화를 위한 문제의 공식화

위상 최적화를 위해서는 다음의 세 가지 도구가 필요하다. Fig.1은 본 연구에서 위상 최적화를 위해 사용한 도구를 개략적으로 보여 주고 있다.

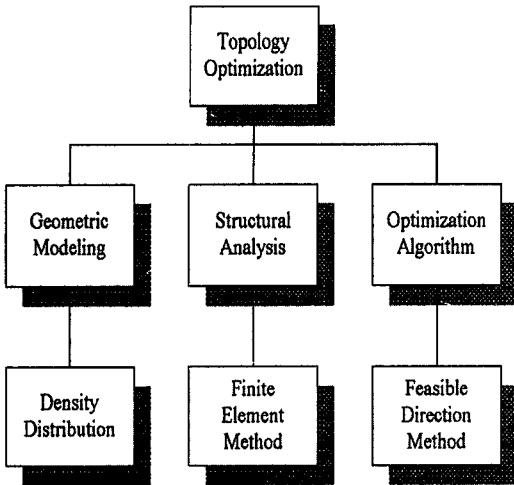


Fig. 1 Topology Optimization Overview

2.1 물체 형상의 표현 방법

전통적인 기하학적 모델링 기법은 물체의 내부 또는 외부의 경계를 B-spline과 같은 자유 곡선 또는 자유 곡면으로 표현하는 것이다. 이와 같이 전통적인 기법을 사용하여 물체의 형상을 표현하면, 물체의 위상이 고정되기 때문에, 위상 최적화를 위한 물체의 형상 표현 방법으로는 적합하지 않다. 또, 이와 같이 물체의 위상이 고정된 상태에서 유한 요소 해석 등의 수치해석 기법을 사용하여 해석을 하려면, 물체의 형상이 변화할 때마다 메쉬를 다시 잘라야 하는 부담이 있다.

본 연구에서는 임의의 설계 영역을 유한 요소 (finite element)로 분할한 뒤, 각 요소의 밀도로 형상을 표현하고자 한다. 즉, 설계 영역의 전체적인 밀도 분포가 물체의 형상을 표현해 준다. 밀도가 0인 부분은 물체가 없는 것으로 간주할 수 있고, 밀도가 1로 갈수록 물체의 재료가 집중되어야 한다. 이 방법을 사용할 경우, 2차원 물체의 형상 뿐 아니라, 3차원 물체의 형상까지도 표현할 수 있다.

2.2 목적 함수와 구속 조건

본 연구에서 최적화의 목표는 주어진 질량에서 강성을 최대화한 구조물의 형상을 찾는 것이다. 따라서, 목적 함수는 mean compliance 이며, 구속 조건은 재료의 질량, 즉 사용되는 재료의 한계이며, 물체의 표현 방법이 각 유한 요소의 밀도 이므로, 설계 변수로는 각 유한 요소의 밀도를 사용했다.

Minimize Mean Compliance $L(\rho)$

$$L(\rho) = \int_{\Omega} \{u(\rho)\}^T \{f\}^B d\Omega + \int_{\Gamma} \{u(\rho)\}^{ST} \{f\}^S d\Gamma + \sum_I \{u(\rho)^i\}^T \{F^i\} + C_p \int_{\Omega} \rho(1-\rho) d\Omega$$

subject to: Mass Limit M_0

$$M(\rho) = \int_{\Omega} \rho d\Omega - M_0 \leq 0 \tag{1}$$

and side constraints: $\rho = \{\rho^e\}$

$$0 \leq \rho^e \leq 1 \quad e = 1, 2, 3, \dots, m$$

여기에서 { }는 벡터 조작자(vector operator)를 나타낸다. $\{f\}^S$ 는 표면력(surface traction), $\{f\}^B$ 는 body force, $\{F^i\}$ 는 집중력(concentrated force), $\{u\}$ 는 변위, $\{\epsilon\}$ 은 변형율, $\{\tau\}$ 는 응력, ρ^e 는 각 유한 요소의 밀도, m은 유한 요소의 개수, Γ 는 표면력이 작용하는 영역, Ω 는 전체 설계 영역, M_0 는 질량 한계이고, $L(\rho)$ 는 mean compliance로서, 변위를 발생시키는 힘에 의해 하여진 일의 2배, 즉 변형 에너지(strain energy)의 2배이다. $L(\rho)$ 가 크다는 것은 힘이 주어질 때, 변형 에너지를 흡수할 수 있는 능력이 크다는 것을 의미하고, 강도 높은 구조물일 수록 변형이 작고, 에너지를 적게 흡수하므로 $L(\rho)$ 의 값이 작다.

밀도를 설계 변수로 최적화를 하면, 0과 1의 밀도값이 아닌, 중간 밀도값들이 많이 나타난다. 이러한 중간 밀도를 갖는 재료는 제작이 어려울 뿐더러, 제작 비용도 많이 든다. 또, 설계자가 형상을 결정하는데 있어서도 이러한 중간 밀도를 배제하여야 할지, 포함시켜야 할지 판단을 어렵게 한다. 따라서, 본 연구에서는 목적 함수에 penalty term을 추가해 중간 밀도를 가능한 한 없애고 있다. 최적화 알고리즘으로는 Feasible Direction Method를 사용하고 있다.

2.3 밀도와 재료의 특성 관계

구조 해석을 위해서는 설계 변수인 밀도와 재료의 특성(material property)과의 관계를 알아야 한다. 서론에서 언급했던 Homogenization Method를 사용해서 이 관계를 구할 수도 있다. 본 연구에서는 물체의 microstructure에 관심이 있는 것이 아니라, 밀도를 설계 변수로 개념 설계 단계에서의 물체의 형상을 얻으려는 것이 목적이므로, 물체의 밀도와 탄성계수와의 관계를 다음과 같이 가정하였다.

$$\frac{E^e}{E^o} = (\rho^e)^n \quad (2)$$

(2)식과 같은 밀도 공식은 "engineer's approach"라고 불린다.⁽¹⁵⁾ 이 식의 경우, 밀도값이 0이면, 그 요소의 탄성 계수도 0이고, 밀도값이 1일 경우, 원래 재료의 탄성 계수값을 갖는다. 결국, 밀도가 0이라는 것은 그 요소 부분이 빈 공간이라는 것을 의미한다. 밀도가 커질수록 탄성 계수값은 식(2)에 의해 증가하고, 같은 힘에 대해 변형을 일으키기 어려워 진다. 이러한 특성은 밀도와 재료의 특성간의 관계를 비교적 정확하게 구한 Homogenization Method의 결과와 유사하다. 그러나, 중간 밀도 값들에 대한 탄성 계수값은 Homogenization Method의 결과와 다르고, n값이 무엇이나에 따라서 그 차이가 달라지며, n값이 커질수록 중간 밀도값을 배제시키는 작용을 한다. 따라서, 밀도 공식은 밀도와 탄성 계수와의 관계를 근사한 것이라고 할 수 있다. 본 연구에서는 n = 2를 사용하였으며, 목적 함수에 penalty term을 추가해 밀도 공식에 의해서가 아니라, 최적화 과정에서 중간 밀도를 가능한 한 배제시키고 있다.

2.4 유한 요소 해석을 이용한 구현

구조물의 유한 요소 해석을 위해 메쉬를 생성할 때, 전체의 설계 영역을 메쉬로 분할한 뒤, 밀도가 0인 부분, 즉 빈 공간에 해당하는 유한 요소의 탄성 계수의 값을 적당히 작은 값으로 하면, 이 부분의 유한 요소를 잘라낸 것과 비슷한 효과를 얻을 수 있다. 이 방법을 사용하면 물체의 위상이 변해도 그에 따라 메쉬를 다시 자를 필요 없이 빈 공간에 해당하는 유한 요소의 탄성 계수값만 변화시켜 주고 구조 해석을 하면 된다. 이러한 메쉬 생성 기법을 Constant Meshing Technique이라 하는데, 본 연구에서는 이 기법을 사용하여 해석을 할 때마다 메쉬를 다시 자르지 않고, 메쉬는 고정시킨 상태에서 설계 변수인 각 유한 요소의 밀도를 변화시켜가며 해석을 하고 있다. 따라서, 물체의 형상이 변함으로 인해 메쉬를 다시 자르는 부담을 줄일 수 있고, 시간을 절약할 수 있다.

Mean compliance를 계산하기 위해서 가상 변위의 원칙(The Principle of Virtual Displacement)⁽¹⁶⁾에 기초한 유한 요소 해석 기법을 사용했다. 가상 변위의 원칙은 그 물체에 대한 compatible한 가상의 작은 변위에 대하여 전체 내부 가상일(total internal virtual work)은 전체 외부 가상일(total external virtual work)과 같다는 것이다.

$$\int_{\Omega} \{\delta \epsilon\}^T \{\tau\} d\Omega = \int_{\Omega} \{\delta u\}^T \{f\}^o d\Omega + \int_{\Gamma} \{\delta u\}^{ST} \{f\}^S d\Gamma + \sum_i \{\delta u^i\}^T \{F^i\} \quad (3)$$

여기서 δ 는 가상 조작자(virtual operator)이다. 따라서, $\{\delta \epsilon\}$ 는 가상 변형율이고 $\{\delta u\}$ 는 가상 변위이다. 이 때 변위 u 는 절대 좌표계에 대한 값이다.

물체를 유한 요소로 잘랐을 때, 각 요소내에서 국소 좌표계(local coordinates system)에 의해 나타내어지는 변위는 다음과 같이 displacement interpolation matrix $[H^e]$ 와 각 노드점에서의 변위 $\{\bar{u}\}$ 로 나타내어질 수 있다.

$$\{u^e\}(x, y, z) = [H^e](x, y, z)\{\bar{u}\} \quad (4)$$

여기서 $[]$ 은 행렬 조작자(matrix operator)이고, e 는 유한 요소를 나타낸다. $[B^e]$ 을 변형율-변위 행렬(strain-displacement matrix)라고 할 때,

$$\{\epsilon^e\}(x, y, z) = [B^e](x, y, z)\{\bar{u}\} \quad (5)$$

라고 할 수 있고, $[C^e]$ 를 요소의 탄성 행렬(elasticity matrix)이라고 할 때,

$$\{\tau^e\} = [C^e]\{\epsilon^e\} \quad (6)$$

라고 할 수 있으며, 본 연구에서 각 유한 요소의 밀도가 다르고, 밀도와 탄성 계수와의 관계는 식(2)와 같이 정의하였으므로, $[C^e]$ 는 다음과 같이 나타내어질 수 있다.

$$[C^e(\rho^e)] = [C^o](\rho^e)^n \quad (7)$$

여기서, $[C^o]$ 는 탄성 계수 E^o 일 때의 탄성 행렬이다. 식(4)-(7)을 위의 가상 변위의 원칙의 공식(3)에 대입하여 정리하면, 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \delta L &= \sum_e \delta L^e(\rho^e) \\ &= \{\delta \bar{u}\}^T \left[\sum_e \int_{\Omega^e} [B^e]^T [C^e(\rho^e)] [B^e] d\Omega^e \right] \{\bar{u}\} \quad (8) \\ &= \{\delta \bar{u}\}^T \left[\sum_e \int_{\Omega^e} (\rho^e)^n [B^e]^T [C^o] [B^e] d\Omega^e \right] \{\bar{u}\} \\ &= \{\delta \bar{u}\}^T \left[\sum_e \int_{\Omega^e} [H^e]^T \{f^e\}^B d\Omega^e + \sum_e \int_{\Gamma^e} [H^e]^{ST} \{f^e\}^S d\Gamma^e + \{F\} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[K]\{\bar{u}\} &= \{R\} \\
[K] &= \sum_e \int_{\Omega^e} (\rho^e)^n [B^e]^T [C^e] [B^e] d\Omega^e \quad (9) \\
\{R\} &= \sum_e \int_{\Omega^e} [H^e]^T \{f^e\}^B d\Omega^e + \\
&\quad \sum_e \int_{\Gamma^e} [H^e]^{ST} \{f^e\}^S d\Gamma^e + \{F\}
\end{aligned}$$

식(9)를 풀어서 노드점에서의 변위 $\{\bar{u}\}$ 값을 구하면, 전체의 mean compliance L 을 아래의 식과 같이 구할 수 있다.

$$L = \{\bar{u}\}^T [K] \{\bar{u}\} \quad (10)$$

2.5 감도 해석 (Sensitivity Analysis)

Feasible Direction Method를 사용하기 위하여는 설계 변수의 구배 (gradient)나 Hessian matrix같은 감도 (sensitivity)에 대한 정보가 필요하다. 본 연구에서는 유한 요소 해석에서 사용한 평형 방정식 (equilibrium equation)⁽¹⁰⁾을 직접 미분함으로써, 설계 변수에 대한 mean compliance의 구배값을 구해 사용하였다.

식(10)을 설계 변수에 대하여 편미분하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \rho^e} &= \{\bar{u}\}^T \frac{\partial [K]}{\partial \rho^e} \{\bar{u}\} + \frac{\partial \{\bar{u}\}^T}{\partial \rho^e} [K] \{\bar{u}\} + \\
&\quad \{\bar{u}\}^T [K] \frac{\partial \{\bar{u}\}}{\partial \rho^e} \quad (11)
\end{aligned}$$

또, 식(9)를 설계 변수에 대하여 편미분하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial [K]}{\partial \rho^e} &= -[K]^{-1} \frac{\partial [K]}{\partial \rho^e} [K] \{\bar{u}\} \quad \text{and} \\
\frac{\partial \{\bar{u}\}^T}{\partial \rho^e} &= -\{\bar{u}\}^T \frac{\partial [K]}{\partial \rho^e} [K]^{-1} \quad (12)
\end{aligned}$$

위의 식(12)를 식(11)에 대입하면, 다음과 같은 목적 함수의 구배를 얻는다.

$$\frac{\partial L}{\partial \rho^e} = -\{\bar{u}\}^T \frac{\partial [K]}{\partial \rho^e} \{\bar{u}\} \quad (13)$$

설계 변수가 각 유한 요소의 밀도이고, 이 밀도는 유한 요소내에서는 그 값이 일정 상수이므로, i 번째 설계 변수에 대한 다른 유한 요소의 mean compliance의 구배값은 0

이 되고, i 번째 설계 변수에 대한 mean compliance의 구배값은 오직 i 번째 유한 요소의 mean compliance의 구배값이 된다.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \rho^i} &= -\{\bar{u}\}^T \frac{\partial}{\partial \rho^i} \left[\sum_e \int_{\Omega^e} (\rho^e)^n [B^e]^T [C^e] [B^e] d\Omega^e \right] \{\bar{u}\} \\
&= -\{\bar{u}\}^T \frac{\partial (\rho^i)^n}{\partial \rho^i} \left[\int_{\Omega^i} (B^i)^T [C^i] [B^i] d\Omega^i \right] \{\bar{u}\} \quad (14) \\
&= -(n)(\rho^i)^{n-1} \{\bar{u}\}^T \left[\int_{\Omega^i} (B^i)^T [C^i] [B^i] d\Omega^i \right] \{\bar{u}\} \\
&= \frac{\partial L^i(\rho^i)}{\partial \rho^i}
\end{aligned}$$

구속 조건으로는 질량을 사용하고 있으며, 각 유한 요소내에서 밀도는 일정하고, 다른 유한 요소의 밀도와는 독립적이므로, i 번째 설계 변수에 대한 구속 조건의 구배는 i 번째 유한 요소의 체적 (volume)이 된다. 이를 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial M}{\partial \rho^i} = \int_{\Omega^i} d\Omega^i \quad (15)$$

각 요소마다 밀도가 일정하다고 가정하였으므로, 한 개의 요소에서 다른 요소로 밀도의 급격한 변화가 일어나게 된다. 결국 본 연구에서의 유한 요소 해석은 재료를 서로 다른 밀도로 이루어진 composite material로 간주해서 해 준다고 말할 수 있다.

3. 적용 예 (Application Examples)

본 장에서는 밀도 분포를 이용한 위상 최적 설계를 실제 설계 문제에 적용하는 방법을 구체적으로 설명하고, 그 결과를 보여준다. 또, 본 연구의 결과와 다른 위상 최적화 기법들의 결과를 비교, 분석하고 있다.

본 연구의 설계 방법을 실제 설계 문제에 적용시키는데는 두가지 경우가 있을 수 있다. 그 하나는 단지 경계 조건과 하중 조건이 주어졌을 때, 주어진 질량에서 최대의 강성을 갖는 구조물의 위상을 찾는 것이고, 다른 하나는 물체의 기본적인 형상은 주어진 상태에서, 강성을 증가시키기 위해 리브 및 보강재의 형상을 찾는 것이다. 이 두가지 경우에 대한 본 연구의 적용은 설계자가 설계 가능 영역을 어떠한 형태로 만들어 시스템에 입력시킬 것인가의 문제로 귀착될 수 있다. 다음의 절들에서 이 두가지 경우

의 설계 문제에 대한 적용 예들을 보이고 있다.

설계 변수의 초기값은 0.02에서 시작하여, Feasible Direction Method가 목적 함수와 구속 조건식의 계산과 목적 함수와 구속 조건식 구배의 계산을 거듭하여, 주어진 질량 한계를 넘지 않으면서, 최대의 강성을 갖는 설계 변수의 값들을 찾는다.

본 설계의 목적은 mean compliance를 최소화한 구조물의 형상을 찾는 것이다. 구속 조건은 질량 한계로서, 밀도가 1인 전체 질량의 25%이고, SI단위계를 사용하였다. 구조 해석 도구로는 ANSYS를 사용하였다.

3.1 Canti-lever Beam

첫번째 적용 예는 2차원 평면 응력 문제로서, Fig.2에서 보는 바와 같이 직사각형의 설계 가능 영역이 주어지고, 그 왼쪽 변이 구속된 상태에서 오른쪽 변의 중심에 수직 집중 하중이 작용하는 경우이다.

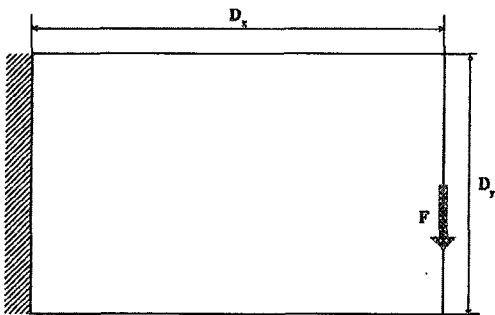


Fig. 2 Feasible Design Domain of 2-D Canti-lever Beam

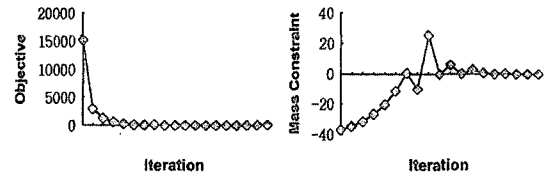
각 변의 치수, 탄성 계수(Young's modulus), 포아송의 비(Poisson's ratio), 하중치는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 D_x &= 16.0mm \\
 D_y &= 10.0mm \\
 E^o &= 2.07 \times 10^5 \text{ MP} \\
 \nu &= 0.3 \\
 F &= 300N
 \end{aligned}$$

유한 요소 해석을 위한 메쉬 모델은 32×20 mesh로 구성되어 있으며, 설계 변수는 요소의 개수와 일치하는 640개이다.

목적 함수에 Penalty term이 없는 경우, 최적화를 위한 목적 함수와 구속 조건식의 계산 횟수는 18회, 목적

함수와 구속 조건식 구배의 계산 횟수는 3회이다. 이 계산 과정을 그래프로 나타낸 것이 Fig.3이다. Penalty 상수값이 10인 경우, 최적화를 위한 목적 함수와 구속 조건식의 계산 횟수는 85회, 목적 함수와 구속 조건식 구배의 계산 횟수는 11회로서, penalty term이 없는 것보다 계산 횟수가 증가한다.



(a) Objective Function Values (b) Constraint Equation Values

Fig. 3 Convergence Characteristics of Objective and Constraint

위의 그래프에서 볼 수 있듯이, 목적 함수값은 빠른 수렴 정도를 보이나, 질량 구속 조건의 경우 상대적으로 느리게 수렴함을 알 수 있다. 또, 수렴 과정이 지그재그형으로 나타나는데 이는 Feasible Direction Method의 특성에서 기인한다 하겠다. 위상 최적화를 통해 얻은 형상은 아래의 Fig.4에서 보여주고 있다.

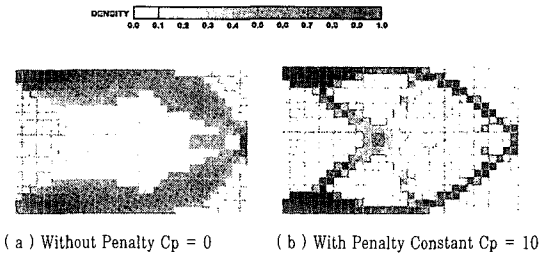


Fig. 4 Optimal Layouts of the Canti-lever Beam

Fig.4의 (a)는 목적 함수에 중간 밀도를 제거하기 위한 penalty term이 없는 경우의 최적화된 형상이고, (b)는 penalty constant $C_p = 10$ 의 penalty term을 포함하고 있는 목적 함수를 사용하여 최적화된 형상이다. Fig.4 (b)의 최적화된 형상은 Homogenization Method를 이용한 결과와 유사함을 알 수 있다. 따라서, 본 연구에서 가정한 밀도와 재료의 특성과의 관계가 Homogeniza-

tion Method를 사용하여, 엄밀하게 구한 밀도와 재료와의 관계와 그리 큰 차이가 나지 않음을 알 수 있다. 또, 본 연구에서는 목적 함수에 penalty term을 추가했다. Penalty term의 penalty 상수의 값이 mean compliance에 비하여 작으면 중간 밀도가 많이 나타나고, 그 값이 크면 중간 밀도값이 적어진다. Fig.4의 최적화된 형상을 보면, (a)의 경우 중간 밀도가 많이 나타나면서 밀도 분포의 영역이 (b)에 비해 넓고, (b)의 경우, 상대적으로 중간 밀도가 적으면서 꼭 필요한 영역에만 밀도가 분포됨을 알 수 있다. 설계자는 임의로 penalty 상수를 조정하여, 밀도 분포를 조절할 수 있고, 원하는 형상을 얻을 수도 있다. 본 연구에서 위상 최적화를 하는데 걸린 시간은 SGI Indigo2 컴퓨터를 사용하여 약 1시간 30분이었고, Homogenization Method의 경우 8시간 가량이 소요되므로, 시간적인 측면에서 본 연구가 효율적임을 알 수 있다. 그 이유는 Homogenization Method를 사용해 수치 해석적으로 밀도와 재료 특성과의 관계를 구하는데 걸린 시간을 절약할 수 있고, 설계 변수의 수가 Homogenization Method를 사용하면 2차원 설계의 경우 전체 유한 요소 개수의 3배, 3차원 설계의 경우 6배이기 때문이다.

$$D_x = 16.0mm$$

$$D_y = 7.5mm$$

$$E^o = 2.07 \times 10^5 MP$$

$$\nu = 0.3$$

$$F = 700N$$

유한 요소 해석을 위한 메쉬 모델은 64×30 mesh로 구성되어 있으며, 설계 변수는 요소의 개수와 일치하는 1920개로서, canti-lever beam의 설계 변수의 3배이다.

Penalty 상수값을 300으로 하였을 때, 최적화를 위한 목적 함수와 구속 조건식의 계산 횟수는 160회, 목적 함수와 구속 조건식 구배의 계산 횟수는 18회이고, 최적화된 형상은 아래의 Fig.6과 같다.

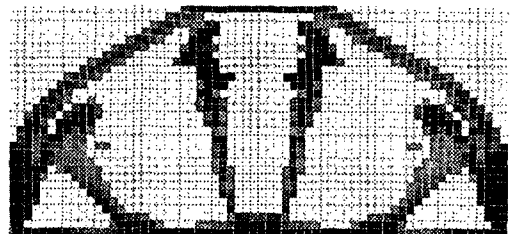


Fig. 6 Optimal Layout of the Bridge-like Frame

3.2 Bridge-like Frame

두번째 적용 예는 아래의 Fig.5와 같은 설계 가능 영역이 주어질 때, 왼쪽 아래 꼭지점 부분은 모든 방향으로의 자유도가 구속되고, 오른쪽 아래 꼭지점 부분은 y방향으로의 자유도만 구속되며, 3개의 수직 하중이 가해지는 설계 문제로 다리의 철골 구조물의 설계 문제와 유사하다.

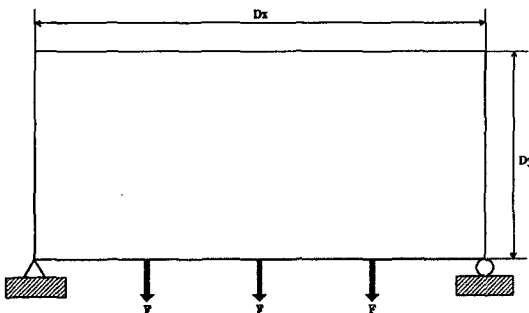


Fig. 5 Feasible Design Domain of Bridge-like Frame

각 변의 치수, 탄성 계수 (Young's modulus), 포아송의 비 (Poisson's ratio), 하중치는 다음과 같다.

3.3 평판과 리브 (Plate and Ribs)

다음의 적용 예는 평판에 균일 분포 하중과 그 중심에 집중 하중이 작용하는 경우 각각에 대한 최적 형상의 설계이다. 경계 조건은 평판의 네 변의 모든 자유도를 구속하는 것으로 하였다. 평판의 강성도를 증가시키는 방법에는 2가지가 있을 수 있다. 그 하나는 앞의 적용 예와 마찬가지로, 질량을 감소시킬 때, 최대의 강성을 갖는 평판 자체의 형상을 찾는 것이다. 그러나, 평판이나 셸 구조물의 실제 설계에서는 대부분의 경우 리브를 설치하여 강성을 증가시킨다. 따라서, 본 연구에서는 평판의 아래쪽에 리브를 설치할 때, 그 리브의 형상을 결정하는 방법으로서, 셸로 구성된 리브 형태의 설계 가능 영역을 주고, 주어진 질량에서 최대의 강성을 갖는 밀도 분포를 찾는다. 이 때, 셸은 리브가 설치되는 평판에 수직하게 설치되도록 한다.

Penalty 상수값은 각각 30, 180, 20, 150으로 하였다. 최적화를 위한 목적 함수와 구속 조건식의 계산 횟수는 각각 43, 27, 52, 25회, 목적 함수와 구속 조건식 구배의 계산 횟수는 각각 8, 4, 11, 4회이고, 최적화된 형상은 아래의 Fig.7과 같다.

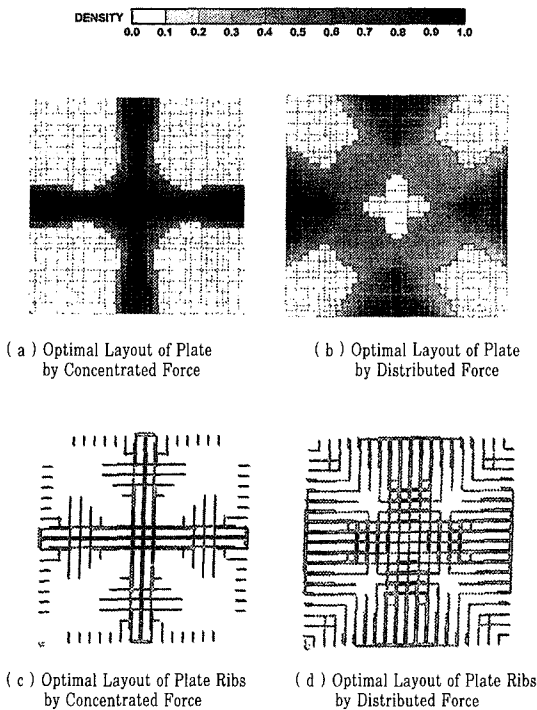


Fig. 7 Optimal Layouts of Plates and Ribs

평판과 셸은 대칭의 형상이므로, xy 평면에서 4등분하여 해석하였다. 유한 요소 해석을 위한 메쉬 모델은 (a), (b)는 20×20 mesh로 구성되어 있으며, 요소의 형태는 plane42, 설계 변수의 개수는 요소의 개수와 일치하는 400개이다. (c), (d)는 각 유한 요소의 개수는 440개이고, 요소의 형태는 shell63이다.

기준에 위상 최적화를 이용한 리브의 설계 방법에 의하면, (a), (b)의 결과에 따라 밀도가 높은 부분에 집중적으로 리브를 설치하는 것이 일반적이었다. 그러나, (c), (d)의 결과에서 볼 수 있듯이 평판에 수직하게 리브를 설치할 경우, 리브의 형상과 위치는 (a), (b)와 다름을 알 수 있다. 이 경우에는 (a), (b)의 경우와는 달리 가능한 설계 가능 영역을 모두 고려하지는 못한다. 그러나, 셸과

셸사이의 간격을 적당히 좁혀 주면, 실제적으로 큰 문제는 없을 것이다. 또, 기존의 리브 설계 방법인 두께 분포에 따라 리브를 제작할 때의 어려움을 피하고 보다 실용적인 리브의 형상을 얻을 수 있다.

3.4 TV 리브 (Television Ribs)

TV 모니터내에는 CRT를 지지해주기 위해 모니터 케이스와 CRT사이에 리브를 설치하는 것이 일반적이다. 본 연구에서는 강성을 최대화한 즉, 변형을 최소화한 CRT지지대의 형상을 찾기 위해 먼저, 3차원 체적 (volume)을 갖는 설계 가능 영역을 주어, 주어진 하중 조건 하에서 최적의 3차원 체적의 형상을 찾았다. 또, 설계 가능 영역을 3.3절에서 제시한 셸 형태로 만들어서, 최적의 리브의 형상도 찾았다. 각각의 경우에 대한 설계 가능 영역을 다음의 Fig.8에 나타내었다.

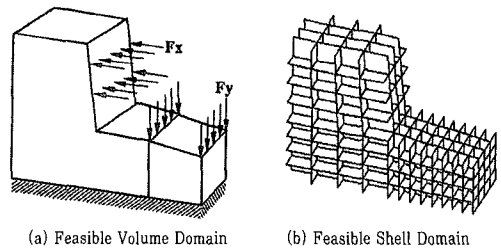


Fig. 8 Feasible Design Domain of Support Volume and Shell Ribs

Fig.8에서 설계 가능 영역은 CRT의 형상에 맞추어서, 그 형상이 만들어졌으며, 셸 영역에 가해지는 하중의 위치와 크기 및 경계 조건은 체적 영역에 가해지는 하중 조건 및 경계 조건과 동일하다. 탄성 계수 (Young's modulus), 포아송의 비 (Poisson's ratio), 하중치는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 E^o &= 2.44 \times 10^3 MP_a \\
 \nu &= 0.35 \\
 F_x &= 30N \\
 F_y &= 50N
 \end{aligned}$$

지지 체적 (support volume)의 경우 4개의 체적을 이어서 만들었으며, 유한 요소 해석을 위한 요소의 개수는 480개이고, 요소의 형태는 solid 45이다. 셸의 경우 요소의 개수는 640개이고, 요소의 형태는 shell 63이다.

지지 체적의 경우, Penalty 상수값을 0.002로 하였고,

최적화를 위한 목적 함수와 구속 조건식의 계산 횟수는 41회, 목적 함수와 구속 조건식 구배의 계산 횟수는 6회이다. 최적화된 형상은 아래의 Fig.9와 같다.

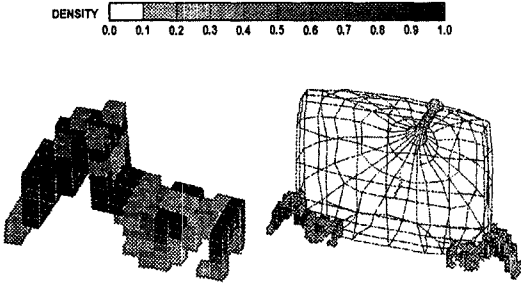


Fig. 9 Optimal Layout of Support Volume in the Television

셸의 경우, Penalty 상수값을 0.01로 하였고, 최적화를 위한 목적 함수와 구속 조건식의 계산 횟수는 37회, 목적 함수와 구속 조건식 구배의 계산 횟수는 6회이다. 최적화된 형상은 아래의 Fig.10과 같다.

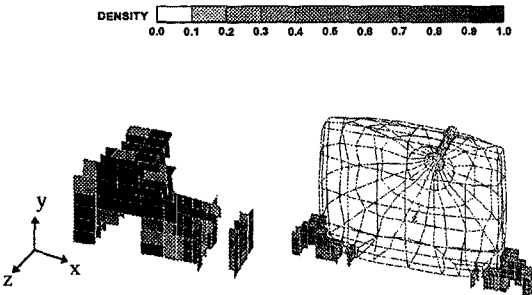


Fig. 10 Optimal Layout of Shell Ribs in the Television

Fig.9에 나타난 지지 체적 최적화는 CRT의 지지뿐만 아니라, 다양한 구조물의 지지에도 마찬가지로 응용될 수 있다. Fig.10의 최적화된 리브의 형상은 바로 실제 리브의 제작에 사용될 수 있다. 이 최적화된 형상과 실제 TV에 사용되는 리브를 비교하기 위해 아래의 Fig.11에 TV model CT29M의 리브의 형상을 나타내었다.

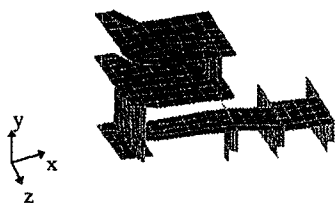


Fig. 11 Original Ribs in the Television Model ct29m

최적화된 리브의 형상과 기존의 리브의 형상을 비교해 보면, 기존의 리브의 형상이 주로 xz평면과 평행한 형태로 구성되어 있는데 반해, 최적화된 리브의 형상은 xy평면과 평행하게 구성되어 있다. TV를 지지하기 위한 지지 체적 또는 리브들의 최적화된 형상과 실제 TV 모델인 CT29M의 리브들의 상대적인 mean compliance와 질량을 비교하여 Table 1에 나타내었다.

Table 1 Comparison between Optimized Results and Original Model

	Support Volume	Optimized Ribs	CT29M Ribs
Mean Compliance	23.92	0.3116	8021.52
Mass	379013	26800	42062

물론, TV 리브들의 설계에는 강성적인 요소외에 사출 성형시에 열 변형 및 열 응력의 문제 또는 충격에 얼마나 견딜 수 있는가등 여러 요소들이 포함되지만 강성적인 측면에서만 본다면, 기존의 CT29M에 설치된 리브의 형상 보다는 Fig.10에 나타난 최적화된 형상으로 리브를 설치하는 것이 CRT를 지지하는 리브의 강성을 크게 증가시킬 수 있다고 할 수 있다. 또, 리브 전체의 질량도 기존의 리브 질량의 63.7%로 줄일 수 있다. 사실 리브의 형상을 설계할 때, 설계자의 직관과 경험에 주로 의존하게 되는데, 이를 배제하고, 본 연구의 방법을 적용한다면 보다 효율적인 형상을 설계할 수 있을 것이다.

4. 결론

각 유한 요소의 밀도를 설계 변수로 사용해 주어진 질량 한계에서 최대의 강성을 갖는 구조물의 위상을 찾는 시스템을 개발하였다. 전체 설계 가능 영역의 밀도 분포로써, 위상을 나타내었고, 이 위상은 개념 설계단계에서의 구조물의 형상으로 사용될 수 있다. 또, 물체의 기본적인 형상이 정해진 경우, 강성을 증가시키기 위한 리브의 형상을 결정하는데, 위상 최적화를 이용한 새로운 방법을 제시하였다.

위상 최적화를 이용한 강성 설계에 대한 기존의 연구들의 결과와 본 연구의 결과를 canti-lever beam의 경우를 들어 비교한 그림이 Fig.12에 나타나 있다.

Fig. 12에서 보듯이 본 연구의 결과는 Homogenization Method에 의한 결과와 유사함을 알 수 있다. 위상 최적화의 주된 목적은 설계하려는 물체의 위상을 결정하

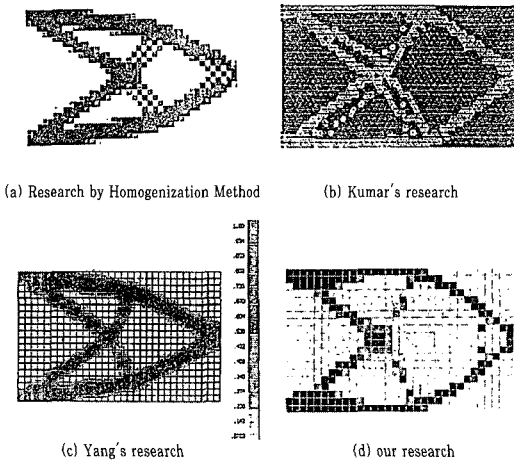


Fig. 12 Comparison between this and other research

는 것이므로, 최적화된 형상들끼리 반드시 동일할 필요는 없고, 설계 가능 영역에 구멍을 몇 개를 뚫을 것인가가 더욱 중요하다. Fig.12의 경우, 모두 루프(loop) 4개로 윤곽을 쌓을 수 있다.

Homogenization Method의 결과에는 체스판 모양의 checkerboard pattern이 발생하는데, 이러한 형상은 설계자가 이 부분을 포함시킬지 아닐지를 판단하기 곤란하게 만든다. 어떤 경우는 이러한 checkerboard pattern이 무시할 수 없을 정도로 넓은 영역을 차지할 수도 있다. 이에 비해 본 연구의 결과에는 checkerboard pattern이 나타나지 않고 있다.

또, Homogenization Method의 경우, 2차원 설계 변수의 개수가 각 유한 요소 개수의 3배, 3차원 설계 변수의 개수가 각 유한 요소 개수의 6배인데 비해, 본 연구의 설계 변수의 개수는 2, 3차원 모두 유한 요소의 개수와 일치하므로, 전체 최적화에 소요되는 계산량이 Homogenization Method에 비하여 적다.

설계 변수인 밀도와 재료의 특성과의 관계는 식(2)와 같이 가정하였다. 이와 같이 가정하고 최적화 작업을 수행한 결과가 canti-lever beam의 예에서 볼 수 있듯이, Homogenization Method로 구한 결과와 유사함을 알 수 있다. Homogenization Method를 사용해서 밀도와 재료의 특성과의 관계를 얻으려면, 여러번의 유한 요소 해석을 해서 구한 값들을 Legendre다항식을 사용하여 연결해 주어야 한다. 결국, 본 연구의 밀도와 재료의 특성과의 관계에 대한 가정이 이러한 복잡성을 피하면서, 보

다 간편하고, 빠르게 위상 최적화 작업을 수행할 수 있도록 해준다.

Yang의 경우, Fig.12에서 볼 수 있듯이, 0에서 0.5까지의 밀도를 같은 색으로 표시해 놓았다. 결국, penalty term을 사용하지 않아서 중간 밀도가 많이 섞여 있음을 알 수 있다. 만일, 결과가 보다 복잡한 형상일 경우 문제가 발생할 수 있을 것이다. 본 연구의 결과는 밀도값이 보다 선명하고, 중간 밀도가 가능한 한 배제되어 있음을 알 수 있다.

Kumar의 경우는 윤곽 자체가 직선들로 연결되어, 최적화된 밀도 분포의 형상을 상세 설계 단계에서 B-spline 곡선이나 곡면으로 다시 잘 필요는 없으나, 3차원의 문제에 적용하는데 어려움이 있다. 본 연구에서는 설계 변수를 각 유한 요소의 밀도로 하였기 때문에, 2차원 형상뿐 아니라, 3차원 형상에도 적용 가능하다.

본 연구에서 최적화 알고리즘으로 사용한 Feasible Direction Method는 Sequential Approximate Optimization Algorithm에서와 같이 비선형 문제를 선형, 2차 또는, convex의 문제로 근사화시켜 풀지 않기 때문에 시간이 좀 더 소요되는 경향이 있으나, 근사화를 시키지 않기 때문에 좀 더 정확하게 해를 구할 수 있다. 또, Optimality Criteria Method와는 달리 여러 개의 목적 함수와 구속 조건을 동시에 최적화할 수 있는 가능성도 갖고 있다.

결론적으로, 본 연구에서 개발한 최적 위상 설계 시스템을 사용하여 강성을 최대화하기 위한 개념 설계를 한다면, 설계자의 추상적이고, 직관적인 설계에서 벗어나, 보다 객관적이고, 합리적인 설계가 이루어질 수 있다고 확신한다. 특히, 물체의 형상에 대한 추측이 어려운 리브등의 설계에 보다 효율적이다. 또, 설계 비용의 절감과 아울러 주어진 조건하에서 설계자가 원하는 최적의 구조적 성능을 발휘하는 구조물의 형상을 찾을 수 있다.

5. 향후 연구 과제

본 연구의 목적은 주어진 질량하에서 최대의 강성을 갖는 구조물의 형상을 찾는 것이었고, 문제를 정적 하중의 경우에 국한시켜 최적화 작업을 수행하였다. 그러나, 이러한 문제의 제기는 설계자의 설계 목적에 따라 다양할 수 있다. 만일, thermal loads하에서의 최대 응력등이 문제가 된다면, 목적 함수의 형태는 변화할 것이다. 실제의 설계에서 문제의 제기는 다양할 것이므로, 앞으로 다

양한 형태의 하중 조건 (thermal loads, impact, vibration 등) 하에서 다양한 목적 함수와 구속 조건들에 대한 연구가 필요하다고 할 수 있다.

본 연구의 결과는 3장에서 볼 수 있듯이 곡선이나, 곡면의 형태가 아닌 discrete한 형태로 나타나기 때문에, 이러한 discrete한 형태를 곡선 또는, 곡면으로 연결해서 하나의 완전한 기하학적 형상으로 만들어 주는 작업이 필요하다.

본 연구에서 최적화 알고리즘으로 사용한 Feasible Direction Method는 최적해를 찾아가는 데는 별 문제가 없으나, 해를 찾아가는 형태가 지그재그 형태이므로 그리 효율적이지는 못하다. 따라서, 본 연구와 같은 비선형 문제에서 보다 효율적으로 최적해를 찾아갈 수 있는 최적화 알고리즘의 개발이 요구된다.

참 고 문 헌

1. B.H.V.Topping, "Shape optimization of skeletal structures : A review," *Journal of Structural Engineering*, Vol.109, No.8, pp.1933-1951, 1983.
2. R.T.Haftka and Z.Gurdal, *Elements of Structural Optimization*, 3rd Edition, Kluwer Academic Publishers, 1992.
3. A.R.Diaz and M.P.Bendsoe, "Solutions to shape and topology eigenvalue optimization problems using homogenization method," *International Journal for Numerical Method in Engineering*, Vol.35, pp.1478-1502, 1986.
4. M.P.Bendsoe and N.Kikuchi, "Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method," *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.71, pp.197-224, 1988.
5. M.P.Bendsoe and H.C.Rodrigues, "Integrated topology and boundary shape optimization of 2-D solids," *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.87, pp.15-34, 1988.
6. N.Olhoff, M.P.Bendsoe and J.Rasmussen, "On CAD-integrated structural topology and design optimization," *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.89, pp.259-279, 1991.
7. K.Suzuki, N.Kikuchi and H.Ohtsubo, "Optimal shape and layout design of plate using microstructure," *Journal of Japanese Society of Mechanical Engineering 2-1*, pp.345-351, 1992.
8. M.P.Bendsoe, A.Diaz and N.Kikuchi, "Topology and generalized layout optimization of elastic structures," *Topology Design of Structures*, Ed. Bendsoe and Mota Soers, Kluwer Academic Publishers, 1993.
9. E.Sandgren and E.Jensen, "Automotive structural design employing a genetic optimization algorithm," *Proceedings of 1992 SAE International Congress and Exposition*, Detroit, Michigan
10. A.K.Kumar, "Shape and topology synthesis of structures using a sequential optimization algorithm," Ph.D. Thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1993.
11. R.J.Yang and C.H.Chuang, "Optimal topology design using linear programming," *Computers and Structures*, Vol.52, No.2, pp.265-275, 1994.
12. Z.Mroz, "Multiparameter optimal design of plates and shells," *Journal of Structural Mechanics*, Vol.1, No.3, pp.371-392, 1978.
13. J.L.Armand and B.Lodier, "Optimal design of bending elements," *International Journal for Numerical Method in Engineering*, Vol.13, pp.373-384, 1978.
14. G.I.N.Rozvany, N.Olhoff, K.T.Cheng and J.E.Taylor, "On the solid plate paradox in structural optimization," *Journal of Structural Mechanics*, Vol.10, No.1, pp.1-32, 1982.
15. H.P.Mlejnek and R.Schirmacher, "An Engineer's Approach to Optimal Material Distribution and Shape Finding," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engi-*

- neering, Vol.106, pp.1-26, 1993.
16. K.J.Bathe, Finite Element Procedures in Engineering Analysis, Civil Engineering and engineering mechanics series, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1982.
 17. E.J.Huang, K.K.Choi and V.Komkov, "Design sensitivity analysis of structural systems," Academic Press, New York, 1986.
 18. V.Briabant and C.Fluery, "Shape optimal design using B-splines," Computer Method in Applied Mechanics and Engineering, Vol.44, pp.247-267, 1984.
 19. G.Strang and R.Kohn, "Optimal Design in Elasticity and Plasticity," International Journal for Numerical Method in Engineering, Vol.22, pp.183-188, 1986.